Několik úloh z geometrie jednoduchých těles

III. Koule a plocha kulová

In: F. Hradecký (author); Milan Koman (author); Jan Vyšín (author): Několik úloh z geometrie jednoduchých těles. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1961. pp. 60–82.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403428

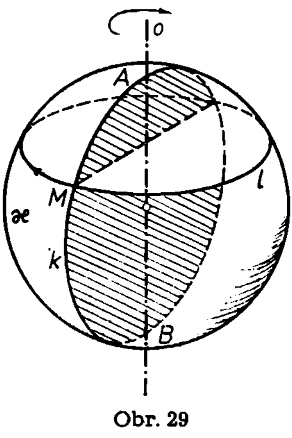
Část III

KOULE A PLOCHA KULOVÁ

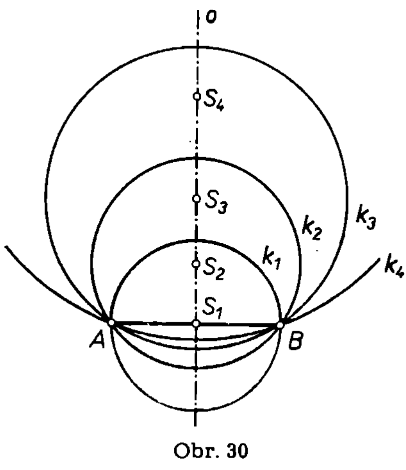
●

Školská planimetrie věnuje zvláštní pozornost dvěma obrazcům: trojúhelníku a kruhu. Obdobou těchto útvarů v prostoru jsou čtyřstěn a koule. V prvních dvou částech našeho textu jsme rozřešili několik úloh o čtyřstěnu, v této části se budeme zabývat některými úlohami o kouli a o kulové ploše.

Koule je těleso, které vznikne rotací kruhu kolem jeho libovolného průměru AB (obr. 29). Kulová plocha vznikne otáčením kružnice kolem jejího průměru AB. Přitom



Obr. 29



Obr. 30

každý bod M kružnice k s výjimkou bodů A, B se pohybuje po vedlejší nebo po hlavní kružnici kulové plochy (viz str. 30). Tak např. povrch Země můžeme pokládat přibližně za plochu, která vznikla rotací některé poledníkové kružnice kolem zemské osy. Jednotlivé body poledníkové kružnice s výjimkou pólů se pohybují po zeměpisných rovnoběžkách.

Má-li rovina s kulovou plochou společné aspoň dva body, protne ji v kružnici hlavní nebo vedlejší; hlavní kružnice vznikne tehdy, prochází-li rovina řezu středem kulové plochy.

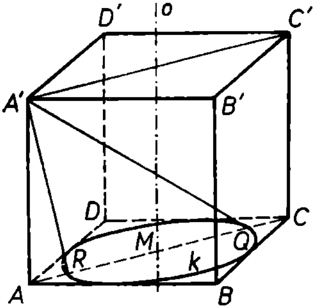
Uvedených vlastností koule a kulové plochy často využíváme, chceme-li přenést některé věty o kruhu a kružnici do prostoru. Stačí nechat příslušný útvar otáčet kolem vhodné osy a odtud vyvodit příslušné závěry pro prostorový útvar. Tak např. v planimetrii platí věta: Geometrické místo středů kružnic, které procházejí danými dvěma body A, B, je osa o úsečky AB (obr. 30). Necháme-li celý útvar otáčet kolem přímky o, dospějeme k větě: Geometrické místo středů kulových ploch, které protínají rovinu ϱ v dané kružnici $k \equiv (O; r)$, je kolmice o v bodě O k rovině ϱ.

Jiný příklad: Obdobou planimetrické věty o sečně kružnice je ve stereometrii věta o *sečné rovině* kulové plochy.

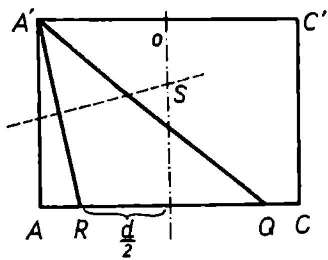
Každá rovina ϱ, která má od středu S kulové plochy o poloměru r vzdálenost $v < r$, protne tuto kulovou plochu v kružnici l (obr. 29). Středem kružnice l je pata O kolmice vedené bodem S k rovině ϱ.

Úloha 18. *Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně d. Označíme k kružnici vepsanou čtverci $ABCD$. Máme určit konstruktivně i početně poloměr r kulové plochy, která obsahuje kružnici k a bod A'.*

Řešení. Abychom mohli určit poloměr r, musíme znát střed S hledané kulové plochy. Tato kulová plocha $\varkappa$ má obsahovat kružnici k; její střed S leží proto na kolmici o vztyčené ve středu M čtverce $ABCD$ k rovině tohoto čtverce. (obr. 31a). Proto rovina ϱ určená přímkou o a bodem A', procházející středem S plochy $\varkappa$, protne tuto plochu v jisté kružnici h.



Obr. 31a



Obr. 31b

Dále budeme provádět všechny konstrukce v rovině ϱ, která obsahuje úhlopříčný řez $ACC'A'$ dané krychle.

Přímka AC roviny ϱ protne kružnici k, tedy i kulovou plochu $\varkappa$ ve dvou bodech R, Q souměrně sdružených podle bodu M. Kružnice h tedy prochází body R, Q, A', tj. je opsána trojúhelníku RQA'. Střed S kružnice h je pak středem jediné kulové plochy, která je řešením úlohy (obr. 31b).

