6. Transformace na přelomu 19. a 20. století

Jednotná klasifikace všech známých geometrií vyložená v Erlangenském programu do jisté míry přispěla k odhalení obecnějších geometrických zákonitostí, jež stojí v pozadí moderní matematické vědy, a otevřela cestu k položení axiomatických základů geometrie. Ačkoliv se Felix Klein k axiomaticky budované moderní matematice počátku 20. století i k jejímu množinovému pojetí stavěl velmi rezervovaně, stal se nevědomky jedním z iniciátorů nového přístupu k základům geometrie. Intuitivní přístup založený převážně na syntetické geometrii byl postupně nahrazován moderním, formalizovaným způsobem argumentace a zdůvodňování, názorné geometrické představy zastínila abstraktní axiomatika.

F. Klein svůj názor na užití axiomatické metody v matematice vyjádřil např. ve svém díle *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* [K9]. V návaznosti na axiomatickou definici grupy napsal:

> *Diese abstrakte Formulierung ist für die Ausarbeitung der Beweise vortrefflich, sie eignet sich aber durchaus nicht zum Auffinden neuer Ideen und Methoden, sondern sie stellt vielmehr den Abschluß einer voraufgegangenen Entwicklung dar.* ([K9], Teil I, str. 335–336)

Abstraktní vymezení nových pojmů pomocí axiomů, které tyto pojmy splňují, jsou podle něj sice vhodné pro důkazy, nikoliv však pro objev nových myšlenek a metod.

F. Klein na druhou stranu dovedl uznat zásluhy axiomatického přístupu, ale pouze v případě, že axiomy přirozeně vyplynuly jako logická podstata již rozvinuté matematické teorie. Ostře se však ohrazoval proti názoru, že axiomy jsou libovolná tvrzení, která zvolíme za základ matematické teorie. Tento přístup pokládal za čistě filozofický pohled mající kořeny v nominalismu,[1] označil jej za *der Tod aller Wissenschaft*. Zdůrazňoval, že základními axiomy geometrie nemohou být zcela libovolná tvrzení, jejich přesný obsah musí být vhodně vyvozen z vlastností geometrického prostoru. Doložme Kleinův přístup k axiomům dvěma krátkými úryvky z druhého dílu jeho knihy *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* [K7]:

> *Demgegenüber findet man bei solchen Leuten, die sich nur für die logische und nicht für die anschauliche oder die allgemein-erkenntnistheoretische Seite der Sache interessieren, neuerdings häufig die Meinung, die Axiome seien nur willkürliche Sätze, die wir ganz freiwillig anerkennen, und die Grundbegriffe schließlich ebenso nur willkürliche Zeichen für Dinge, mit denen wir operieren wollen. . . .*

[1] Nominalismus byl vedle realismu jedním ze dvou základních filozofických směrů středověku. Prosazoval názor, že obecné pojmy jsou pouhá jména, která na základě poznání vytváří člověk, že reálně existují pouze jednotlivé věci se svými individuálními vlastnostmi. Nejznámějším představitelem nominalismu byl anglický františkán William Occam (1290–1349).

Ich selbst teile diesen Standpunkt keineswegs, sondern halte ihn für den Tod aller Wissenschaft: die Axiome der Geometrie sind – wie ich meine – nicht willkürliche, sondern vernünftige Sätze, die im allgemeinen durch die Raumanschauung veranlaßt und in ihrem Einzelinhalt und Reihenfolge durch Zweckmäßigkeitsgründe reguliert werden.
([K7], str. 383–384)

6.1 Axiomatický systém

Axiomatický systém je ve své podobě obsažen již v Eukleidových *Základech*. Brzy po jejich sepsání však byly zjištěny určité nedostatky v jejich logické struktuře. Problematické jsou již úvodní definice (*výměry*) základních geometrických pojmů. Eukleidés se totiž domníval, že pojmy jako *bod*, *přímka* a *rovina* lze jednoduše „definovat“ pouze na základě geometrické intuice.[2] Každý matematický pojem však musí být definován pomocí jiných matematických pojmů, které je rovněž potřeba přesně definovat pomocí dalších pojmů atd. Všechny matematické pojmy není proto možné explicitně definovat, aniž bychom se vyhnuli definicím kruhem nebo budovali „nekonečný“ řetězec definic. Na začátku je třeba zvolit skupinu základních (primitivních) nedefinovaných pojmů, jejichž význam je intuitivně zřejmý, a další matematické pojmy již pomocí nich přesně definovat. Přitom volba základních pojmů není jednoznačná. Postuláty a axiomy potom představují tvrzení o základních pojmech, jejichž platnost se předpokládá a která specifikují vlastnosti zvolených pojmů. Z tohoto hlediska se základní matematické pojmy axiomatického systému definují implicitně pomocí postulátů a axiomů, které tyto pojmy splňují.

Za axiomy však nelze zvolit zcela libovolná tvrzení týkající se základních pojmů. Axiomatický systém musí být logicky konzistentní, musí splňovat následující požadavky: musí být *úplný*, *nezávislý* a *bezesporný*. V úplném axiomatickém systému je každé tvrzení rozhodnutelné, tj. lze jednoznačně určit, zda v rámci uvažovaného systému je dané tvrzení pravdivé či nikoliv. Není možné do systému axiomů přidat další axiom, který je s nimi konzistentní a je na daných axiomech nezávislý. Nezávislost skupiny axiomů znamená, že žádný z uvažovaných axiomů nelze vyvodit z ostatních. V opačném případě by byla formulace takového tvrzení jako axiomu nadbytečná, byl by logickým důsledkem ostatních axiomů. Bezespornost axiomatického systému zaručuje, že v rámci takového systému nelze současně odvodit nějaké tvrzení i jeho negaci.

Dalším slabým místem Eukleidových *Základů* je skutečnost, že některé předpoklady využívané při důkazech tvrzení nejsou v textu explicitně uvedeny, vycházejí pouze z geometrické intuice. Např. první postulát[3] uvádí, že existuje alespoň jedna přímka jdoucí dvěma různými body, neříká již však, že taková přímka

[2] Eukleidés ve svých *Základech* definoval bod, přímku a rovinu následujícím způsobem: *Bod jest, co nemá dílu. Čára pak délka bez šířky. Hranicemi čáry jsou body. Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně. Plocha jest, co jen délku a šířku má. Hranicemi plochy jsou čáry. Rovinná jest plocha (rovina), která přímkami na ní jsoucími prostírá se rovně.* Viz [Eu], str. 1. Je třeba poznamenat, že Eukleidés „přímkou“ rozuměl v dnešním smyslu úsečku, podobně „rovinu“ chápal pouze jako omezenou část rovinné plochy.

[3] *Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.* Viz [Eu], str. 2.

existuje právě jedna. Přitom Eukleidés ve svých důkazech často předpokládal existenci jediné přímky s uvedenou vlastností.

Kritiku Eukleidova systému definic, postulátů a axiomů (*výměry*, *úkoly prvotné* a *zásady*) lze nalézt již u nejstarších známých komentátorů *Základů*, jimiž byli Pappos z Alexandrie (asi 290–350) a Proklos (410–485)[4]. Na nedostatky pak během dalšího vývoje podle [Kl] upozorňovali i mnozí další. Francouzský matematik a básník Jacques Peletier du Mans (1517–1582) kritizoval Eukleidovy důkazy vět o shodnosti. Německý filozof Arthur Schopenhauer (1788–1860) poukazoval na sedmý Eukleidův axiom,[5] podle něhož objekty, které se navzájem kryjí, jsou shodné. Namítal, že kryjící se objekty jsou podle naší empirické zkušenosti identické, uvedený axiom proto považoval za nadbytečný. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) zastával názor, že Eukleidés se spolehl na intuici, když v první knize při řešení úlohy I[6] využil skrytý předpoklad, že dvě kružnice, z nichž každá prochází středem druhé, se protínají. Své připomínky k Eukleidovým *Základům* vyjádřil i Carl Friedrich Gauss (1777–1855), jenž v práci postrádal přesné vymezení relace uspořádání bodů na přímce; kritizoval rovněž definice přímky a roviny. Dnes je navíc zřejmé, že Eukleidovy axiomy na druhou stranu umožňují i „důkazy“ některých nepravdivých tvrzení,[7] neboť přesně neurčují polohu určitých bodů vzhledem k ostatním. Americký historik matematiky Morris Kline (1908–1992) ve své knize [Kl] v této souvislosti napsal:

> *Euclidean geometry was supposed to have offered accurate proofs of theorems suggested intuitively by figures, but actually it offered intuitive proofs of accurately drawn figures.* ([Kl], volume 3, str. 1007)

Přes všechny výše uvedené výtky a nedostatky byly Eukleidovy *Základy* po dlouhá staletí považovány za model rigorózního způsobu dokazování a dedukce. Teprve koncem 19. století si matematici začali plně uvědomovat rozsah nedostatků v Eukleidově systému. V souvislosti s rozvojem neeukleidovských geometrií, jejichž logická konzistence byla tehdy již spolehlivě prokázána, vyvstala potřeba geometrický systém nastolený Eukleidem revidovat a přepracovat.

