Historický vývoj geometrických transformací

Meranský program

In: Dana Trkovská (author): Historický vývoj geometrických transformací. (Czech). Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2015. pp. 93–112.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403412

5. Meranský program

Ve druhé polovině 19. století postupně narůstal ve všech vyspělých zemích zájem o matematiku a promítal se i do její výuky na středních školách. Společenský rozvoj, a tím i rozvoj školství, byl přirozenou reakcí na tehdejší prudký rozkvět vědy a techniky. Vývoj matematiky v letech 1800 až 1870 přinesl podstatné změny v jejím obsahu, metodách práce i aplikacích, na něž střední škola do té doby nereagovala. Také výuka matematiky na vysokých školách zejména technického směru pokročila natolik, že vyžadovala mnohem širší a pevnější základy středoškolské matematiky.

Snahy o reformu výuky matematiky se ve většině hlavních evropských zemí objevovaly od šedesátých let 19. století. Přinesly změny jak v obsahu středoškolské matematiky, tak v metodách její výuky ve školách. V mezinárodním měřítku byla iniciátorkou a koordinátorkou těchto snah Mezinárodní komise pro vyučování matematice. Jedním z čelních představitelů reformního hnutí, kteří jejím prostřednictvím ovlivnili vyučování matematice na všech stupních a typech škol, byl německý matematik Felix Klein.

5.1 Reformní snahy Felixe Kleina

F. Klein se během své kariéry zajímal o výuku matematiky na německých školách, snažil se o její modernizaci. Svými reformními aktivitami usiloval mimo jiné o větší propojení učiva matematiky mezi jednotlivými ročníky a stupni škol, od elementárních až po školy vysoké. Zasadil se o nové uspořádání obsahu výuky tak, aby absolventi středních škol byli lépe připraveni ke studiu matematiky a technických disciplín na vysokých školách.

Připomeňme stručně hlavní životní osudy Felixe Kleina, tentokrát v souvislosti s jeho snahami o reformu matematického vzdělávání.[1]

Jak již bylo řečeno, F. Klein studoval matematiku a fyziku na univerzitě v Bonnu. Pod vedením Julia Plückera zde roku 1868 sepsal disertační práci *Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form* [O transformaci obecné rovnice druhého stupně v přímkových souřadnicích na kanonický tvar].[2] Spolu s ní předložil k obhajobě formulace pěti vlastních tezí. První čtyři body se týkaly jeho další matematické práce, poslední bod zahrnoval doporučení, aby byli žáci na střední škole seznamováni vedle syntetické eukleidovské geometrie i s dalšími geometrickými disciplínami; na mysli měl zejména analytickou a deskriptivní geometrii.[3]

[1] Viz Timerding H. E., *Felix Klein und die Reform des mathematischen Unterrichts*, Die Naturwissenschaften 7(1919), 303–307; Prandtl L., *Felix Klein und die Förderung der „angewandten Wissenschaften“*, Die Naturwissenschaften 7(1919), 307–310 (oba články viz [FK]); dále [K3], [K4], [K5], [Ma] a [To].

[2] Viz Mathematische Annalen 23(1884), 539–578; též [K8], str. 5–49.

[3] *Es ist wünschenswert, daß neben der Euklidischen Methode neuere Methoden der Geometrie in den Unterricht auf Gymnasien eingeführt werden.* Viz [K8], str. 49.

Ueber

die Transformation

der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades
zwischen Linien-Coordinaten

auf eine canonische Form.

Inauguraldissertation,

zur Erlangung der Doctorwürde bei der philosophischen
Facultät zu Bonn eingereicht

und am 12. December 1868 mit Thesen vertheidigt

von

Felix Klein.

Namen der Opponenten:
Emil Budde, Dr. phil.
Ernst Sagorski, cand. phil.
Johannes Seeger, Dd. phil.

Bonn.

Druck von Carl Georgi.

Obr. 36: Titulní list Kleinovy disertační práce

Thesen.

1. Diejenige kanonische Gleichungsform, welche **Battaglini** seiner Arbeit über Komplexe des zweiten Grades zugrunde legt:

$$\sum_{\varkappa} a_{\varkappa} p_{\varkappa}^{2} = 0,$$

ist nicht die allgemeine.

2. Die Anwendung, welche **Cauchy** von den in seiner méthode générale, propre à fournir les équations de conditions rélatives aux limites des corps [Comptes rendus, VIII (vgl. Cauchys Werke (1) IV, p. 193 ff.)] entwickelten Prinzipien auf lineare Differentialgleichungen einer beliebigen Ordnung gibt (ibid.), scheint nicht über alle Bedenken erhaben.

3. Bei Erklärung der Lichtphänomene kann die Annahme eines Lichtäthers nicht umgangen werden.

4. Positive und negative Elektrizität sind nicht als entgegengesetzt gleich zu betrachten.

5. Es ist wünschenswert, daß neben der Euklidischen Methode neuere Methoden der Geometrie in den Unterricht auf Gymnasien eingeführt werden.