Jako v planimetrii se při řešení konstruktivní úlohy vždy dokazuje, že sestrojený útvar skutečně splňuje všechny podmínky úlohy, tak i v naší úloze musíme dokázat, že kulová plocha se středem S a procházející bodem A' splňuje podmínky úlohy 18; pokuste se o to sami tím, že obrátíte postup předchozího rozboru.

Nyní určíme konstruktivně a početně poloměr r kulové plochy $\varkappa$. Sestrojíme trojúhelník RQA' ve skutečné velikosti (obr. 31b) a určíme střed S kružnice h opsané tomuto trojúhelníku; její poloměr r je hledaný poloměr kulové plochy $\varkappa$.

Z planimetrie víme, že poloměr r kružnice opsané libovolnému trojúhelníku ABC lze vypočítat podle vzorce

$$r = \frac{abc}{4P}, \tag{1}$$

kde a, b, c jsou velikosti stran a P obsah trojúhelníku.

Vypočteme nejprve délky všech stran trojúhelníku RQA'. Víme, že $RQ = d$. Zbývající dvě strany jsou přepony pravoúhlých trojúhelníků ARA', AQA'. Protože je $AR = \frac{1}{2} d(\sqrt{2} - 1)$, $AQ = \frac{1}{2} d(\sqrt{2} + 1)$, platí podle Pythagorovy věty

$$A'R = \frac{1}{2} d\sqrt{7 - 2\sqrt{2}}, \quad A'Q = \frac{1}{2} d\sqrt{7 + 2\sqrt{2}}.$$

Dále vypočteme obsah P trojúhelníka RQA'

$$P = \frac{1}{2} RQ \cdot AA' = \frac{1}{2} d^2.$$

Ze vzorce (1) dostaneme po úpravě

$$r = \frac{1}{8} d\sqrt{(7 - 2\sqrt{2})(7 + 2\sqrt{2})} = \frac{1}{8} d\sqrt{41} \doteq 0{,}8\, d\,.$$

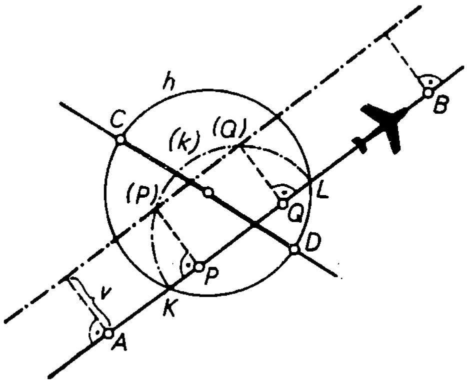
Obdobným způsobem jako úloha 18 se dají řešit také úlohy na vyhledávání středu kulové plochy procházející čtyřmi danými body nebo obsahující jisté dvě kružnice apod.

*

Než začneme řešit následující úlohu, ukážeme si další zajímavou vlastnost kulové plochy. Přitom opět užijeme znalostí z planimetrie. Tam jste poznali větu: Geometrické místo vrcholů *V* pravých úhlů, jejichž ramena procházejí danými body *A*, *B*, je kružnice opsaná nad průměrem *AB*, zvaná *Thaletova.*

Ve stereometrii platí obdobná věta o kulové ploše: Geometrickým místem vrcholů *V* pravých úhlů, jejichž ramena procházejí body *A*, *B*, je kulová plocha sestrojená nad průměrem *AB*.

Úloha 19. *Letadlo přelétá ve výšce v krajinu po přímé trati nad místy A, B. Za letu se má vyfotografovat úsek silnice označený na mapě (obr. 32) úsečkou CD. K dispozici je foto-*



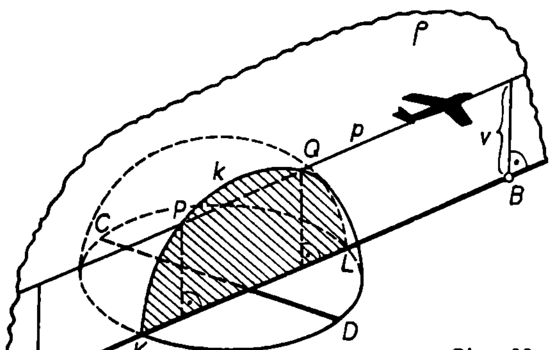
Obr. 32

aparát s objektivem typu Dagor, kterým můžeme fotografovat maximálně pod zorným úhlem 90^0 *(běžné aparáty mají zorný úhel menší). Máme určit, z kterých míst lze pořídit snímek celého objektu CD.* (Krajinu považujeme za část roviny).

Řešení. Potřebujeme zjistit množinu bodů, z nichž je vidět úsečku CD v ostrém nebo pravém zorném úhlu. Všimněme si nejdříve pravých zorných úhlů. Podle Thaletovy věty o kulové ploše je geometrickým místem vrcholů pravých zorných úhlů pro úsečku CD kulová plocha $\varkappa$ o průměru CD, a to pouze její část nad povrchem Země. Z názoru se zdá, že z vnějších bodů této kulové plochy bude vidět body C, D pod ostrým zorným úhlem. Tak tomu také je. To snadno sami odůvodníte užitím planimetrických vztahů.

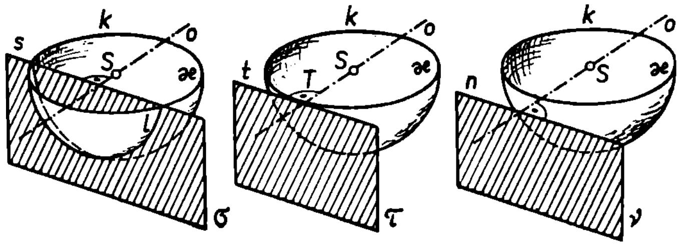
Pokud bude letadlo vně kulové plochy $\varkappa$, bude možno bezpečně vyfotografovat celý objekt CD. Vzhledem k tomu jde v dané úloze o určení průsečíků P, Q dráhy letadla s kulovou plochou $\varkappa$.