První myšlenky axiomatického přístupu v geometrii zformuloval Moritz Pasch a poté systematicky rozvinul David Hilbert; jim bude věnována pozornost v následujícím textu. Podle [Ev1] další uspokojivé systémy axiomů eukleidovské geometrie představili např. italští matematici Giuseppe Peano[8] a Mario Pieri[9] a dále

[4] Viz Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Translated, with Introduction and Notes, by Glenn R. Morrow, With a new foreword by Ian Mueller, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1992, 355 stran.

[5] *A co se navzájem kryje, navzájem rovno jest.* Viz [Eu], str. 2.

[6] *Na dané přímce omezené postav trojúhelník rovnostranný.* Viz [Eu], str. 3.

[7] Např. důkaz tvrzení, že všechny trojúhelníky jsou rovnostranné. Viz [Kl], volume 3, str. 1006–1007.

[8] Giuseppe Peano (1858–1932) pracoval se základními pojmy *bod*, *úsečka* a *pohyb*. Viz Peano G., *I principii di geometria logicamente esposti*, Fratelli Bocca Editori, Stabilimento Tipografico Vincenzo Bona, Torino, 1889, 40 stran; *Sui fondamenti della Geometria*, Rivista di matematica 4(1894), 51–90.

[9] Mario Pieri (1860–1913) vypracoval systém 20 axiomů, za základní zvolil pojmy *bod* a *pohyb*. Viz Pieri M., *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Monografia del punto*

američtí matematici Oswald Veblen[10] a Edward V. Huntington[11]. Základům geometrie se ve své práci věnoval i italský matematik Giuseppe Veronese.[12]

6.2 Moritz Pasch

Moritz Pasch se narodil 8. listopadu 1843 v rodině obchodníka v Breslau (Wrocław, Vratislav). Vystudoval zde gymnázium a roku 1860 nastoupil na místní univerzitu. Nejprve zamýšlel studovat chemii, posléze si však za svůj studijní obor zvolil matematiku. Roku 1865 obhájil na univerzitě disertační práci *De duarum sectionem conicarum in circulos projectione* sepsanou pod vedením Heinricha E. Schrötera (1829–1892) a získal doktorát. Poté odjel studovat na univerzitu do Berlína, kde v té době působili Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) a Leopold Kronecker (1823–1891). V říjnu 1866 mu však zemřel otec, a proto M. Pasch na krátký čas své studium přerušil a vrátil se domů.

V listopadu 1870 předložil na univerzitě Giessenu svou habilitační práci *Zur Theorie der Komplexe und Kongruenzen von Geraden* a začal zde přednášet. V srpnu 1873 byl jmenován mimořádným profesorem a o dva roky později řádným profesorem. M. Pasch se na univerzitě kromě výzkumných aktivit zapojil i do výuky budoucích středoškolských učitelů, byl předsedou komise pro zkoušky učitelské způsobilosti. V akademickém roce 1885/86 byl zvolen děkanem filozofické fakulty, v akademickém roce 1893/94 působil na univerzitě jako rektor. Vychoval kolem 30 doktorandů. V dubnu 1911 svou činnost na univerzitě ukončil, neboť se chtěl věnovat pouze matematickému bádání. V roce 1923 obdržel u příležitosti svých osmdesátých narozenin dva čestné doktoráty univerzit ve Freiburgu a ve Frankfurtu. Moritz Pasch zemřel 20. září 1930 na dovolené v lázních Homburg v Německu.[13]

M. Pasch se zpočátku zabýval algebraickou geometrií, poté začal zkoumat základy geometrie a matematické analýzy. Kromě řady matematických článků[14]

---

e del moto, Memorie della reale Accademia delle scienze di Torino 49(1900), 173–222. M. Pieri pohyb chápal (v dnešní terminologii) jako vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech bodů na sebe, splňující další podmínky. Viz [Č2], str. 196.

[10] Oswald Veblen (1880–1960) sestavil systém 16 axiomů s primitivními pojmy *bod* a *relace uspořádání*. Viz Veblen O., *A system of axioms for geometry*, Transactions of the American Mathematical Society 5(1904), 343–384.

[11] Edward V. Huntington (1874–1952) ve svém systému 23 axiomů uvažoval základní pojmy *sféra* a *relace inkluze*. Viz [Ev1], str. 457.

[12] Giuseppe Veronese (1854–1917) pracoval s nedefinovanými pojmy *přímka*, *úsečka* a *shodnost úseček*. Viz Veronese G., *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Lezioni per la scuola di magistero in matematica, Tipografia del Seminario, Padova, 1891, 630 stran.

[13] O životě a díle M. Pasche viz Engel F., Dehn M., *Moritz Pasch*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 44(1934), 120–142. Relevantní informace poskytuje i webová stránka http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/∼history/Biographies/Pasch.html.

[14] Můžeme uvést např. následující články: Pasch M., *Der Ursprung des Zahlbegriffs*, Mathematische Zeitschrift 11(1921), 124–156; *Über zentrische Kollineation*, Mathematische Annalen 90(1923), 103–107; *Betrachtungen zur Begründung der Mathematik*, Mathematische Zeitschrift 20(1924), 231–240; *Die natürliche Geometrie*, Mathematische Zeitschrift 21(1924), 151–153.

publikoval tři významné monografie: *Vorlesungen über neuere Geometrie*,[15] *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*[16] a *Grundlagen der Analysis*[17]. Jeho jméno je dnes v matematice spojeno s formulací tzv. *Paschova axiomu*, podle kterého přímka protínající stranu AB trojúhelníku ABC ve vnitřním bodě musí nutně protnout ještě jednu jeho další stranu ve vnitřním bodě, pokud neprochází vrcholem C.

Obr. 41: Moritz Pasch

M. Pasch významně přispěl k rozvoji axiomatického přístupu v geometrii, jenž stojí v pozadí moderní matematiky 20. století. Od dob Eukleida byl prvním matematikem, který geometrii budoval na základě formálně zvolených abstraktních axiomů. Odstranil přitom výše zmíněný významný nedostatek Eukleidova axiomatického systému týkající se volby základních, nedefinovaných pojmů.

Vorlesungen über neuere Geometrie

Roku 1882 publikoval M. Pasch knihu *Vorlesungen über neuere Geometrie* [P1], jejímž cílem bylo položit základy projektivní geometrie nezávislé na Eukleidově axiomu o rovnoběžkách.[18] Omezil se na čistě formální axiomatický přístup nezávislý na fyzikální interpretaci matematických pojmů. Poukázal na skutečnost, že řada geometrů ve svých úvahách příliš spoléhá na fyzikální intuici, ve skutečnosti je však geometrie (včetně eukleidovské) pouze umělou konstrukcí, která má nějaký vztah k našemu fyzikálnímu prostoru, nicméně není jeho přesnou reprezentací. Uvedl, že např. princip duality je v rozporu s našimi fyzikálními představami o bodech a přímkách; záměnnost těchto pojmů nelze přijmout na základě intuice.