Obr. 37: Kleinovy teze předložené spolu s disertační prací

Počátkem roku 1871 se F. Klein habilitoval a začal přednášet na univerzitě v Göttingen. V roce 1872 byl ve věku pouhých 23 let jmenován řádným profesorem matematiky na filozofické fakultě univerzity v Erlangen. Při této příležitosti předložil v říjnu 1872 text své nástupní přednášky *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* [Srovnávací úvahy o novějších geometrických bádáních], která se později stala známou jako tzv. *Erlangenský program.*[4] Dne 7. prosince 1872 následovala na univerzitě v Erlangen podle tamních zvyklostí nástupní řeč, v níž se F. Klein věnoval povaze vyššího vzdělávání.[5] Podle [Ma] ho k tomu přitom vedly ryze praktické důvody, chtěl kolegy přesvědčit o nezbytnosti zřízení matematických seminářů a cvičení. V seminářích spatřoval příležitost vést studenty k samostatné tvůrčí práci a v praktických cvičeních chtěl rozvíjet mimo jiné jejich prostorovou představivost. Apeloval na samotný smysl a účel matematiky, její aplikace a nezbytnou nutnost procvičování matematického myšlení. Ostře kritizoval výuku matematiky na gymnáziích, její přílišný formalismus a učební metody spočívající v učení nazpaměť. Uvedl, že je nutné pozvednout matematické vzdělání budoucích učitelů matematiky na vyšší teoretickou úroveň tak, aby bylo v souladu s dosaženými vědeckými poznatky.

F. Klein přednášel na univerzitě v Erlangen pouze do roku 1875, kdy mu bylo nabídnuto výhodnější místo na Technische Hochschule v Mnichově. Zde setrval pět let, v roce 1880 přešel na nově ustavené profesorské místo na univerzitě v Lipsku. Ve své nástupní řeči *Über die Beziehungen der neueren Mathematik zu den Anwendungen* [O vztazích novější matematiky k aplikacím] pronesené 25. října 1880 formuloval připomínky k univerzitní výuce matematiky. Kritizoval zejména její velkou specializaci a s tím spojené zřizování matematicky úzce zaměřených škol. Za důsledek této roztříštěnosti a specializace označil stagnaci univerzitní výuky matematiky. Požadoval proto její rozdělení na obecné elementární přednášky poskytující většině studentů souhrnný přehled matematiky a na speciální vyšší přednášky určené vybraným skupinám studentů. Dalším problémem, na který ve své řeči upozornil, byla stále se zvětšující propast mezi čistou a aplikovanou matematikou. Příčiny viděl v neustálém zobecňování řešených problémů, jež vede k přílišné abstrakci. Požadoval proto zařadit do univerzitní výuky matematiky více aplikací.

Na univerzitě v Lipsku působil F. Klein do roku 1886, poté se vrátil na univerzitu do Göttingen. Za jeho vydatné podpory zde v roce 1886 vznikla první katedra didaktiky matematiky (*Lehrstuhl für Didaktik der mathematischen Wissenschaften*). Zrodila se zde také myšlenka dalšího vzdělávání středoškolských profesorů matematiky formou přednášek a prázdninových kurzů, které měly zvýšit úroveň jejich teoretické a metodické připravenosti. První kurzy se pod Kleinovým vedením uskutečnily v roce 1892, poté se opakovaly každé dva roky až do první světové války. Konaly se vždy o velikonočních prázdninách.

---

[4] O Erlangenském programu podrobně pojednává kapitola 4 této monografie.

[5] Originální německý přepis Kleinovy nástupní řeči včetně anglického překladu a komentáře viz Rowe D. E., *Felix Klein's „Erlanger Antrittsrede“*, A Transcription with English Translation and Commentary, Historia Mathematica 12(1985), 123–141.

V té době se F. Klein začal zabývat otázkou vztahu matematiky a technických věd. Na univerzitě v Göttingen zamýšlel zřídit technické laboratoře, v nichž by se studenti seznámili s matematickými aplikacemi nejen teoreticky, ale i prakticky. Jeho plány vybudovat technický institut však narazily na tvrdý odpor jak ze strany technických vysokých škol, které se obávaly konkurence, tak ze strany univerzit, které v tom spatřovaly nežádoucí odklon od čisté matematiky. Očekávaje podporu ze strany univerzity, začal se F. Klein zajímat o problematiku vzdělávání budoucích učitelů. Svůj požadavek seznámit studenty s praktickými matematickými aplikacemi přenesl na studenty učitelství a rozšířil jej o požadavek znovuzavedení samostatné vědecké závěrečné práce, která byla zrušena roku 1887. Proti vytvoření odpovídajících podmínek ke studiu učitelství nebylo možno nic namítat, a tak F. Klein dosáhl svého cíle zřídit na univerzitě v Göttingen technický institut.

Na přelomu 19. a 20. století se ve světě uskutečnilo několik mezinárodních kongresů matematiků, na nichž se F. Klein rovněž angažoval.[6] Roku 1897 se v Zürichu konal 1. mezinárodní kongres matematiků, na němž F. Klein vystoupil s přednáškou *Zur Frage des höheren mathematischen Unterrichts* [K otázce výuky vyšší matematiky].

Kolem roku 1900 se jako matematik snažil navázat kontakty se zástupci ostatních přírodovědných předmětů. O Velikonocích roku 1900 v Göttingen, při příležitosti prázdninových kurzů pro učitele matematiky a fyziky, vystoupil společně s fyzikem Eduardem Rieckem (1845–1915) na téma *Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an höheren Schulen* [O významu aplikované matematiky a fyziky ve výuce na vyšších školách]. V srpnu téhož roku byla na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži ustavena mezinárodní sekce pro vyučování matematice.