Letadlo letí po přímce p vedené ve výšce v nad terénem (obr. 33). Přímkou p proložíme svislou rovinu ϱ, sestrojíme její řez s kulovou plochou $\varkappa$; společné body přímky p s obvodem tohoto řezu jsou hledané body P, Q. Hlavní kružnici kulové plochy $\varkappa$ ve vodorovné rovině terénu označíme h. Její průsečíky s přímkou AB nechť jsou K, L. Rovina ϱ protíná kulovou plochu $\varkappa$ v kružnici k, která má



Obr. 33

úsečku KL za svůj průměr (proč?). Průsečíky P, Q přímky k jsou společné body kružnice k a kulové plochy $\varkappa$. Konstrukce je na obr. 32 zakreslena v příslušném zmenšení přímo do plánu.



Obr. 34abc

Snadno již sami usoudíte, jak řešení závisí na výšce v letadla. Dále si dobře promyslete způsob, kterým jsme určili průsečíky přímky s kulovou plochou a pokuste se ho použít na libovolnou plochu nebo těleso. Můžete se také pokusit rozřešit obdobnou úlohu o vyfotografování mostu z paluby parníku plujícího kolmo na osu mostu i v případě, že se nejedná o zorný úhel velikosti 90°. Úlohu Thaletovy kulové plochy nahradí ovšem jiná plocha.

*

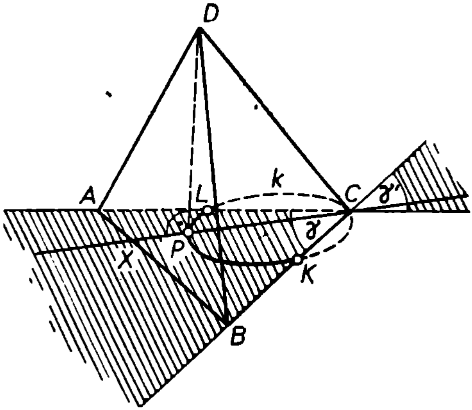
Víme, že rovina, která má od středu kulové plochy vzdálenost menší než poloměr, má s ní společnou kružnici (obr. 34a). Všimněme si tedy zbývajících případů. Rotací kružnice k a její tečny t kolem společné osy o dospějeme k větě:

Rovina, která má od středu S kulové plochy $\varkappa$ vzdálenost rovnou jejímu poloměru, má s ní společný jediný bod T. Takovou rovinu nazýváme *tečnou rovinou* plochy $\varkappa$ a bod T je *bodem dotyku* (obr. 34b). Je zřejmé, že tečná rovina τ

s bodem dotyku T je kolmá k poloměru ST kulové plochy.

Obdobně usoudíte ze vzájemné polohy kružnice a její nesečny: rovina, která má od středu kulové plochy vzdálenost větší než poloměr, nemá s ní žádný společný bod, je to tzv. *nesečná rovina* (obr. 34c).

Úloha 20. *Je dán čtyřstěn $ABCD$. Bod X probíhá hranu AB. Máme vyšetřit geometrické místo pat P kolmic vedených z vrcholu D na přímky CX.*



Obr. 35

Řešení. První, čeho si všimneme, je, že úhel $\sphericalangle CPD$ má být pravý. Body C, D jsou přitom pevné. Hledané body P leží na Thaletově kulové ploše $\varkappa$ sestrojené nad průměrem CD. Body P musí ležet také na přímkách CX. Tyto přímky vyplní dvojici vrcholových úhlů $\gamma \equiv \sphericalangle ACD$, γ'. Všechny body P musíme hledat tudíž v průniku kulové plochy $\varkappa$ s dvojicí úhlů γ, γ' (obr. 35).

Nyní musíme zjistit, zda také naopak každý bod tohoto průniku má požadovanou vlastnost. Zvolme proto libovolný bod P společný kulové ploše $\varkappa$ a úhlům γ, γ'. Je-li $P \not\equiv C$, potom náleží hledanému geometrickému místu **M**, neboť rovina CDP protne rovinu ABC v přímce, která prochází dutým úhlem ACB a protíná úsečku AB v bodě X. Bod P je pak zřejmě pata kolmice spuštěné z bodu D na přímku CX. Nechť je $P \equiv C$; bod C pak náleží hledanému geometrickému místu **M** jen v tom případě, když tímto bodem prochází aspoň jedna přímka patřící dvojici vrcholových úhlů γ, γ' a kolmá k CD. Tento případ nastane např. vždy, je-li hrana CD kolmá k rovině ABC. Tak dostaneme výsledek:

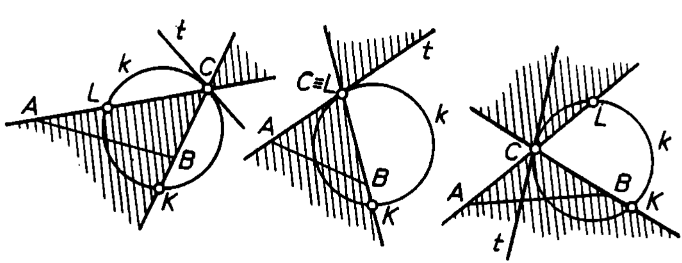
Množina **M** *je průnik dvojice vrcholových úhlů* γ, γ' *s kulovou plochou* $\varkappa$, *někdy bez bodu* C, *jindy s bodem* C.