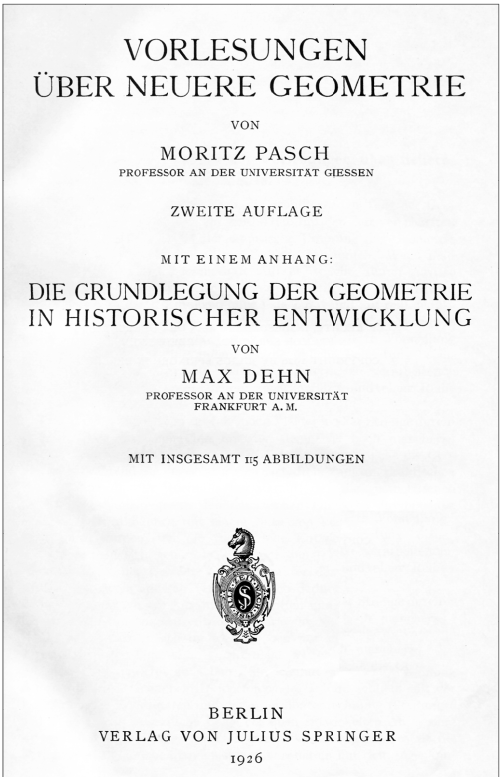
[15] Viz Pasch M., *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1882, 201 stran.

[16] Viz Pasch M., *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1882, 188 stran.

[17] Viz Pasch M., *Grundlagen der Analysis*, ausgearbeitet unter Mitwirkung von Clemens Thaer, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1909, 140 stran.

[18] Některé axiomy projektivní geometrie nebo jejich analogie však měly význam rovněž pro axiomatizaci eukleidovské i neeukleidovských geometrií.

M. Pasch ve své práci zvolil za základní pojmy následující prvky geometrie: *bod*, *úsečka* a *část roviny*.[19] Volbu posledních dvou pojmů namísto pojmů *přímka* a *rovina* zdůvodnil tím, že nikdo vlastně nemá s celou přímkou a celou rovinou žádnou zkušenost. Axiomy nepovažoval jako řada jeho předchůdců za „samozřejmé pravdy“, ale za tvrzení o nedefinovaných pojmech, která sice mohou vycházet z naší zkušenosti s fyzikální realitou, ale pokud je jednou zvolíme, všechny důkazy dalších tvrzení z nich musí vyplývat bez dalšího odvolávání se na naši zkušenost. Byl prvním matematikem, jenž poukázal na skutečnost, že Eukleidés ve svých důkazech využíval vlastnosti uspořádání, aniž by se o nich někde zmínil. Sám proto ve své knize nejprve implicitně zavedl relaci uspořádání pro kolineární body[20] a poté zformuloval vlastnosti uspořádání, které jsou dnes základem každé metrické geometrie.


VORLESUNGEN
ÜBER NEUERE GEOMETRIE

VON

MORITZ PASCH
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GIESSEN

ZWEITE AUFLAGE

MIT EINEM ANHANG:

DIE GRUNDLEGUNG DER GEOMETRIE
IN HISTORISCHER ENTWICKLUNG

VON

MAX DEHN
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
FRANKFURT A. M.

MIT INSGESAMT 115 ABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1926

Obr. 42: Moritz Pasch – *Vorlesungen über neuere Geometrie*

[19] M. Pasch v prvním vydání své knihy z roku 1882 mezi základní pojmy zařadil rovněž *shodnost úseček*.

[20] *Wir ziehen zunächst nur eine einzige Gerade in Betracht. Sind A, B, C Punkte einer Geraden g, also C in der Geraden AB gelegen, so bilden die drei Punkte eine gerade Reihe, d. h. es liegt entweder A innerhalb der Strecke BC, oder B innerhalb der Strecke AC, oder C innerhalb der Strecke AB. Liegt etwa C innerhalb der Strecke AB, so sagt man: Der Punkt C liegt in der Geraden g zwichen A und B, A und C auf derselben Seite von B, B und C auf derselben Seite von A, A und B auf verschiedenen Seiten von C.* Viz [P1], str. 9.

Definice a axiomy shodnosti

M. Pasch ve své knize *Vorlesungen über neuere Geometrie* [P1] zavedl pojem shodnosti následujícím způsobem. Pro jednoduchost uvažoval nejprve dvojice pevně svázaných bodů $a\,b$ a $a'\,b'$. Přitom se omezil na geometrické útvary, které se skládají pouze z vlastních bodů. Dva útvary $a\,b$ a $a'\,b'$ (v tomto případě úsečky) nazval shodnými, pokud je oba lze „překrýt“ stejným, vzhledem k daným útvarům pohyblivým, třetím útvarem:

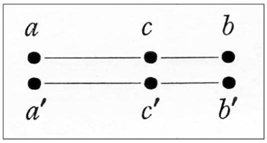
> *Sehen wir jetzt ganz davon ab, ob die Figuren $a\,b$ und $a'\,b'$ gegen einander beweglich sind oder nicht. Ich kann jedenfalls eine Figur herstellen, welche gegen jene beiden Figuren beweglich ist und mit der einen zum Decken gebracht werden kann. Ist es möglich, eine und dieselbe Figur sowohl mit $a\,b$ als auch mit $a'\,b'$ zum Decken zu bringen, so heissen die Figuren $a\,b$ und $a'\,b'$ congruent.* ([P1], str. 102)

V dalším textu pro shodnost útvarů zformuloval těchto deset axiomů:[21]

I. *Die Figuren $a\,b$ und $b\,a$ sind congruent.*

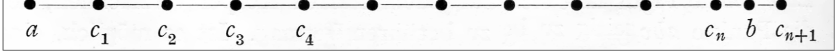
II. *Zur Figur $a\,b\,c$ kann man einen und nur einen eigentlichen Punkt b' derart hinzufügen, dass $a\,b$ und $a\,b'$ congruente Figuren werden und b' in der geraden Strecke $a\,c$ oder c in der geraden Strecke $a\,b'$ liegt.*

III. *Liegt der Punkt c innerhalb der geraden Strecke $a\,b$, und sind die Figuren $a\,b\,c$ und $a'\,b'\,c'$ congruent, so liegt der Punkt c' innerhalb der geraden Strecke $a'\,b'$.*



Obr. 43: III. Grundsatz ([P1], str. 105)

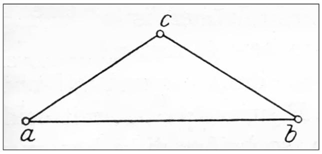
IV. *Liegt der Punkt c_1 innerhalb der geraden Strecke $a\,b$, und verlängert man die Strecke $a\,c_1$ um die congruente Strecke $c_1\,c_2$, diese um die congruente Strecke $c_2\,c_3$ u. s. f., so gelangt man stets zu einer Strecke $c_n\,c_{n+1}$, welche den Punkt b enthält.*



Obr. 44: IV. Grundsatz ([P1], str. 105)

[21] M. Pasch tyto axiomy v prvním vydání své knihy z roku 1882 i ve druhém, dodatky opatřeném vydání z roku 1912 označil jako *I. Grundsatz* až *X. Grundsatz*, v dalším vydání z roku 1926 je označil jako *I. Kernsatz* až *X. Kernsatz*. Citace viz [P1], 1882, str. 103–110.