V prosinci 1901 se v Göttingen uskutečnila porada, které se zúčastnilo několik univerzitních profesorů matematicko-přírodovědných předmětů (včetně F. Kleina) a tři profesoři göttingenského gymnázia. Ve zprávě z tohoto shromáždění jsou již načrtnuty téměř všechny úkoly, které byly později řešeny v tzv. *Meranském programu.* Byly zde diskutovány otázky související s postavením matematiky a přírodních věd na středních školách, ústřední návrh – vyučovat na reálkách základy diferenciálního a integrálního počtu a jejich využití k popisu jednodušších přírodních procesů – byl odsouhlasen s tím, že se jedná o vlastní jádro celého matematicko-fyzikálního vzdělání.

Další prázdninový kurz pro učitele matematiky a fyziky se konal v Göttingen o Velikonocích roku 1902. F. Klein na něm mimo jiné poukazoval na zásadní význam pojmu funkce ve výuce matematiky již na nižším stupni gymnázia a přikláněl se k zařazení infinitesimálního počtu i do výuky na gymnáziích.

[6] Sborníky ze všech mezinárodních kongresů uskutečněných v letech 1893 až 2010 jsou v elektronické verzi dostupné na webových stránkách Mezinárodní matematické společnosti; viz http://www.mathunion.org/ICM/. Velmi stručný přehled historie kongresů viz Albers D. J., Alexanderson G. L., Reid C., *International Mathematical Congresses, An illustrated History 1893–1986*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1987, 63 stran.

O dva roky později, o Velikonocích roku 1904, se v Göttingen uskutečnil další prázdninový kurz. Návrhy na reorganizaci matematického vzdělávání diskutované při této příležitosti byly zveřejněny pod názvem *Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen* [Nové příspěvky k otázce výuky matematiky a fyziky na vyšších školách]. V nich bylo jako hlavní příspěvek obsaženo Kleinovo pojednání *Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen* [O aktuální reorganizaci matematického vzdělávání na vyšších školách].[7]

Otázka výuky středoškolské matematiky byla rovněž jedním z hlavních témat 3. mezinárodního kongresu matematiků v Heidelbergu v srpnu 1904. Téhož roku se v Breslau (Wrocław, Vratislav) sešlo shromáždění Společnosti německých přírodovědců a lékařů (*Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte*), na němž byla ustavena komise pro vyučování přírodovědným předmětům (*Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte*). Jejím prvním předsedou byl zvolen August Gutzmer.[8] F. Klein této komisi předložil vlastní návrh na reformu matematicko-fyzikálního vzdělávání. Činnost komise vyústila v reformní návrh na úpravu středoškolského přírodovědného vzdělávání, jenž byl představen, diskutován a posléze přijat na dalším shromáždění Společnosti německých přírodovědců a lékařů konaném v září 1905 v Meranu. Proto bývá označován jako tzv. *Meranský program.* Komise pro vyučování přírodovědným předmětům, která ještě vypracovala návrh na vědecké vzdělávání budoucích učitelů přírodních věd, však zanikla roku 1907. Od roku 1908 její úlohu převzal Německý výbor pro matematické a přírodovědné vzdělávání (*Deutscher Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*).

5.2 Meranský program

Meranským programem bývá označován návrh německé komise pro vyučování přírodovědným předmětům na reformu středoškolského vzdělávání v těchto předmětech.[9] V jeho pozadí stály následující tři obecné cíle:

1. střední školy by neměly poskytovat ani jednostranně jazykovědné a historické, ani jednostranně matematicko-přírodovědné vzdělávání,

2. matematika a přírodní vědy jsou rovnocenné jazykovému vzdělávání; střední školy by měly poskytovat specifické obecné vzdělávání,

3. všechny střední školy by měly poskytovat rovnocenné vzdělávání.

[7] Viz Klein F., *Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen*, Vorträge gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904, Teubner, Leipzig und Berlin, 1904, 82 stran. Recenze viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 34(1905), 259–260.

[8] Karl Friedrich August Gutzmer (1860–1924), německý matematik, v letech 1896 až 1899 soukromý docent na univerzitě v Halle, v letech 1899 až 1905 profesor matematiky na univerzitě v Jeně, roku 1905 jmenován řádným profesorem na univerzitě v Halle. Zabýval se zejména teorií diferenciálních rovnic.

[9] Viz *Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, Entwürfe von der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, Teil 1, Teubner, Leipzig, 1905, 1–48.

S ohledem na dosažení těchto cílů měla být středoškolská výuka matematiky založena na následujících třech základních principech:

1. přizpůsobit výuku přirozenému duševnímu vývoji žáků (*psychologický princip*),
2. rozvíjet schopnost matematického nazírání na okolní svět (*utilitární princip*),
3. vést žáky k uvědomování si souvislostí mezi jednotlivými poznatky (*didaktický princip*).

Meranský program připisoval matematice ve středoškolském vzdělávání jedno z klíčových postavení. Její hlavní úkoly viděl zejména v rozvíjení rozumových schopností a logického myšlení. Mezi obecnými požadavky na výuku matematiky na středních školách byly uvedeny následující záměry:

- poskytnout vědecky podložený přehled matematického učiva,
- rozvíjet schopnost matematického myšlení a jeho využití při řešení praktických úloh,
- přiblížit význam matematiky pro exaktní poznání přírody a moderní kulturu vůbec.

Nově chtěl do výuky zavést výchovu k funkčnímu myšlení; pojem funkce se měl stát ústředním pojmem veškeré výuky matematiky. Měl být prezentován jednak graficky, na praktických příkladech,[10] jednak aritmeticky, na příkladech jednoduchých závislostí. F. Klein rovněž doporučoval vysvětlit podstatu „stoupání a klesání“ grafu funkce nebo výpočet obsahu plochy pod základními křivkami (grafy elementárních funkcí), a tím žáky pomalu připravovat na zavedení pojmů derivace a integrál. Základy infinitesimálního počtu měly být zařazeny do osnov vyšších tříd jako důležitý pomocný nástroj, např. při studiu průběhu funkcí.