Všimněme si ještě podrobněji průniku plochy $\varkappa$ a dvojice úhlů γ, γ'. Máme tedy vyšetřovat společné body dvou prostorových útvarů. Ale i tento problém můžeme převést v podstatě na planimetrickou úlohu. Zjistíme nejdříve, jaký útvar je společný rovině ABC a kulové ploše $\varkappa$ a pak můžeme již zkoumat jenom průnik tohoto útvaru s dvojicí úhlů γ, γ'.

Rovina ABC má s kulovou plochou $\varkappa$ společný v každém případě bod C (proč?), mohou tedy nastat pouze dvě možnosti: Rovina ABC je buď tečnou rovinou plochy $\varkappa$ a nemá tedy s $\varkappa$ kromě bodu C žádný další společný bod, anebo je sečnou rovinou a má s $\varkappa$ společnou kružnici k.

a) Je-li rovina ABC tečná, potom je $CD \perp ABC$. Bod C pak patří hledané množině **M** a je to současně její jediný bod.

b) Nechť rovina ABC má s kulovou plochou $\varkappa$ společnou kružnici k. Průnik této kružnice s dvojicí úhlů γ, γ' může být rozmanitý (viz obr. 36abc). Protože kružnice k prochází vždy bodem C, skládá se tento průnik vždy z jistého



Obr. 36 abc

oblouku KL kružnice k a z bodu C, který buď zmíněnému oblouku patří (obr. 36bc) nebo nepatří (obr. 36a). Víme, že tento oblouk až snad na bod C hledané množině **M** patří; zbývá tudíž prozkoumat bod C.

Aby bod C patřil množině **M**, musí jím procházet přímka t kolmá k CD a patřící dvojici úhlů γ, γ'. Protože má být $t \perp CD$, musí přímka t ležet v tečné rovině kulové plochy $\varkappa$ vedené bodem C. Pak však kromě bodu C nesmí mít s plochou $\varkappa$ žádný společný bod a tedy také nesmí mít společný bod s kružnicí k, která na $\varkappa$ leží. Této podmínce vyhovuje v rovině ABC jedině tečna t kružnice k v bodě C. Jestliže tedy tečna t kružnice k v bodě C náleží dvojici vrcholových úhlů γ, γ', pak bod C patří množině **M** (obr. 36bc), v opačném případě bod C množině **M** nepatří (obr. 36a).

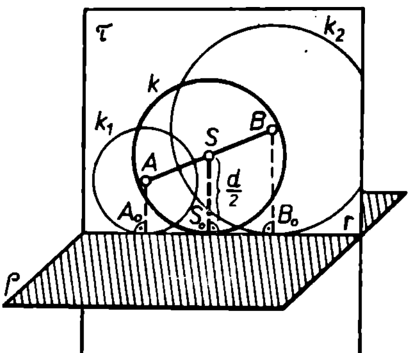
Při řešení úlohy 20 jsme se nezmínili o tom, jak lze sestrojit střed S kružnice k. Pokuste se o to sami. Podaří-li se vám to, pokuste se určit střed S v síti daného čtyřstěnu.

Jistě jste si všimli výhodného postupu při vyšetřování průniku dvou geometrických útvarů, z nichž jeden je částí roviny. Zjistěte podobně, co může být např. průnikem čtyřstěnu nebo krychle s danou kružnicí.

Úloha 20 patřila do skupiny příkladů na vyšetřování geometrických míst bodů. Pravděpodobně jste vyřešili už celou řadu takových úloh. Zamysleli jste se však někdy nad tím, že vedle geometrických míst bodů neboli množin *všech bodů dané vlastnosti* mohou existovat i *množiny jiných geometrických útvarů?* Na ukázku uvedeme jeden příklad.

Úloha 21. *Je dána úsečka AB velikosti a a číslo* $d > a$. *Máme vyšetřit množinu všech rovin, které mají od krajních bodů úsečky AB stálý součet vzdáleností, rovný d.*

Řešení. Nejdříve si musíme uvědomit, jaký můžeme očekávat asi výsledek našeho vyšetřování. Naše znalosti různých množin rovin jsou velmi skrovné (znáte jistě množinu rovin svazku apod.); zaměříme proto své snažení k tomu, abychom našli nějakou jednoduchou konstrukci umožňující sestrojit snadno libovolnou rovinu hledané množiny. Budeme — podobně jako u konstruktivních úloh — předpokládat, že známe libovolnou rovinu hledané množiny **M**, a budeme hledat nutné podmínky pro její sestrojení.



Obr. 37

Nechť tedy má rovina ϱ (obr. 37) od krajních bodů úsečky AB součet vzdáleností d. Označme A_0, B_0 paty kolmic spuštěných z bodů A, B na rovinu ϱ. Dokážeme, že $AA_0 + BB_0 = d$.

Protože kolmice k téže rovině jsou rovnoběžné, leží body A, A_0, B, B_0 v jedné rovině $\tau \perp \varrho$ procházející přímkou AB. Roviny τ a ϱ mají společnou průsečnici r, která má od bodů A, B stejný součet vzdáleností jako rovina ϱ. Známe-li však v rovině τ přímku r, dovedeme už příslušnou rovinu ϱ sestrojit. Stačí proto zkoumat v libovolné rovině τ procházející přímkou AB množinu přímek r, které mají od bodů A, B součet vzdáleností d.