V. *Wenn in der Figur a b c die Strecken a c und b c congruent sind, so sind die Figuren a b c und b a c congruent.*



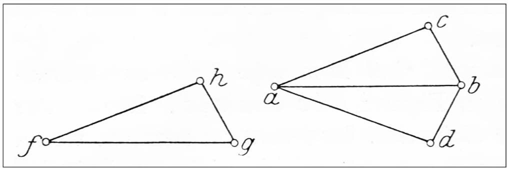
Obr. 45: V. Grundsatz ([P1], str. 106)

VI. *Wenn zwei Figuren congruent sind, so sind auch ihre homologen Theile*[22] *congruent.*

VII. *Wenn zwei Figuren einer dritten congruent sind, so sind sie einander congruent.*

VIII. *Wird von zwei congruenten Figuren die eine um einen eigentlichen Punkt erweitert, so kann man die andere um einen eigentlichen Punkt so erweitern, dass die erweiterten Figuren wieder congruent sind.*

IX. *Sind zwei Figuren a b und f g h gegeben, f g h nicht in einer geraden Strecke enthalten, a b und f g congruent, und wird durch a und b eine ebene Fläche gelegt, so kann man in dieser oder in ihrer Erweiterung genau zwei Punkte c und d so angeben, dass die Figuren a b c und a b d der Figur f g h congruent sind, und zwar hat die Strecke c d mit der Strecke a b oder deren Verlängerung einen Punkt gemein.*



Obr. 46: IX. Grundsatz ([P1], str. 109)

X. *Zwei Figuren a b c d und a b c e, deren Punkte nicht in ebenen Flächen liegen, sind nicht congruent.*

Uvedené axiomy popisují základní vlastnosti shodných útvarů. Mimo jiné je v nich implicitně obsaženo tvrzení, že relace shodnosti je ekvivalencí; reflexivnost plyne přímo z definice shodnosti, symetrii a tranzitivnost shodnosti zahrnují axiomy I. a VII. Axiom III. dokládá, že shodnost zachovává uspořádání kolineárních bodů. Znění axiomu IV. je dnes známo jako tzv. *Archimédův axiom.* Podle axiomu IX. existují v rovině právě dvě shodnosti (přímá a nepřímá), které daný trojúhelník zobrazí na trojúhelník s ním shodný, je-li předepsán obraz jedné jeho strany. Axiom X. vyplývá ze skutečnosti, že M. Pasch rozlišoval mezi „pravotočivou“ a „levotočivou bází“.

[22] M. Pasch termínem *die homologen Theile* označoval odpovídající si části dvou shodných útvarů.

6.3 David Hilbert

David Hilbert byl významným německým matematikem a filozofem. Narodil se 23. ledna 1862 v Königsbergu (Kaliningrad, Královec). V roce 1872 nastoupil na Friedrichskolleg Gymnasium, středoškolské studium však zakončil na vědečtěji zaměřeném Wilhelm Gymnasium, na něž přestoupil v roce 1879. Na podzim roku 1880 začal studovat na univerzitě v Königsbergu, kde navázal přátelství a spolupráci s Hermannem Minkowskim (1864–1909) a později i s Adolfem Hurwitzem (1859–1919), jenž na univerzitě působil od roku 1884 jako mimořádný profesor. Pod vedením Ferdinanda von Lindemanna (1852–1939) sepsal D. Hilbert disertační práci nazvanou *Über invariante Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen*, za niž mu byl roku 1885 udělen doktorát. V letech 1886 až 1892 působil na univerzitě jako soukromý docent, v roce 1893 jako mimořádný profesor a v letech 1893 až 1895 jako řádný profesor.

V roce 1895 přešel D. Hilbert na Kleinův podnět na katedru matematiky na univerzitu v Göttingen,[23] na tehdejší nejlepší matematický ústav na světě, kde působil po celý zbytek své aktivní kariéry. V letech 1902 až 1939 byl editorem časopisu *Mathematische Annalen*. D. Hilbert zemřel 14. února 1943 v Göttingen.[24]

Obr. 47: David Hilbert

[23] Uveďme pro úplnost, že Felix Klein o Hilbertův přechod na univerzitu v Göttingen neúspěšně usiloval již v roce 1892, když se na katedře matematiky uvolnilo místo po Hermannu A. Schwarzovi (1843–1921), který v tomto roce přesídlil do Berlína. Na volné místo na univerzitě v Göttingen byl tehdy přijat Heinrich Weber (1842–1913), jenž o tři roky později přešel do Strasbourgu.

[24] O Hilbertově životě viz [Ja], str. 246–257; [WA], str. 500–513. Relevantní informace poskytuje i webová stránka http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hilbert.html. Dále viz Blumenthal O., *David Hilbert*, Die Naturwissenschaften 10(1922), 67–72; Reid C., *Hilbert*, Springer-Verlag, New York, 1996, 228 stran.

D. Hilbert se v prvních pracích zabýval obecnou algebrou, zejména teorií invariantů. Roku 1888 představil vlastní řešení tzv. Gordanova problému,[25] v němž podal důkaz existence konečné báze pro formy více proměnných, i když mu jeho abstraktní metoda neumožnila takovou bázi nalézt. Článek obsahující existenční důkaz zaslal k otištění do časopisu *Mathematische Annalen*, recenzent Paul Gordan, autor tohoto problému, jeho revoluční přístup však shledal příliš obtížným a uveřejnění článku odmítl. Komentoval jej slovy: „Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie.“ Své vyjádření zaslal F. Kleinovi, jenž rozpoznal význam Hilbertovy práce a zajistil, aby byl článek v původním znění v časopisu otištěn.[26] D. Hilbert svou novou metodu později ještě rozšířil v dalším článku, v němž navíc odhadl maximální počet prvků takové báze, a opět jej zaslal k otištění v časopisu *Mathematische Annalen*.[27] F. Klein poté D. Hilbertovi napsal, že nepochybuje o tom, že se jedná o nejvýznamnější dílo z obecné algebry, které kdy bylo v časopisu otištěno.

V roce 1897 vydal D. Hilbert práci z algebraické teorie čísel nazvanou *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, známou krátce jako *Zahlbericht*.[28] Kromě shrnutí dosažených výsledků, o něž se již dříve zasloužili Ernst Eduard Kummer (1810–1893), Leopold Kronecker (1823–1891) a Richard Dedekind (1831–1916), obsahuje navíc řadu Hilbertových původních výsledků. Roku 1900 představil na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži 23 otevřených matematických problémů.[29] Jejich řešení vedlo k dalšímu rozvoji vybraných matematických disciplín a podnítilo další matematický výzkum. Řada problémů byla vyřešena během 20. století. Kolem roku 1909 se D. Hilbert začal zajímat o funkcionální analýzu, konkrétně o integrální rovnice, a některé otázky variačního počtu.[30]

Roku 1920 zformuloval výzkumný projekt známý jako tzv. *Hilbertův program*, jenž požadoval, aby byla matematika postavena na pevných logických základech.

---

[25] Německý matematik Paul Gordan (1837–1912) v roce 1868 dokázal existenci konečné báze pro binární formy. Jeho důkaz využívající komplexní čísla však z důvodu výpočetní složitosti nebylo možno zobecnit pro formy více proměnných. Viz Gordan P., *Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Function mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 69(1868), 323–354.

[26] Viz Hilbert D., *Ueber die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten*, Mathematische Annalen 32(1888), 342–350.

[27] Viz Hilbert D., *Ueber die Theorie der algebraischen Formen*, Mathematische Annalen 36(1890), 473–534. P. Gordan na tento článek později reagoval; viz Gordan P., *Ueber einen Satz von Hilbert*, Mathematische Annalen 42(1893), 132–142.

[28] Viz Hilbert D., *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 4(1894/95), 175–535 (bylo vytištěno až roku 1897).

[29] Viz Hilbert D., *Mathematische Probleme*, Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Heft 3, 1900, 253–297; též Archiv der Mathematik und Physik 1(1901), 44–63, 213–237. Úplné znění všech předložených matematických problémů včetně komentáře ke každému z nich též viz *Die Hilbertschen Probleme*, erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von P. S. Alexandrov, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 252, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2007, 302 stran.

[30] O Hilbertově díle viz Dehn M., *Hilberts geometrisches Werk*, Die Naturwissenschaften 10(1922), 77–82; Weyl H., *David Hilbert and his mathematical work*, Bulletin of the American Mathematical Society 50(1944), 612–654.

Jeho cílem bylo vypracovat axiomatické systémy základních matematických oborů (aritmetiky, klasické analýzy, logiky, teorie množin), z nichž matematický obsah vychází, tj. ukázat, že všechna matematická tvrzení lze formálními postupy vyvodit z konečného systému správně zvolených axiomů a že takový systém je logicky konzistentní.[31]

Hilbertovo jméno je dnes v matematice spojeno zejména s určitým typem prostoru nekonečné dimenze (tzv. *Hilbertův prostor*), jenž se využívá nejen v matematické, resp. funkcionální analýze, ale např. i v kvantové mechanice. Svými pracemi přispěl k novým objevům nejen v matematice, ale i v matematické fyzice (kinetická teorie plynů, teorie záření, teorie gravitace).