Meranský program na výuku matematiky na středních školách kladl z hlediska jejího obsahu následující požadavky:

- podporovat rozvoj prostorové představivosti,
- prostoupit učivo pojmem funkce, rozvíjet funkční myšlení,
- zavést diferenciální a integrální počet,
- zařadit do výuky grupy geometrických transformací,
- omezit formalismus a abstraktní učivo,
- řešit úlohy z praktického života,
- rozvíjet mezipředmětové vztahy.

[10] F. Klein uvádí v [K5] jako příklad grafický jízdní řád.

Aby výše uvedené reformní návrhy nevedly k přetěžování žáků, byly současně s nimi předloženy nově vypracované učební plány pro jednotlivé typy středních škol. Ocitujme krátkou pasáž z úvodu učebního plánu pro matematiku:[11]

> *Die Mathematik befindet sich an unseren höheren Lehranstalten in wesentlich anderer Lage als die Naturwissenschaften: sie braucht sich die erforderliche Geltung innerhalb des Schulorganismus nicht erst zu erkämpfen, sondern sie bedarf nur einer gewissen Anpassung an die modernen Aufgaben der Schule ...*
> *Einmal gilt es (wie in allen anderen Fächern), den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen, überall an den vorhandenen Vorstellungskreis anzuknüpfen, die neuen Kenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindung zu setzen, endlich den Zusammenhang des Wissens in sich und mit dem übrigen Bildungsstoff der Schule von Stufe zu Stufe mehr und mehr zu einem bewußten zu machen. ...*
> *Von hier aus entspringen zwei Sonderaufgaben: die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denken.* ([K5], str. 208–209)

Školní úřady většiny německých zemí přijaly meranské návrhy velmi příznivě. Prusko vybralo pět středních škol,[12] aby reorganizaci výuky matematiky prakticky vyzkoušely. Zprávy o nově zavedených učebních plánech, které tyto školy vypracovaly, vyznívaly ve prospěch meranských návrhů.

Hlavní myšlenky Meranského programu se staly východiskem několika dalších reforem, které přinesly obsahové i metodické změny v učivu středoškolské matematiky.

5.3 Další reformní snahy

V roce 1906 se shromáždění Společnosti německých přírodovědců a lékařů konalo ve Stuttgartu. Byly na něm navrženy obsahové změny, které souvisely zejména se snahou obohatit středoškolskou matematiku o základy matematické analýzy. Také tento návrh byl vypracován pod Kleinovým vedením; požadoval mimo jiné zavedení a rozvíjení pojmu funkce na příkladech elementárních funkcí a začlenění některých prvků infinitesimálního počtu do středoškolské výuky matematiky.

[11] Viz *Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, Teubner, Leipzig, 1905, 11–21. Též *Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten*, Verhandlungen der Naturforscherversammlung 1905, I, 156–167; nebo Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 36(1905), 543–553. Tento plán byl otištěn i v [K5] pod názvem *Der Meraner Lehrplan für Mathematik* jako jeden ze tří dodatků (str. 208–220); další dva dodatky tvoří Kleinovy články *Bericht an die Breslauer Naturforscherversammlung über den Stand des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen* z roku 1904 (str. 193–207) a *Probleme des mathematisch-physikalischen Hochschulunterrichts* z roku 1905 (str. 221–236). Recenze knihy [K5] je otištěna v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky 37(1908), 161–163.

[12] Mathematik Realgymnasium Düren, Gymnasium Göttingen, Oberrealschule Kiel, Oberrealschule auf der Burg Königsberg, Gymnasium Hannoversch Münden.

Další shromáždění Společnosti německých přírodovědců a lékařů se uskutečnilo roku 1907 v Drážďanech. Bylo na něm přijato doporučení posilovat v přípravě budoucích učitelů matematiky i ve středoškolské výuce matematiky aplikace na úkor některých izolovaných speciálních problémů, které nejsou podstatné pro utváření uceleného, vnitřně logicky propojeného systému středoškolského matematického vzdělání. F. Klein přitom prosadil vyzkoušení tohoto návrhu v Německu v roce 1908.

Roku 1908 se v Římě konal 4. mezinárodní kongres matematiků, na němž bylo předneseno osm referátů o reformním dění ve vyučování matematice v různých zemích. Současně byla ustavena Mezinárodní komise pro vyučování matematice (*International Commission on Mathematical Instruction*),[13] která se zabývala organizací, vyučovacími metodami a učebními plány veškeré výuky matematiky, od elementární až po vysokoškolskou. Své zastoupení v ní měly tyto státy: Anglie, Německo, USA, Francie, Itálie, Švýcarsko a Rakousko-Uhersko. Na místo předsedy byl navržen opět německý matematik A. Gutzmer, který se však této funkce zřekl a navrhl místo sebe F. Kleina, jenž byl zvolen a jmenován do funkce i přes svou nepřítomnost. Kromě již přijatých požadavků na obsahové změny ve výuce středoškolské matematiky komise doporučila obohatit výuku geometrie na středních školách o některé prvky projektivní geometrie a vedle matematické analýzy zařadit do osnov také základy dalších speciálních disciplín – teorie množin a teorie grup. Pod Kleinovým vedením vydala Mezinárodní komise pro vyučování matematice několik publikací o výuce matematiky na všech stupních a typech škol.