Přímka r je zřejmě společnou tečnou kružnic $k_1 \equiv (A, AA_0)$, $k_2 \equiv (B, BB_0)$, kde $AA_0 + BB_0 = d$. Protože středná $AB = a$ kružnic k_1, k_2 je kratší než součet poloměrů ($a < d$), nemohou tyto kružnice mít společnou vnitřní tečnu. Žádná přímka r neprotíná tedy úsečku AB. Pokud rovnoběžné přímky AA_0, BB_0 nesplývají, jsou body A, A_0, B_0, B (v tomto pořadí) vrcholy lichoběžníku AA_0B_0B se základnami AA_0, BB_0. Pro jeho střední příčku SS_0 platí

$$SS_0 = \frac{1}{2}(AA_0 + BB_0) = \frac{1}{2}d\,.$$

Protože jsou základny AA_0, BB_0 lichoběžníka AA_0B_0B kolmé k přímce r, je i jeho střední příčka SS_0 kolmá k přímce r. Má tedy přímka r od středu S úsečky AB vzdálenost $\frac{1}{2}d$.

K stejnému výsledku dojdeme i v případě, že přímky AA_0, BB_0 splývají. Zřejmě platí o každé přímce vzdálené od bodu S o délku $\frac{1}{2}d$, že součet jejích vzdáleností od bodu A, B je roven d.

Množinu přímek r roviny τ tvoří všechny tečny kružnice $k \equiv (S; \frac{1}{2}d)$. Odtud již snadno odvodíte tvrzení: *Každá rovina ϱ z hledané množiny* **M** *náleží mezi tečné roviny kulové plochy se středem v bodě S a s poloměrem rovným $\frac{1}{2}d$.*

Obráceně platí, že každá tečná rovina kulové plochy $\varkappa$ patří hledané množině **M**; to si můžete ověřit sami.

Jistě byla tato úloha pro vás nová. Doporučujeme vám proto, abyste se pokusili rozřešit obdobnou úlohu pro tři různé body ležící v přímce.

Můžeme vyšetřovat i různé množiny přímek daných vlastností. Pokuste se vyšetřit např. množinu přímek nebo rovin, které mají v prostoru od dvou různých bodů A, B daný poměr vzdáleností.

*

Uvedeme ještě jednu úlohu o geometrických místech bodů, a to příklad jiného typu, než byly dřívější. Představte si nějaké těleso, které se může libovolně pohybovat uvnitř druhého tělesa. Může nás např. zajímat, jakou množinu vyplní při těchto pohybech určitý pevně zvolený bod onoho volně se pohybujícího tělesa. Nebo můžeme studovat množinu bodů, kterou vyplní všechny body pohybujícího se tělesa.

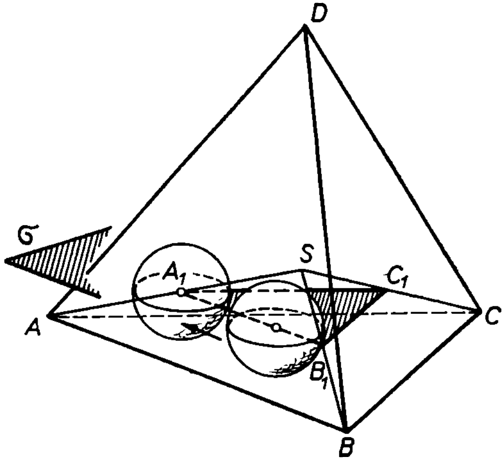
Úloha 22. *Je dán pravidelný dutý čtyřstěn ABCD, jehož hrana má délku a. Uvnitř čtyřstěnu po jeho dně (podstavě ABC) se volně pohybuje kulový míč. Jeho poloměr je menší než poloměr r koule vepsané do daného čtyřstěnu. Máme vyšetřit množinu všech bodů, které může zaujmout střed míče.*

Řešení. Předně si musíme vysvětlit, co bude cílem našeho vyšetřování. Jednak chceme vědět, jaký útvar vyplní střed pohybující se koule, jednak chceme zjistit, jak se dá tento útvar narýsovat, resp. jak se dají vypočítat jeho určující prvky z dané délky a a z poloměru ϱ.

Není těžké uhodnout, že středy míčů, tj. koulí $\varkappa$ o poloměru ϱ se pohybují v rovině σ, která má od roviny ABC

vzdálenost ϱ, a že středy koulí vyplní jistý trojúhelník (obr. 38) ležící v rovině ϱ a uvnitř čtyřstěnu $ABCD$.

Narazí-li míč např. na stěnu ABD, může se podle ní pohybovat stále se jí dotýkaje po jisté úsečce A_1B_1 rov-



Obr. 38

noběžné s hranou AB. Tato názorná představa se zcela zpřesní, užijeme-li místo popisu názorného valení míče matematicky přesného pojmu posunutí koule $\varkappa$ v prostoru ve směru přímky AB. Body dotyku koule $\varkappa$ se stěnami ABC, ABD se potom opravdu posunují v těchto rovinách, neboť se jedná o posunutí ve směru jejich průsečnice. Podobné úvahy platí pro ostatní pobočné stěny čtyřstěnu $ABCD$. Vyplní tedy středy koulí $\varkappa$ jistý trojúhelník $A_1B_1C_1$, jehož strany jsou rovnoběžné s příslušnými stranami trojúhelníka ABC. Proto je trojúhelník $A_1B_1C_1$ rovnostranný.

Představme si nyní míč, který má střed v bodě A_1, potom se kromě podstavy dotýká stěn ABD a ACD. Mysleme si, že míč více nafukujeme (nebo naopak vypouštíme vzduch), přičemž požadujeme, aby se neustále dotýkal uvedených tří stěn. Při nafukování splyne nakonec střed nafouklého míče se středem S koule vepsané čtyřstěnu $ABCD$. Dále jej nelze zvětšovat, protože by se bez deformace do čtyřstěnu nevešel. Při vypuštění veškerého vzduchu změnil by se míč v bod splývající s bodem A. Při těchto změnách se střed proměnlivého míče pohybuje po úsečce AS. Tuto představu můžeme opět zpřesnit, použijeme-li místo ní pojmu prostorové stejnolehlosti o středu A.Obdobnou úvahu lze provést pro ostatní vrcholy B_1, C_1 trojúhelníka $A_1B_1C_1$.