Grundlagen der Geometrie

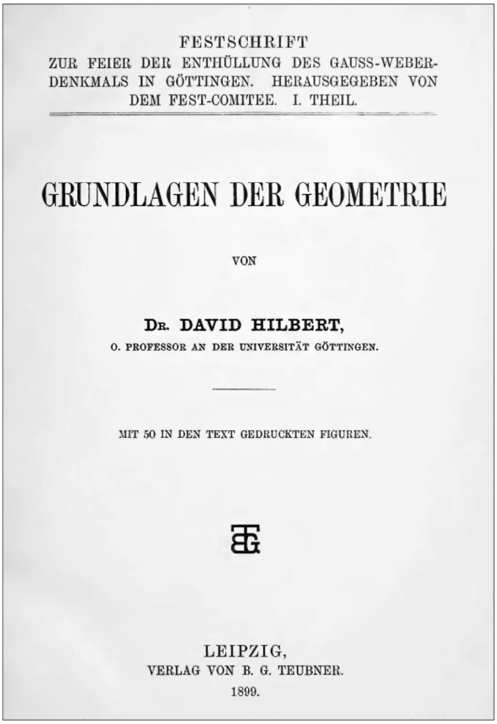
Hilbertovo nejznámější dílo o základech geometrie vyšlo roku 1899 pod názvem *Grundlagen der Geometrie.*[32] Představil v něm první úplný systém 20 axiomů eukleidovské geometrie, kterým nahradil tradiční Eukleidovy axiomy a z něhož bylo možno všechna tvrzení eukleidovské geometrie odvodit. Svou prací předznamenal nový směr v matematickém bádání 20. století – moderní axiomatický přístup, jenž vedl k matematickému formalismu.[33] D. Hilberta k axiomatickému přístupu v geometrii významně inspiroval německý matematik Hermann Ludwig Gustav Wiener (1857–1939), jenž roku 1891 na výročním shromáždění německých přírodovědců a lékařů v Halle vystoupil s přednáškou *Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie.*[34]

[31] Viz Hilbert D., Ackermann W., *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer-Verlag, Berlin, 1928, 120 stran; Hilbert D., Bernays P., *Grundlagen der Mathematik*, Band I, II, Springer-Verlag, Berlin, 1934, 1939, 468 + 498 stran.

[32] Viz Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, herausgegeben von dem Fest-Comitee, I. Theil, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1899, 92 stran. D. Hilbert své dílo od uveřejnění první verze v roce 1899 mnohokrát upravoval, přepracovával a doplňoval, stále se k němu vracel a celý axiomatický systém postupně upřesňoval a vylepšoval. Kniha se během následujících let dočkala několika vydání i překladů, její definitivní verze vyšla v rámci 7. přepracovaného a rozšířeného vydání v roce 1930. Francouzský překlad viz Hilbert D., *Les principes fondamentaux de la géométrie*, traduit par L. Laugel, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 17(1900), 103–209; též Gauthier-Villars, Paris, 1900, 114 stran. Anglický překlad viz Hilbert D., *The foundations of geometry*, authorized translation by E. J. Townsend, The Open Court Publishing Company, Chicago, 1902, 132 stran.

[33] Podle matematického formalismu jsou obsahem matematiky operace se symboly splňující formálně stanovená pravidla.

[34] Úplný text přednášky se nedochoval, bylo publikováno pouze krátké shrnutí. Viz Wiener H., *Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1(1890/91), 45–48; *Weiteres über Grundlagen und Aufbau der Geometrie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 3(1894), 70–80. Další okolnosti vzniku Hilbertových *Grundlagen der Geometrie* viz Toepell M., *On the origins of David Hilbert's „Grundlagen der Geometrie“*, Archive for History of Exact Sciences 35(1986), 329–344; Toepell M., *100 Jahre Grundlagen der Geometrie – David Hilbert's entscheinender Beitrag zur Formalisierung der Mathematik*, Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1(1999), 10–15, český překlad viz Toepell M., *100 let „Základů geometrie“: Rozhodující příspěvek Davida Hilberta k formalizaci matematiky*, přeložila Alena Šolcová, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 45(2000), 89–97.


FESTSCHRIFT
ZUR FEIER DER ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-
DENKMALS IN GÖTTINGEN. HERAUSGEGEBEN VON
DEM FEST-COMITEE. I. THEIL.

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. DAVID HILBERT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

MIT 50 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

Obr. 48: David Hilbert – *Grundlagen der Geometrie*

D. Hilbert ve své práci uvažoval *body*, *přímky* a *roviny* jako primitivní, nedefinované geometrické objekty, které jsou v určitém vzájemném vztahu.[35] Úplný popis všech vztahů mezi nimi (relace incidence mezi bodem a přímkou nebo bodem a rovinou, relace uspořádání bodů na přímce, relace shodnosti a rovnoběžnosti) pak podávají axiomy. Ocitujme Hilbertova slova z úvodu první kapitoly:

> *Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit* A, B, C, $\dots$; *die Dinge des zweiten Systems nennen wir Gerade und bezeichnen sie mit* a, b, c, $\dots$; *die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen und bezeichnen sie mit* α, β, γ, $\dots$; *die Punkte heissen auch die Elemente der linearen Geometrie, die Punkte und Geraden heissen die Elemente der ebenen Geometrie und die Punkte, Geraden und Ebenen heissen*

[35] Německý matematik Ludwig Otto Blumenthal (1876–1944) citoval následující Hilbertův výrok, který stručně vystihuje podstatu axiomatického přístupu v geometrii, při němž hlavní roli hrají axiomaticky zavedené vlastnosti základních pojmů. D. Hilbert měl k volbě základních matematických pojmů poznamenat, že vždy musí být možnost namísto *bodů*, *přímek* a *rovin* říkat *stoly*, *židle* a *žejdlíky piva*: *Man muß jederzeit an Stelle von „Punkte, Geraden, Ebenen" „Tische, Stühle, Bierseidel" sagen können.* Uvedený citát údajně pochází z Hilbertovy konverzace v čekárně na vlakovém nádraží v Berlíně v pátek 25. září 1891 při jeho cestě zpět do Königsbergu. Viz Blumenthal O., *Lebensgeschichte*, in *David Hilbert: Gesammelte Abhandlungen*, dritter Band: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes nebst einer Lebensgeschichte, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935, 402–403.

die Elemente der räumlichen Geometrie oder des Raumes. Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen“, „zwischen“, „parallel“, „congruent“, „stetig“; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie. ([Hi4], str. 4)

Axiomy rozdělil D. Hilbert do pěti skupin: axiomy incidence, uspořádání, rovnoběžnosti, shodnosti a spojitosti (viz obr. 49).

I 1—7.	**Axiome der *Verknüpfung*,**
II 1—5.	**Axiome der *Anordnung*,**
III.	**Axiom der *Parallelen* (*Euklidisches* Axiom),**
IV 1—6.	**Axiome der *Congruenz*,**
V.	**Axiom der *Stetigkeit* (*Archimedisches* Axiom).**

Obr. 49: Hilbertovy axiomy ([Hi4], str. 4)

Hilbertovy axiomy přitom nerozlišují mezi rovinnou a prostorovou eukleidovskou geometrií, obě spojují do jednotného systému. V dalším textu se zaměříme na Hilbertovy výsledky související s geometrickými transformacemi.