V návaznosti na Mezinárodní komisi pro vyučování matematice byly postupně v jednotlivých zemích ustaveny národní komise, které měly vypracovat podrobnou souhrnnou zprávu o organizaci a metodách výuky matematiky v dané zemi. Měly poskytnout materiál pro srovnání stavu výuky v jednotlivých zemích a vzájemnou inspiraci v oblasti školství. Jejich výsledky byly zveřejněny na 5. mezinárodním kongresu matematiků roku 1912 v Cambridge. Sešlo se celkem na 280 národních zpráv.[14]

Činnost Mezinárodní komise pro vyučování matematice zanikla během 1. světové války; obnovena byla teprve na 8. mezinárodním kongresu matematiků konaném v Bologni v roce 1928, tedy až po Kleinově smrti.

[13] Viz Howson A. G., *Seventy-five years of the International Commission on Mathematical Instruction*, Educational Studies in Mathematics 15(1984), 75–93; Lehto O., *Mathematics without Borders: A History of the International Mathematical Union*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1998, 399 stran.

[14] Každá zpráva měla dvě části. V první části byl popsán současný stav organizace výuky matematiky, zejména typy škol, cíle, obsah, rozsah a metody výuky, systém zkoušek, teoretická a praktická příprava učitelů pro zkoušky učitelské způsobilosti. Druhá část zprávy nastínila ideje a vývojové tendence vztahující se k reorganizaci škol a obecné cíle vzdělávání. Z hlediska obsahu výuky byla speciální pozornost věnována infinitesimálnímu počtu, analytické, deskriptivní a projektivní geometrii. Důraz byl kladen na využití praktických úloh a experimentů ve výuce matematiky, na výuku fyziky z pohledu matematiky, mezipředmětové vztahy a historii matematiky. V centru zájmu stála také kvalitní příprava budoucích učitelů matematiky.

5.4 Situace v českých zemích v 19. století

První polovina 19. století, spojená v našich dějinách s tzv. národním obrozením, byla poznamenána absolutistickou vládou.[15] Školství se tehdy řídilo statutem z roku 1774, v němž byla stanovena povinnost šestileté školní docházky pro děti ve věku od šesti do dvanácti let. Střední vzdělávání poskytovala šestiletá gymnázia, nad nimiž byl stanoven státní dozor. Hlavním vyučovaným předmětem byla latina, ostatní předměty včetně matematiky a přírodních věd byly vyučovány jen okrajově. Na šestiletá gymnázia navazovaly dvouleté filozofické ústavy, které byly mezistupněm mezi gymnáziem a univerzitou. Až do roku 1848 se tento stav školství jen velmi málo proměňoval.

Revoluční rok 1848 je důležitým mezníkem také ve vývoji školství v našich zemích, které byly tehdy součástí habsburské monarchie. Dne 23. března 1848 bylo totiž nově zřízeno ministerstvo vyučování,[16] které převzalo záštitu nad celým školstvím a pomohlo realizovat tzv. *Exner-Bonitzův program reformy středního školství*.[17] Dosavadní šestileté gymnázium bylo spojením s oběma ročníky filozofického studia přeměněno na osmileté, jež bylo rozděleno do dvou čtyřletých cyklů. Nižší byl zaměřen na elementární výuku, vyšší poskytoval filozoficko-historické a matematicko-přírodovědné vzdělávání. Výuka byla obohacena o další předměty včetně fyziky, zvýšil se počet vyučovacích hodin i podíl matematiky a přírodních věd ve výuce. Gymnázium přestalo být jedinou střední všeobecně vzdělávací školou. Od roku 1851 vznikaly první šestileté reálky,[18] jež byly roku 1868 prodlouženy na sedmileté. Měly poskytovat všeobecné vzdělávání s důrazem na matematiku a přírodní vědy, byly chápány hlavně jako příprava pro studium na technice. Nově byla od roku 1869 stanovena závěrečná, státem kontrolovaná maturitní zkouška, jež měla prověřovat připravenost absolventa k dalšímu akademickému studiu. Zpočátku se konala pouze na gymnáziích a opravňovala ke studiu na univerzitě,[19] od roku 1872 byla zavedena rovněž na reálkách jako podmínka pro další studium na technických vysokých školách. Tím došlo do značné míry k zrovnoprávnění obou stávajících typů středních škol.[20]

[15] Na vládě se tehdy významnou měrou podílel kníže Klement Václav Lothar von Metternich (1773–1859). V letech 1809 až 1848 byl rakouským ministrem zahraničí, v letech 1821 až 1848 působil jako státní kancléř rakouského císařství.

[16] Poznamenejme, že v letech 1849 až 1860 byl ministrem vyučování Leopold Leo hrabě Thun-Hohenstein (1811–1888).

[17] Franz Friedrich Exner (1802–1853), německý filozof, od roku 1832 profesorem filozofie v Praze, roku 1848 jmenován ministerským radou. Hermann Bonitz (1814–1888), německý filolog, profesor na gymnáziu ve Štětíně (Szczecin), od roku 1849 profesorem klasické filologie a filozofie na univerzitě ve Vídni. Roku 1849 předložili *Entwurf der Organisation der Gymnasien und Realschulen in Oesterreich* [Nástin organizace gymnázií a reálek v Rakousku], jenž byl veřejně vyhlášen a provizorně potvrzen 16. září 1849, císařem Františkem Josefem I. byl však oficiálně schválen a podepsán až 9. prosince 1854.