Z toho vyplývá: Body A_1, B_1, C_1 leží na příslušných pobočných hranách AS, BS, CS čtyřstěnu $ABCS$. Trojúhelník $A_1B_1C_1$ je pak řezem tohoto čtyřstěnu s rovinou σ.

Připomeňme ještě jednou: Body A_1, B_1, C_1 leží na polopřímkách SA, SB, SC a přitom je $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel$ $\parallel BC$, $A_1C_1 \parallel AC$. Z toho podobně jako v planimetrii odvodíme, že trojúhelníky ABC, $A_1B_1C_1$ jsou stejnolehlé (prostorově) se středem stejnolehlosti S. Protože roviny $A_1B_1C_1$, ABC mají od bodu S po řadě vzdálenosti $r - \varrho$, r, je poměr této stejnolehlosti $k = \dfrac{r - \varrho}{r}$. Proto, je-li a_1 délka strany trojúhelníku $A_1B_1C_1$, potom je $a_1 = ka =$ $= \dfrac{r - \varrho}{r} a$. Pokuste se vyslovit definici stejnolehlosti v prostoru a odůvodnit nalezený výsledek.

Hledaná množina **M** *středů koulí je tedy rovnostranný trojúhelník, který má stranu* $a_1 = \dfrac{r - \varrho}{r} a$.

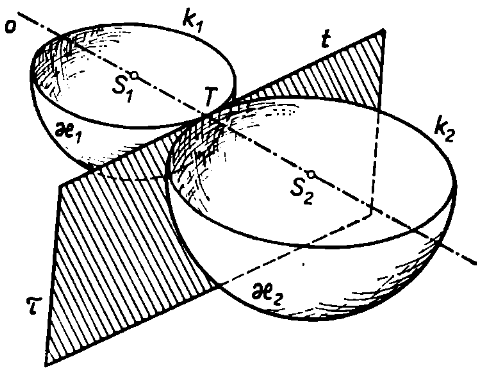
Tím je úloha v podstatě rozřešena. Ale zajímavé je jít ve vyšetřování ještě dále: určit podmínky řešitelnosti a vyjádřit velikost a_1 pouze pomocí poloměru ϱ a velikosti a. Můžete se přesvědčit, že pro ϱ platí podmínka

$$0 < \varrho < \frac{a}{12}\sqrt{6} = r\,.$$

Pro velikost a_1 pak vyjde

$$a_1 = a - 2\varrho\sqrt{6}\,.$$

Řešení uvedeného příkladu bylo do jisté míry jen náznakové. Ukazuje však důležitou věc. Když pátráme po řešení úlohy, nemůžeme se vyhýbat pokusům, dohadům



Obr. 39

a v geometrii ani názoru a měření. Ovšem výsledek, který takto získáme, musíme vždy dokázat.

★

Prozatím jsme v našich úlohách studovali jedinou kouli nebo kulovou plochu. Všimněme si na ukázku alespoň jednoho příkladu, kde půjde o vzájemnou polohu dvou kulových ploch. Představme si v libovolné rovině ϱ dvě kružnice k_1, k_2 dotýkající se vně v bodě T. Budou-li se tyto kružnice otáčet kolem své osy o, vzniknou dvě kulové plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ (obr. 39), které mají jediný společný bod T; říkáme, že *se dotýkají v bodě* T. Jejich společná tečna rovina τ vznikne rotací společné tečny t kružnic k_1, k_2. Máme-li naopak dvě kulové plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ dotýkající se vně v bodě T a protneme je rovinou procházející jejich osou, dostaneme dvě kružnice k_1, k_2 dotýkající se také vně v bodě T.

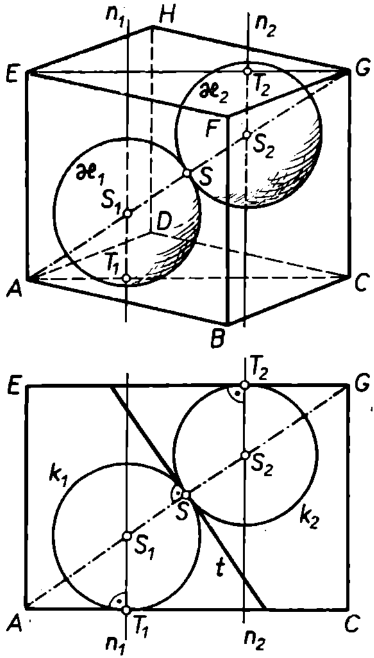
Podle toho na základě vzájemné polohy dvou kružnic v rovině můžete sami provést úplnou klasifikaci vzájemné polohy dvou kulových ploch.

Úloha 23. *V krabici tvaru krychle mají být umístěny dva dotýkající se stejně velké míče o průměru d. Jeden z nich se má dotýkat dna a dvou sousedních pobočných stěn, druhý víka krabice a zbývajících pobočných stěn. Máme určit početně i konstruktivně rozměr krabice.*

Řešení. Krabice nechť je krychle $ABCDEFGH$. Snadno uhodneme, že středy S_1, S_2 uvažovaných kulových ploch $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ (míčů) budou ležet na některé tělesové úhlopříčce krychle $ABCDEFGH$, např. na úhlopříčce AG (obr. 40a).*) To plyne z toho, že kulové plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ se dotýkají po řadě každá tří stěn o společném vrcholu A, resp. G, které jsou souměrně sdružené podle středu S krychle. Odtud také vyplývá, že plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ se v bodě S dotýkají.