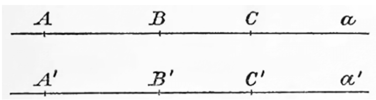
Axiomy shodnosti

D. Hilbert ve své knize *Grundlagen der Geometrie* [Hi4] pojem shodnosti úseček zavedl pomocí následujících axiomů:[36]

1. *Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen und nur einen Punkt B' finden, so dass die Strecke AB (oder BA) der Strecke $A'B'$ congruent ist, in Zeichen: $AB \equiv A'B'$. Jede Strecke ist sich selbst congruent, d. h. es ist stets: $AB \equiv AB$.*

2. *Wenn eine Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ congruent ist, so ist auch $A'B'$ der Strecke $A''B''$ congruent, d. h.: wenn $AB \equiv A'B'$ und $AB \equiv A''B''$, so ist auch $A'B' \equiv A''B''$.*

3. *Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$ ist, so ist auch stets $AC \equiv A'C'$.*



Obr. 50: Axiom 3. ([Hi4], str. 11)

[36] Viz [Hi4], str. 10–12.

4. *Es sei ein Winkel* $\angle(h,k)$ *in einer Ebene* α *und eine Gerade* a' *in einer Ebene* α'*, sowie eine bestimmte Seite von* a' *auf* α' *gegeben. Es bedeute* h' *einen Halbstrahl der Geraden* a'*, der vom Punkte* O' *ausgeht: dann giebt es in der Ebene* α' *einen und nur einen Halbstrahl* k'*, so dass der Winkel* (h,k) *(oder* (k,h)*) congruent dem Winkel* (h',k') *ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels* (h',k') *auf der gegebenen Seite von* a' *liegen, in Zeichen:* $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$*. Jeder Winkel ist sich selbst congruent, d. h. es ist stets* $\angle(h,k) \equiv \angle(h,k)$*.*

5. *Wenn ein Winkel* (h,k) *sowohl dem Winkel* (h',k') *als auch dem Winkel* (h'',k'') *congruent ist, so ist auch der Winkel* (h',k') *dem Winkel* (h'',k'') *congruent, d. h. wenn* $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$ *und* $\angle(h,k) \equiv \angle(h'',k'')$ *ist, so ist auch stets* $\angle(h',k') \equiv \angle(h'',k'')$*.*

6. *Wenn für zwei Dreiecke* ABC *und* $A'B'C'$ *die Congruenzen* $AB \equiv A'B'$*,* $AC \equiv A'C'$*,* $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ *gelten, so sind auch stets die Congruenzen* $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ *und* $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$ *erfüllt.*

Axiom 1. se týká „přenášení“ úseček; zjednodušeně řečeno říká, že každou úsečku lze jediným způsobem „přenést“ na danou přímku, je-li předem dán jeden její krajní bod a zvolena polopřímka, na níž leží druhý krajní bod úsečky. Z axiomů 1. a 2. vyplývá, že shodnost úseček je reflexivní, symetrická a tranzitivní, tj. shodnost úseček je ekvivalencí. Axiom 3. vyjadřuje požadavek na „sčítání úseček“. Axiomy 2. a 3. se obsahově shodují s prvními dvěma Eukleidovými axiomy aplikovanými na úsečky.[37] Axiom 4. se týká „přenášení“ úhlů; zjednodušeně řečeno říká, že každý úhel lze jediným způsobem „přenést“ do dané roviny, je-li předem dáno jedno jeho rameno a zvolena polorovina, v níž leží druhé rameno úhlu. Z axiomů 4. a 5. vyplývá, že i shodnost úhlů je ekvivalencí. Tvrzení axiomu 6. odpovídá skutečnosti, že dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, se shodují i ve zbývajících vnitřních úhlech.

V dalším textu výše uvedené axiomy D. Hilbert využil k odvození základních vět o shodnosti trojúhelníků.[38] Dále mimo jiné dokázal, že v případě dvou shodných úhlů platí shodnost i pro úhly k nim vedlejší, a že všechny pravé úhly jsou navzájem shodné. Na základě shodnosti úseček definoval kružnici se středem M jako množinu všech bodů A v rovině, pro něž jsou úsečky MA navzájem shodné.

D. Hilbert požadoval, aby axiomatický systém byl úplný, nezávislý a bezesporný. Nezávislost axiomů ve svém novém geometrickém systému demonstroval jeho postupným rozvíjením. Při té příležitosti odvodil řadu „pseudogeometrií“, aby v každém dalším kroku ilustroval potřebnost dalších axiomů charakterizujících eukleidovskou geometrii.[39] V rámci Hilbertova systému nelze prokázat, že

[37] *Veličiny témuž rovné i navzájem rovné jsou. Když se přidají veličiny rovné k rovným, i celky jsou rovny.* Viz [Eu], str. 2.

[38] V dnešní terminologii: Jestliže se dva trojúhelníky shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, pak jsou shodné. Jestliže se dva trojúhelníky shodují v jedné straně a úhlech k ní přilehlých, pak jsou shodné. Jestliže se dva trojúhelníky shodují ve všech třech stranách, pak jsou shodné.

[39] Axiomy incidence vedou k projektivní geometrii. Pokud k nim přidáme navíc axiomy uspořádání, získáme afinní geometrii. Dalším přidáním axiomů shodnosti obdržíme metrickou geometrii.

každý axiom je nezávislý na ostatních, protože obsah některých axiomů odkazuje na předchozí axiomy.[40] D. Hilbert však ukázal, že axiomy libovolné z pěti skupin axiomů nelze odvodit z axiomů ostatních čtyř skupin. Pro každý případ předložil geometrickou interpretaci, resp. model geometrie, který splňuje axiomy čtyř skupin, avšak nesplňuje všechny axiomy páté skupiny axiomů. Ve své práci též ukázal, že jeho axiomy eukleidovské geometrie jsou konzistentní – umožňují totiž definovat vzájemně jednoznačné zobrazení mezi body na přímce a reálnými čísly, a vedou tak k obvyklým axiomům pro úplně uspořádané těleso reálných čísel. Případné rozpory v axiomatickém systému eukleidovské geometrie by proto nutně vedly ke sporu s axiomy reálných čísel.[41]

D. Hilbert na obhajobu konzistence eukleidovské geometrie použil její aritmetickou interpretaci. Geometrické pojmy nahradil jejich analytickými reprezentacemi, které umožnily provedení důkazů vět pomocí algebraických metod. V případě rovinné geometrie ztotožnil bod s uspořádanou dvojicí (x, y) reálných čísel a přímku s poměrem $(u : v : w)$ tří reálných čísel, kde $u \neq 0$ nebo $v \neq 0$. Relaci incidence mezi bodem a přímkou vyjádřil následujícím způsobem: bod (x, y) leží na přímce $(u : v : w)$, pokud platí rovnost $ux + vy + w = 0$. Rovněž shodnosti (posunutí, osovou souměrnost podle osy x a otočení kolem počátku soustavy souřadnic) interpretoval algebraicky pomocí jejich analytických vyjádření. Důkaz shodnosti dvou objektů spočíval v nalezení takové shodné transformace, která jeden objekt zobrazí na druhý.

Definice pohybu

V roce 1902 publikoval D. Hilbert pojednání *Ueber die Grundlagen der Geometrie*,[42] v němž byla poprvé uvedena jeho definice *pohybu*, v dnešním pojetí *transformace*. Toto pojednání navíc později zahrnul jako jeden z celkem deseti dodatků i do 7. přepracovaného a rozšířeného vydání své knihy *Grundlagen der Geometrie*.[43]

[40] Americký student Robert Lee Moore (1882–1974) dokázal, že jeden z Hilbertových axiomů (axiom II 4. v prvním vydání [Hi4] z roku 1899) není nezávislý na ostatních axiomech, a je tedy v axiomatickém systému nadbytečný. Důkaz tehdy s odkazem na skutečného autora publikoval jeho učitel George Bruce Halsted (1853–1922); viz Halsted G. B., *The betweenness assumptions*, The American Mathematical Monthly 9(1902), 98–101. D. Hilbert tuto námitku posléze uznal a v dalších vydáních své knihy výše uvedený axiom již vynechal. Viz Wilder R. L., *Robert Lee Moore, 1882–1974*, Bulletin of the American Mathematical Society 82(1976), 417–427; Wilder R. L., *The mathematical work of R. L. Moore: Its background, nature and influence*, Archive for History of Exact Sciences 26(1982), 73–97. Dodejme ještě, že Robert L. Moore později sám publikoval vlastní systém axiomů eukleidovské geometrie založený na primitivních pojmech *bod*, *uspořádání* a *shodnost*; viz Moore R. L., *Sets of metrical hypotheses for geometry*, Transactions of the American Mathematical Society 9(1908), 487–512.