[18] Reálky byly schváleny císařským nařízením ze dne 2. března 1851. Roku 1853 bylo uzákoněno jednotné vyučování na všech reálkách v Rakousku.

[19] Absolventi gymnázií, kteří chtěli pokračovat ve studiu na technice, museli složit dodatečnou zkoušku z deskriptivní geometrie.

[20] O historii školského systému viz Kádner O., *Vývoj a dnešní soustava školství*, I. díl, II. díl, Sfinx, Praha, 1929, 1931, 549 + 651 stran; Veselá Z., *Vývoj české školy a učitelského vzdělání*, Masarykova univerzita, Brno, 1992, 147 stran; Mikulčák J., *Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918*, editoval Jindřich Bečvář, edice

České země se do celoevropského reformního hnutí ve výuce matematiky a přírodovědných předmětů zapojily již od samého počátku. Garantem a hlavním organizátorem reformních snah v našich zemích byla již od svého vzniku v roce 1862 *Jednota českých matematiků a fyziků*,[21] která nejen zprostředkovávala přebírání zahraničních zkušeností, ale také se sama na reformních aktivitách významně podílela. Má velké zásluhy o rozvoj novodobé české matematicko-fyzikální literatury, pod kterou spadají i středoškolské učebnice. Díky vhodně vedené odborné i organizační činnosti Jednoty dosáhla úroveň výuky matematiky na českých středních školách úrovně předních evropských zemí, a to jak v obsahu výuky, tak i v metodách práce. Analytická geometrie, jejíž zařazení do výuky školské matematiky požadoval F. Klein v Německu od školního roku 1867/1868, byla na reálkách a gymnáziích v habsburské monarchii vyučována prakticky již od úpravy osnov v roce 1854, deskriptivní geometrie, která výrazně přispívala k rozvoji prostorové představivosti, se na českých, resp. moravských reálkách učila již od roku 1874, resp. 1869. Tehdejší zákon o reálkách navíc zdůrazňoval všeobecně vzdělávací charakter těchto škol se zřetelem k matematicko-přírodovědným disciplínám. V rámci úpravy školních osnov v roce 1884 byly do výuky geometrie na střední škole zařazeny i některé partie projektivní geometrie.

Po roce 1860 sílila v souvislosti s uzákoněním výuky v českém jazyce potřeba českých učebnic matematiky pro střední školy. Václav Šimerka (1819–1887) v době svého působení jako suplující učitel na gymnáziu v Českých Budějovicích předložil školským úřadům ke schválení rukopis učebnice algebry, do něhož jako jeden z prvních autorů zařadil též úvodní výklad diferenciálního a integrálního počtu. Školské úřady však zařazení infinitesimálního počtu do středoškolské učebnice tehdy neschválily, a proto V. Šimerka rukopis upravil a vydal jej ve dvou svazcích. První z nich, nazvaný *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia* (1863),[22] obsahoval pouze povinné učivo pro střední školy. Druhý, nazvaný *Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia* (1864) a obsahující výklad infinitesimálního počtu, byl schválen jen jako kniha pomocná.

Je třeba zdůraznit, že matematici v našich zemích pouze nepřejímali reformní myšlenky ze zahraničí, ale sami k reformnímu dění ve světě též přispěli. Jmenujme např. tzv. *Pražské návrhy* (Prager Vorschläge), které přednesl školní rada Karel Zahradníček na 9. německo-rakouském středoškolském dnu 9. dubna 1906 ve Vídni. Byly obsaženy v přednášce *Zur Frage der Infinitesimalrechnung an der österreichischen Mittelschule* [K otázce infinitesimálního počtu na rakouské střed-

---

Dějiny matematiky, svazek 42, Matfyzpress, Praha, 2010, 312 stran. O školských reformách viz Hrubý D., *Školské reformy (2)*, Školské reformy do roku 1948, Učitel matematiky 16(2008), 129–145.

[21] *Jednota českých matematiků a fyziků* byla založena roku 1862 jako *Spolek pro volné přednášky z mathematiky a fysiky.* V roce 1869 byl Spolek přejmenován na *Jednotu českých mathematiků.* Současný název nese od roku 1912; v letech 1921 až 1939 a poté 1945 až 1993 se však používal název *Jednota československých matematiků a fyziků.* O historii Jednoty viz Houdek F., *Dějepis jednoty českých mathematiků v Praze*, JČM, Praha, 1872, 64 stran; Posejpal V., *Dějepis Jednoty českých mathematiků*, JČM, Praha, 1912, 131 stran; Veselý F., *100 let Jednoty československých matematiků a fyziků*, SPN, Praha, 1962, 127 stran; Bečvářová M., *Z historie Jednoty 1862–1869*, edice Dějiny matematiky, svazek 13, Prometheus, Praha, 1999, 138 stran.