Bod dotyku T_1 kulové plochy $\varkappa_1$ s podstavou $ABCD$ krychle leží na kolmici n_1 vedené středem S_1 k rovině $ABCD$. Podobně bod dotyku T_2 kulové plochy $\varkappa_2$ s pod-

*) Pokuste se tento fakt dokázat.



Obr. 40ab

stavou *EFGH* leží na kolmici n_2 vedené z bodu S_2 k rovině *EFGH*. Přímky n_1, n_2 leží v rovině $\varrho \equiv ACGE$ úhlopříčného řezu krychle. Protneme-li nyní naši skupinu těles rovinou ϱ, převedeme úlohu 23 na úlohu planimetrickou v rovině ϱ. Rovina ϱ protne krychli v obdélníku *ACGE* se středem *S* a kulové plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ve shodných hlavních kružnicích k_1, k_2, které se v bodě *S* vně dotýkají (obr. 40b). Kružnice k_1 se dále dotýká přímky *AC* v bodě T_1 a kružnice k_2 přímky *EG* v bodě T_2. Naše úloha se tak převádí na určení velikosti *a* kratší strany obdélníka *ACGE* ze vztahů patrných z obr. 40b. Protože je trojúhelník AT_1S_1 podobný trojúhelníku *ACG* (podle věty u u), platí

$$AS_1 = S_1T_1 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} d \cdot \sqrt{3}\,.$$

Jsou-li tedy dány kružnice k_1, k_2, dovedeme sestrojit úhlopříčku *AG* obdélníka *ACGE* a tím i tento obdélník.

Zbývá vypočíst délku strany $AE = a$. Velikost úhlopříčky AG můžeme vyjádřit dvojím způsobem, pomocí průměru d a pomocí a takto:

$$AG = 2(AS_1 + S_1S) = 2\left(\frac{1}{2}d\sqrt{3} + \frac{1}{2}d\right) = d(\sqrt{3} + 1),$$

$$AG = a \cdot \sqrt{3}. \qquad (2)$$

Odtud již snadno vypočteme

$$a = \frac{1}{3}d(3 + \sqrt{3}). \qquad (3)$$

Nyní je třeba ještě ukázat, že lze do krychle o hraně $a = \frac{1}{2}d(3 + \sqrt{3})$ umístit výše uvedeným způsobem dvě kulové plochy o průměru d, tj. provést zkoušku správnosti našeho řešení. Postupem, jehož jsme výše použili, zjistíme: Jestliže jsou v krychli o hraně a uloženy požadovaným způsobem dvě shodné koule, pak lze určit jejich poloměr d' ze vztahů obdobných vztahům (2). Snadno pak vypočteme, že

$$d' = \frac{1}{2}a(3 - \sqrt{3}).$$

Dosadíme-li za a ze vzorce (3), vyjde opravdu $d' = d$.

Úlohu 23 můžeme různě obměňovat. Můžeme měnit tvar krabice, počet míčů i jejich poloměry apod. Učiníme-li předem úmluvu, jak mají být koule rozmístěny, nečiní obyčejně řešení příslušné úlohy velkých potíží. Často také uhodneme i nejvýhodnější způsob uložení koulí, při kterém má krabice daného tvaru nejmenší rozměry. Důkazy však bývají mnohem obtížnější.

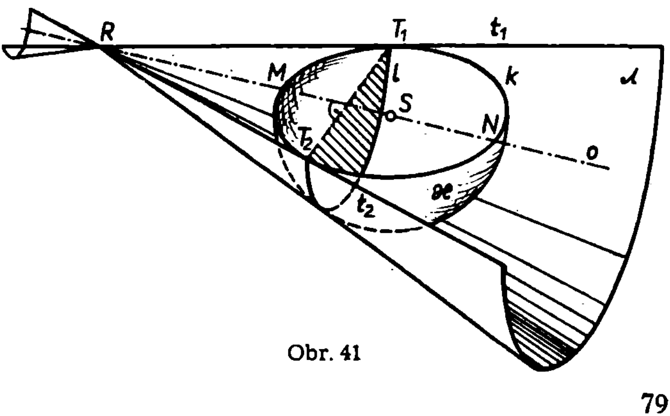
*

V předcházejících úlohách jsme dosud nevěnovali pozornost vzájemné poloze *přímky* a kulové plochy. Povšimneme si jednoho případu — kulové plochy a její tečny.

Tečna kulové plochy je přímka, která má s kulovou plochou jediný společný bod (bod dotyku).

Představte si dále kružnici k a její tečny t_1, t_2. s body dotyku T_1, T_2, vedené libovolným bodem R, který leží v rovině kružnice k. Víme, že délky tečen t_1, t_2, tj. velikosti úseček RT_1, RT_2 jsou si rovny. Přímka $o \equiv RS$ je osou úhlu $\sphericalangle\, T_1RT_2$. Necháme-li tento útvar otáčet kolem přímky o, vznikne otáčením kružnice k kulová plocha $\varkappa$. Přímky t_1, t_2 vyplní při tomto pohybu rotační kuželovou plochu λ, plochu tečen kulové plochy $\varkappa$, které jsou k ní vedeny z bodu R (obr. 41). Kuželová plocha λ se dotýká kulové plochy $\varkappa$ podél kružnice l, která vznikne otáčením bodů T_1, T_2 kolem osy o. Délky všech tečen z bodu R ke kulové ploše $\varkappa$ jsou si zřejmě rovny.