[41] Připomeňme, že obdobným způsobem argumentoval Felix Klein v případě neeukleidovské geometrie, jejíž logickou konzistenci obhajoval logickou konzistencí geometrie eukleidovské.

[42] Viz Mathematische Annalen 56(1902), 381–422.

[43] Viz *Anhang IV. Über die Grundlagen der Geometrie*, in Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, siebente umgearbeitete und vermehrte Auflage, Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1930, 178–230.

D. Hilbert v článku představil nový axiomatický systém rovinné geometrie založený na pojmu *grupa*.[44] Poukázal přitom na Lieovu práci *Theorie der Transformationsgruppen*,[45] v níž je systém axiomů postačujících k výstavbě geometrie rovněž obsažen. Jeho přístup byl však zcela odlišný. D. Hilbert poprvé pracoval s pojmy Cantorovy teorie množin a využíval Jordanovu větu, podle níž každá spojitá uzavřená rovinná křivka bez dvojnásobných bodů tuto rovinu rozdělí na jednu vnitřní a jednu vnější oblast. Hilbertovy axiomy však podle něj bylo možno z Lieova systému axiomů jednoduše odvodit jako jejich speciální případy.

Ve svém článku nejprve zavedl rovinu a poté definoval *pohyb* jako vzájemně jednoznačnou spojitou transformaci roviny, kterou „lze obrátit“:

> ***Definition der Bewegung.*** *Eine Bewegung ist eine umkehrbar eindeutige stetige Transformation der Bildpunkte der Zahlenebene*[46] *in sich von der Art, dass dabei der Umlaufssinn einer geschlossenen Jordan'schen Curve*[47] *stets derselbe bleibt. Eine Bewegung, bei welcher der Punkt M ungeändert bleibt, heisst eine Drehung um den Punkt M.*
> ([Hi6], str. 383)

Pohyb tedy podle Hilbertovy definice zachovává orientaci každé uzavřené Jordanovy křivky. Pohyb, při kterém bod M zůstává na svém místě, nazval *otočením* kolem bodu M.[48]

V dalším textu zformuloval následující tři axiomy, které musí výše definované pojmy *pohyb* a *otočení* splňovat:

> ***Axiom I.*** *Werden zwei Bewegungen hintereinander ausgeführt, so ist die dann entstehende Transformation unserer Ebene in sich wiederum eine Bewegung.*
> ***Axiom II.*** *Wenn A und M beliebige von einander verschiedene Punkte der Ebene sind, so kann man den Punkt A durch Drehung um M stets in unendlich viele verschiedene Lagen bringen.*
> ***Axiom III.*** *Wenn es Bewegungen giebt, durch welche Punktetripel in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC in beliebige Nähe des Punktetripels $A'B'C'$ übergeführt werden können, so giebt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Punktetripel ABC genau in das Punktetripel $A'B'C'$ übergeht.* ([Hi6], str. 384–385)

[44] D. Hilbert předpokládal, že analogickým způsobem lze axiomatický systém vytvořit i pro případ prostorové geometrie.

[45] Viz Lie S., *Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie*, Abteilung V. in *Theorie der Transformationsgruppen*, dritter und letzter Abschnitt, unter Mitwirkung von Friedrich Engel, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1893, 830 stran.

[46] D. Hilbert pod pojmem *die Zahlenebene* rozuměl obvyklou rovinu se zvolenou pravoúhlou soustavou souřadnic: *Wir verstehen unter der Zahlenebene die gewöhnliche Ebene mit einem rechtwinkligen Coordinatensystem x, y.* Viz [Hi6], str. 382.

[47] D. Hilbert užíval pojem *die Jordan'sche Curve* ve smyslu spojitá rovinná křivka bez dvojnásobných bodů: *Eine Doppelpunktslose und einschliesslich ihrer Endpunkte stetige Curve in dieser Zahlenebene heisse eine Jordan'sche Curve.* Viz [Hi6], str. 382.

[48] D. Hilbert kromě pojmu *otočení* (*die Drehung*) pracoval navíc speciálně s pojmem *polootočení* (*die Halbdrehung*), jímž rozuměl otočení o úhel π. Jeho složením se sebou samým získáme identitu: *Unter einer Halbdrehung H um einen Punkt M verstehen wir eine Drehung um den Winkel π d. h. eine Drehung, die noch einmal ausgeführt die Identität ergiebt.* Viz [Hi6], str. 409–410.

Jinými slovy krátce řečeno:

> ***Axiom I.*** *Die Bewegungen bilden eine Gruppe.*
> ***Axiom II.*** *Jeder wahre Kreis besteht aus unendlich vielen Punkten.*
> ***Axiom III.*** *Die Bewegungen bilden im Endlichen ein abgeschlossenes System.* ([Hi6], str. 384–385)

Složením dvou pohybů získáme tedy opět pohyb, neboli pohyby tvoří grupu. Jsou-li A a M libovolné, navzájem různé body roviny, lze bod A získat pomocí otočení kolem bodu M nekonečně mnoha způsoby. Jinými slovy řečeno, každá kružnice obsahuje nekonečně mnoho bodů.[49] Pohyby dále tvoří uzavřený systém; jsou-li dány pohyby, které trojici bodů libovolně blízkých bodům A, B, C zobrazí libovolně blízko bodům A', B', C', potom vždy existuje takový pohyb, který trojici bodů A, B, C zobrazí přímo na trojici bodů A', B', C'.

D. Hilbert poté dokázal, že rovinnou geometrií vyhovující axiomům I až III je buď eukleidovská geometrie, nebo Bolyai-Lobačevského geometrie:

> *Eine ebene Geometrie, in welcher die Axiome I–III erfüllt sind, ist entweder die Euklidische oder die Bolyai-Lobatschefsky'sche ebene Geometrie.* ([Hi6], str. 385–386)

Chceme-li získat samotnou eukleidovskou geometrii, je potřeba axiom I. rozšířit o požadavek, že grupa pohybů obsahuje invariantní podgrupu. Tento požadavek zde zastupuje Eukleidův axiom o rovnoběžkách.

Ve svém článku dále mimo jiné ukázal, že pokud nějaký pohyb zachová libovolné dva body roviny, pak zachová i všechny další body této roviny, tj. jedná se o identitu. Přitom každý bod roviny lze nějakým pohybem zobrazit na libovolný bod této roviny.[50]

Důležitým úkolem byla také potřeba zavést v novém geometrickém systému pojem přímky a odvodit její vlastnosti nezbytné pro výstavbu geometrie.[51] V závěru článku pak D. Hilbert ukázal, že ve vybudované rovinné geometrii platí dříve uvedené axiomy shodnosti.

---

[49] D. Hilbert definoval kružnici jako množinu všech bodů, které získáme pomocí všech možných otočení kolem bodu M, pokud jako vzor uvažujeme libovolný bod různý od bodu M: *Nennen wir die Gesammtheit derjenigen Punkte, die durch die sämmtlichen Drehungen um M aus einem von M verschiedenen Punkte entstehen, einen wahren Kreis in unserer ebenen Geometrie.* Viz [Hi6], str. 384. Používal přitom termín *der wahre Kreis*, jenž v uvedeném článku nijak blíže neobjasnil.

[50] *Wenn irgend zwei Punkte bei einer Bewegung der Ebene festbleiben, so bleiben alle Punkte fest, d. h. die Bewegung ist die Identität. Jeder Punkt der Ebene lässt sich durch eine Bewegung gewiss in jeden anderen Punkt der Ebene überführen.* Viz [Hi6], str. 409.

[51] D. Hilbert odvodil mimo jiné následující tvrzení: *Die wahre Gerade ist eine stetige Curve. Die wahre Gerade keinen Doppelpunkt besitzt. Die wahre Gerade nicht in sich selbst zurücklaufen kann. Zwei Gerade haben höchstens einen Punkt gemein. Irgend zwei Punkte in unserer ebenen Geometrie stets durch eine wahre Gerade verbunden werden können.* Viz [Hi6], str. 418–420.