[22] Druhé vydání nazvané *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia a reálné školy* vyšlo roku 1868, třetí upravené vydání v roce 1874.

ní škole].[23] V jejím úvodu K. Zahradníček položil otázku, zda mají být prvky infinitesimálního počtu zařazeny do středoškolských osnov, a v jejím průběhu argumentoval jednoznačně ve prospěch kladné odpovědi. Poukazoval zejména na rozvíjení mezipředmětových vztahů mezi matematikou a fyzikou, na potřebnost a vhodnost infinitesimálního počtu při řešení některých úloh. Odvolával se přitom na názory a zkušenosti své i svých kolegů, na zprávy německé komise pro vyučování přírodovědným předmětům a na závěry jednání této komise formulované v Meranském programu. To svědčí o tom, že naše matematická veřejnost byla o reformním dění ve světě velmi dobře informována.[24]

5.5 Marchetova reforma

Na Meranský program, stuttgartské a drážďanské reformní návrhy reagovala v Rakousku-Uhersku *Marchetova reforma učebních osnov*,[25] jež byla vyhlášena dne 8. srpna 1908. Jejím cílem bylo vytvoření jednotného systému středoškolského vzdělávání, které by poskytovalo několik rovnocenných typů středních škol. Její obsah vzešel částečně z ankety vyhlášené rakouským Ministerstvem kultu a vyučování ve Vídni, která proběhla ve dnech 21. až 25. ledna 1908.[26] Stávající střední školy, osmiletá (klasická) gymnázia a sedmileté reálky, byly rozšířeny o nový typ střední školy – osmileté reálné gymnázium s rozšířenou výukou přírodovědných předmětů, jež svou oblibou brzy zastínilo klasické gymnázium. V souvislosti s tím byla diskutována oprávněnost absolventů jednotlivých typů středních škol k vysokoškolskému studiu; maturitní zkoušky ze všech typů středních škol byly uznány za rovnocenné.

V rámci reformy byly vypracovány nové, moderní učební osnovy pro všechny typy středních škol, které byly do praxe zavedeny od školního roku 1909/1910, a to ve všech prvních pěti ročnících najednou. Z hlediska učebního obsahu bylo hlavním výsledkem Marchetovy reformy zařazení elementárních funkcí a některých prvků infinitesimálního počtu do výuky matematiky na reálkách a částečně i na gymnáziích. Mezi učebními metodami doporučenými ministerstvem pro výuku na střední škole byla zdůrazněna heuristická metoda, učitel měl při vyučování usilovat o spolupráci celé třídy.

[23] Viz Österreichische Mittelschule, 1906, 189–203.

[24] Poznamenejme, že ve Francii byly poznatky o elementárních funkcích a základy infinitesimálního počtu do jednotného učebního plánu středoškolské matematiky zařazeny roku 1902. Podobné tendence a reformní snahy se v této době objevily rovněž v Anglii a v USA.

[25] Gustav Marchet (1846–1916), od roku 1882 profesor národního hospodářství na Vysoké škole zemědělské ve Vídni, v období od 2. června 1906 do 15. listopadu 1908 rakouský ministr kultu a vyučování.

[26] V rámci ankety proběhla řada jednání a diskusí nad předloženými návrhy reorganizace obsahu výuky na gymnáziích. Byly projednány možnosti vzniku nových typů středních škol, jejich učební plány, požadovaný rozsah znalostí absolventů, otázka zjednodušení maturitních zkoušek, pravidla přechodu žáků na vyšší vzdělávací stupeň, otázky klasifikace atd. Mezi 70 účastníky ankety bylo rovněž 7 českých zástupců v čele s významným pedagogem a tehdejším poslancem říšské rady Františkem Drtinou (1861–1925). Rozsáhlý soupis a protokol ankety vyšel pod názvem *Die Mittelschul-Enquete 1908* ve Vídni (760 stran).

Kromě obsahových změn přineslo přijetí Meranského programu nový pohled na matematiku a její postavení ve středoškolském vzdělávání. To se promítlo i do některých změn v metodickém zpracování učiva. V souvislosti se snahami rozvíjet funkční myšlení žáků se v geometrii již v sekundě objevily úlohy, v nichž se sledovaly závislosti obsahů rovinných útvarů na velikostech jejich určujících prvků. Lineární funkce se poprvé začaly studovat již v kvartě, užívaly se ke grafickému řešení lineárních rovnic. V sextě byla zavedena kvadratická funkce a grafické řešení kvadratických rovnic, rovinná trigonometrie byla doplněna o grafy goniometrických funkcí. Na všech typech vyšších středních škol se měly probírat základy teorie pravděpodobnosti, analytická geometrie byla rozšířena o využití diferenciálního počtu.[27]

5.6 České učebnice matematiky

Změna školních osnov přijatá v rámci Marchetovy reformy v roce 1908 si vyžádala tvorbu nových učebnic matematiky pro všechny ročníky a typy středních škol, které by respektovaly zamýšlené obsahové a metodické změny. Tento úkol na sebe vzala *Jednota českých matematiků a fyziků*, jež na návrh Karla Petra[28] a Bohumila Kučery[29] zřídila dvě speciální komise, matematickou a fyzikální, které se poprvé sešly na společné schůzi dne 26. dubna 1909. Jejich hlavním úkolem bylo vybrat ze svých řad odborníky na vyučování matematice, kteří by podle nových osnov sepsali učebnice, a zajistit, aby rukopisy nových učebnic prošly přísným recenzním řízením uvnitř Jednoty ještě před jejich oficiálním úředním schvalovacím řízením.

Za autory učebnic pro nižší třídy středních škol byli po širší diskusi vybráni Ladislav Červenka[30] pro aritmetiku a algebru a Miloslav Valouch[31] pro geometrii, za autory učebnic pro vyšší třídy středních škol byli zvoleni pro aritmetiku a alge-

[27] O vývoji vyučování matematice viz Potůček J., *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945*, I. díl – *Vznik a vývoj jednotlivých typů škol a jejich osnov matematiky*, II. díl – *Učebnice matematiky*, Pedagogická fakulta Západočeské univerzity, Plzeň, 1992, 1993, 55 + 49 stran; Vetter Q., *Czechoslovakia*, The National Council of Teachers of Mathematics, The fourth yearbook – *Significant changes and trends in the teaching of mathematics throughout the world since 1910*, Teachers College, Columbia University, New York, 1929, 9–20. Učební plány a osnovy matematiky pro jednotlivé typy škol viz Mikulčák J., *Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918*, editoval Jindřich Bečvář, edice Dějiny matematiky, svazek 42, Matfyzpress, Praha, 2010, 312 stran.