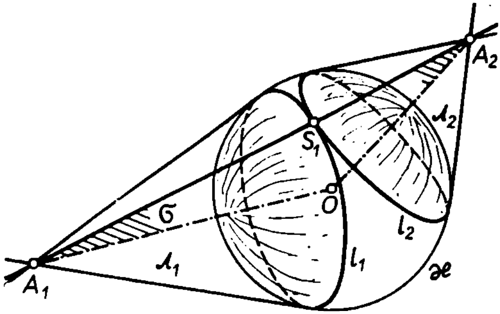
Úloha 24. *Na Zemi jsou čtyři pozorovací stanice S_1, S_2, S_3, S_4. Bod S_1 je v daném okamžiku jediné místo na Zemi, z kterého můžeme (teoreticky) pozorovat současně družice A_1, A_2. Tutéž vlastnost má v témže okamžiku bod S_2 a družice A_2, A_3, dále bod S_3 a družice A_3, A_4 a konečně bod S_4*



Obr. 41

a družice A_4, A_1. Máme dokázat, že body S_1, S_2, S_3, S_4 leží na kružnici. (Zemi pokládáme za kouli.)

Řešení. Předně si musíme uvědomit vzájemné polohy jednotlivých stanic a příslušných dvojic družic. Např. družici A_1 je vidět ze všech míst přivrácené části povrchu

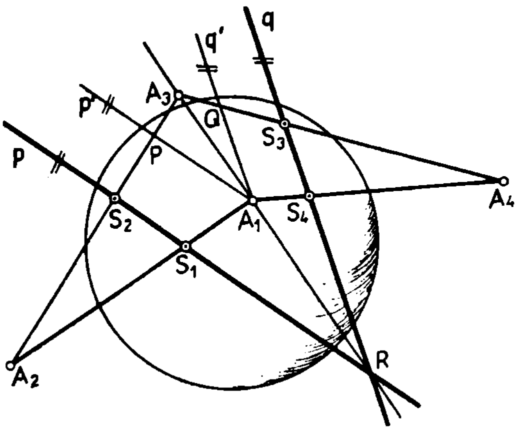


Obr. 42

Země, která je omezena dotykovou kružnicí l_1 kuželové plochy λ_1 tečen vedených z bodu A_1 k povrchu Země (obr. 42). Tato část kulové plochy je určitý *kulový vrchlík.* V případě, který je nakreslen v obr. 41, mohou např. vzniknout dva vrchlíky otáčením oblouků T_1MT_2 a T_1NT_2 kolem přímky o.

Podobně družice A_2 je viditelná z vrchlíku, který je omezen dotykovou kružnicí l_2 kuželové plochy λ_2 tečen vedených z bodu A_2 k povrchu Země (obr. 42). Oba zmíněné vrchlíky musí mít podle podmínky úlohy jediný společný bod S_1. To může nastat pouze v případě, že kružnice l_1, l_2 mají jediný společný bod — totiž bod S_1. Rovina $\sigma \equiv$ $\equiv A_1A_2O$, kde O je střed kulové plochy $\varkappa$, je společnou rovinou souměrnosti kuželových ploch λ_1, λ_2 i kulové plochy $\varkappa$. Kdyby bod S_1 ležel mimo rovinu σ, ležel by bod S_1' souměrně sdružený s S_1 podle σ jak na kulové ploše $\varkappa$, tak na kuželových plochách λ_1, λ_2, a tedy i na kružnicích l_1, l_2. Tyto kružnice by pak měly společné *dva* body S_1, S_1'. Dokázali jsme tedy, že bod S_1 leží v rovině σ.

Přímky A_1S_1, A_2S_1 jsou tečny kulové plochy v bodě S_1 a přitom leží v téže rovině σ; proto splynou, tj. body A_1, A_2, S_1 leží v přímce.



Obr. 43

Vzhledem k tomu můžeme formulovat úlohu 24 geometricky takto (obr. 43): *Je dána kulová plocha $\varkappa$, které se dotýkají úsečky A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1* pořadě v bodech S_1, S_2, S_3, S_4. Máme dokázat, že tyto body leží na kružnici.

Protože body S_1, S_2, S_3, S_4 leží na kulové ploše, stačí o nich dokázat, že leží v jedné rovině. K tomu opět stačí dokázat, že přímky $p \equiv S_1S_2$, $q \equiv S_3S_4$ jsou buď rovnoběžné nebo různoběžné. To dokážeme takto:

Protože jsou si rovny délky všech tečen vedených z bodu A_1 ke kulové ploše, můžeme zavést označení: $A_1S_1 = A_1S_4 = u$; a obdobně $A_2S_1 = A_2S_2 = v$; $A_3S_2 = A_3S_3 = x$; $A_4S_3 = A_4S_4 = y$. Veďme bodem A_1 rovnoběžky p', q' s přímkami $p \equiv S_1S_2$, $q \equiv S_3S_4$ (obr. 43). Označme $P \equiv p'.A_2A_3$, $Q \equiv q'.A_3A_4$. Z podobných trojúhelníků $A_2S_1S_2$, A_2A_1P plyne $PS_2 = A_1S_1 = u$. Obdobně odvodíme $QS_3 = A_1S_4 = u$. Je-li $u = x$, splynou P, Q s bodem A_3. Potom však snadno zjistíme, že $q \parallel p$.

Je-li $u \neq x$, jsou body P, Q, A_3 navzájem různé. Pak stejnolehlost se středem A_3 převádějící přímku q' v přímku q má týž koeficient k jako stejnolehlost se středem A_3 převádějící přímku p' v přímku p. (Jak pro $x > u$, tak pro $x < u$, je $k = \dfrac{x - u}{x}$. Přesvědčte se!). Je tedy obrazem bodu A_1 v obou stejnolehlostech týž bod R, kterým procházejí i přímky p, q. Tím je náš úkol vyřešen.