Reakce na Hilbertovy Základy geometrie

Česká matematická komunita byla na přelomu 19. a 20. století s axiomatickým systémem geometrie poměrně dobře seznámena. V Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky vyšla roku 1903 v rámci literárního věstníku obsáhlá recenze Hilbertova díla.[52] Její autor Antonín Libický[53] uvedl v českém překladu mimo jiné i úplné znění všech dvaceti axiomů. Ocitujme z jeho recenze krátké úryvky:

> *Pojednání toto jest – jak praví spisovatel v úvodu – nový pokus, zbudovati geometrii na jednoduché a úplné soustavě axiomů na sobě nezávislých a odvoditi z nich nejdůležitější věty geometrické, při čemž by se též objasnil význam rozličných skupin axiomů a dosah důsledků z nich plynoucích. Vyšetřuje kriticky principy geometrie, řídil se autor zásadou, že jest třeba zkoumati, zdali jest vůbec možno, odpověděti k nějaké předložené otázce, máme-li zření k předepsanému někdy postupu při řešení a k omezeným prostředkům, jichž můžeme použiti. … Jest pravda, že již před Hilbertem vykonáno bylo v tomto oboru mnoho pozoruhodného; Killing, Schur, Stolz, Pasch, Veronese a j. pracemi svými v posledním desítiletí velice přispěli k tomu, aby mohla býti vyšetřena soustava axiomů si neodporujících, jež by tvořila bezpečný základ geometrie. Hilbert přivedl tyto práce k jakémusi zakončení; na soustavě axiomů, již sestavil v kap. I. svého pojednání, může býti založena geometrie, v níž není ani žádných vnitřních nesrovnalostí, ani nějakých nejasností nebo docela nesprávností. … Všem, kdož se zajímají o problemy, jež se vztahují ku základům geometrie, buď znamenité pojednání Hilbertovo nejvřeleji doporučeno.*

Hilbertův axiomatický systém přitahoval pozornost českých matematiků ještě v polovině 20. století. Jan Vyšín[54] v té době logické výstavbě eukleidovské geometrie věnoval třetí díl své učebnice *Elementární geometrie.*[55] Podle jeho vlastních slov z předmluvy „je to vlastně jakási procházka Hilbertovou soustavou axiomů, která má čtenáři pomocí řady modelů osvětlit podstatu a význam abstraktní geometrie“.[56] J. Vyšín v knize navíc mimo jiné dokázal ekvivalenci Hilbertových axiomů shodnosti s axiomy pohybovými.

[52] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 32(1903), 147–156.

[53] Antonín Libický (1854–1930), středoškolský učitel matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky, od roku 1906 byl ředitelem reálky v Hradci Králové. Patřil mezi znalce a popularizátory teorie relativity.

[54] Jan Vyšín (1908–1983), původně středoškolský učitel matematiky a deskriptivní geometrie, v letech 1946 až 1953 působil jako asistent na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy. Roku 1953 byl jmenován docentem matematiky na Vysoké škole pedagogické v Praze. Po jejím zrušení v roce 1959 přešel na Matematicko-fyzikální fakultu Univerzity Karlovy, kde setrval až do roku 1972, kdy se stal vedoucím Kabinetu pro modernizaci vyučování matematice v Matematickém ústavu Československé akademie věd.

[55] Viz Vyšín J., *Elementární geometrie III* (*Logická výstavba*), Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952, 111 stran.

[56] Citace viz [Vš1], str. 3. Dodejme, že J. Vyšín abstraktní geometrií rozuměl geometrii, která staví na geometrických pojmech, a nikoliv na představách.

V další své knize *Soustava axiomů eukleidovské geometrie*[57] pojednal J. Vyšín logické základy geometrie speciálně v jednorozměrném, dvojrozměrném a trojrozměrném eukleidovském prostoru. V souladu s Hilbertovými *Základy geometrie* stanovil v dvojrozměrném i v trojrozměrném eukleidovském prostoru pět skupin axiomů (axiomy incidence, uspořádání, shodnosti, spojitosti a rovnoběžnosti),[58] axiomy incidence přitom formuloval v množinové terminologii.[59] Také zde J. Vyšín poukázal na skutečnost, že shodnost lze v geometrii zavést dvěma způsoby, a to buď na základě shodnosti úseček, nebo shodnosti jako pohybu (přemístění), tj. shodného zobrazení. Navíc definoval pojem *volné úsečky* jako třídy všech navzájem shodných úseček a odvodil základní vlastnosti součtu, rozdílu a porovnávání volných úseček. Analogicky zavedl pojem *volného úhlu* a jeho vlastnosti.

I ve světě byly Hilbertovy výsledky přijaty velmi příznivě. Felix Klein přes své protichůdné názory na Hilbertovo formální pojetí podstaty matematiky jeho práci v této oblasti se zájmem sledoval. Význam Hilbertova axiomatického přístupu k základům geometrie oceňoval a jeho práci *Grundlagen der Geometrie* označil za nejvýznamější dílo z této oblasti matematiky. V návaznosti na nezávislost 5. Eukleidova axiomu o rovnoběžkách napsal:

> *So entstand die sog. moderne geometrische Axiomatik, die in ihren Betrachtungen genau den Wegen folgt, die jene alten Untersuchungen gewiesen haben: Man sieht zu, welche Teile der Geometrie sich ohne Anwendung gewisser Axiome aufbauen lassen, und ob man auch unter der Annahme des Gegenteiles eines einzelnen Axiomes zu einem logisch widerspruchsfreien Systeme einer sog. „Pseudogeometrie“ gelangen kann. Als wichtigstes hierher gehöriges Werk habe ich Ihnen Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ zu nennen, deren Hauptziel gegenüber früheren Untersuchungen es ist, in der angedeuteten Weise die Bedeutung der Stetigkeitsaxiome für die Geometrie festzustellen.*
> ([K7], str. 379)

Hilbertův žák Hermann Weyl (1885–1955), jenž působil jako soukromý docent v Göttingen, ve svém článku *David Hilbert and his mathematical work*[60] Hilbertův axiomatický přístup nejen k základům geometrie, ale obecně k základům každé vědy, komentoval následujícími slovy:

> *Hilbert is the champion of axiomatics. The axiomatic attitude seemed to him one of universal significance, not only for mathematics, but for all sciences. His investigations in the field of physics are conceived in the axiomatic spirit. In his lectures he liked to illustrate the method by examples taken from biology, economics, and so on. The*

[57] Viz Vyšín J., *Soustava axiomů eukleidovské geometrie*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1959, 209 stran. Recenze viz Časopis pro pěstování matematiky 85(1960), 207–209.

[58] V případě jednorozměrného eukleidovského prostoru J. Vyšín z pochopitelných důvodů uvažoval pouze axiomy uspořádání, shodnosti a spojitosti.

[59] Např. první dva axiomy incidence v podání J. Vyšína znějí takto: *Dva různé body náleží jediné přímce. Přímka obsahuje aspoň dva různé body.* Viz [Vš2], str. 155.

[60] Viz Weyl H., *David Hilbert and his mathematical work*, Bulletin of the American Mathematical Society 50(1944), 612–654.

modern epistemological interpretation of science has been profoundly influenced by him. Sometimes when he praised the axiomatic method he seemed to imply that it was destined to obliterate completely the constructive or genetic method. I am certain that, at least in later life, this was not his true opinion. For whereas he deals with the primary mathematical objects by means of the axioms of his symbolic system, the formulas are constructed in the most explicit and finite manner. In recent times the axiomatic method has spread from the roots to all branches of the mathematical tree. Algebra, for one, is permeated from top to bottom by the axiomatic spirit. One may describe the role of axioms here as the subservient one of fixing the range of variables entering into the explicit constructions. But it would not be too difficult to retouch the picture so as to make the axioms appear as the masters. An impartial attitude will do justice to both sides; not a little of the attractiveness of modern mathematical research is due to a happy blending of axiomatic and genetic procedures.

([We2], str. 644–645)