[28] Karel Petr (1868–1950), původně středoškolský učitel matematiky a fyziky, vyučoval na středních školách v Chrudimi, Brně, Přerově a Olomouci. Roku 1902 se habilitoval v matematice na české technice v Brně. Od roku 1903 působil jako mimořádný a od roku 1908 jako řádný profesor matematiky na Filozofické fakultě české univerzity v Praze, kde setrval až do roku 1938. Věnoval se zejména algebře a teorii čísel, spolupracoval na pozvednutí úrovně odborné přípravy středoškolských učitelů matematiky.

[29] Bohumil Kučera (1874–1921), profesor experimentální fyziky, roku 1908 byl jmenován mimořádným a roku 1911 řádným profesorem české univerzity v Praze.

[30] Ladislav Červenka (1874–1947), středoškolský učitel matematiky a deskriptivní geometrie, vyučoval na středních školách v Praze a v Kutné Hoře, v letech 1919 až 1935 působil jako zemský školní inspektor.

[31] Miloslav Valouch (1878–1952), středoškolský učitel matematiky a fyziky, vyučoval na středních školách v Olomouci, Rokycanech a Litomyšli. V roce 1909 byl jmenován profesorem na reálce v Praze, v letech 1918 až 1927 působil na Ministerstvu školství a národní osvěty.

bru Bohumil Bydžovský[32] a pro geometrii Jan Vojtěch[33]. V letech 1910 až 1912 postupně sepsali učebnice aritmetiky a geometrie pro všechny třídy středních škol ve verzích pro gymnázia, reálná gymnázia a reálky.[34] Dočkaly se několika vydání a byly s drobnými úpravami používány až do padesátých let 20. století. Mezi hlavními požadavky kladenými na jejich autory bylo, aby učebnice co nejvíce odpovídaly zamýšleným obsahovým a metodickým změnám učiva, aby středoškolské učebnice byly v souladu s vysokoškolskými a aby v nich byla používána jednotná terminologie a symbolika.[35]

Porovnáme-li nové učebnice s učebnicemi z předcházejícího období,[36] zjistíme, že se liší především výraznou snahou o vysvětlení podstaty veškeré předkládané látky. Nové poznatky jsou odvozovány s využitím předchozích zkušeností žáků, což vede k logicky uspořádanému zpracování látky.[37] Větší důraz je kladen na budování elementárních matematických teorií přiměřeně věku žáků, na logické usuzování a kritické hodnocení získaných výsledků např. ověřováním správnosti výpočtů. Nový způsob zpracování učiva je založen na cyklickém uspořádání osnov matematiky, žáci se během celého studia k jednotlivým tématům postupně několikrát vracejí s tím, že se vždy přidává na obecnosti a látka je probírána na kvalitativně vyšší úrovni. Také tato skutečnost výrazně odlišuje nové učebnice od učebnic vydaných před rokem 1905.

[32] Bohumil Bydžovský (1880–1969), původně středoškolský učitel matematiky a fyziky, vyučoval na středních školách v Kutné Hoře, Praze a Kladně. Roku 1909 se habilitoval v matematice na univerzitě v Praze a začal přednášet na české technice v Praze. Roku 1917 byl jmenován profesorem matematiky na pražské univerzitě, v roce 1918 působil jako tajemník na Ministerstvu školství a národní osvěty. V roce 1930 byl jmenován děkanem Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy, v letech 1946 a 1948 byl rektorem univerzity.

[33] Jan Vojtěch (1879–1953), původně středoškolský učitel matematiky a fyziky, vyučoval na středních školách v Praze, Olomouci, Lipníku nad Bečvou a Brně. Jako profesor matematiky působil v letech 1915 až 1923 na české technice v Brně a v letech 1923 až 1949 na technice v Praze.

[34] Seznam schválených učebnic, vydaných Jednotou českých mathematiků a fysiků podle osnov z r. 1908 a 1909, viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 42(1913), 527–528.

[35] Pro mezinárodní instituce byla o českých středoškolských učebnicích matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky vypracována podrobná zpráva *Die Lehrbücher für Mathematik, darstellende Geometrie und Physik an den Mittelschulen mit böhmischer Unterrichtssprache*, jejímiž autory byli za matematiku Karel Vorovka (1879–1929), za deskriptivní geometrii Ladislav Červenka a za fyziku Václav Posejpal (1874–1935). Zpráva vyšla roku 1914 ve Vídni jako 13. sešit *Bericht über den mathematischen Unterricht in Österreich*. Vorovkova zpráva o učebnicích aritmetiky a geometrie obsahuje stručný úvod, přehled českých učebnic vydaných v letech 1861 až 1912 a rozbor vybraných učebních textů (55 stran).

[36] Např. Fischer F. X., *Arithmetika pro nižší třídy středních škol* (2. opravené vydání, 1873, 249 stran); Tůma F., *Arithmetika pro prvou a druhou třídu škol gymnasijních* (1886, 208 stran); Tůma F., *Arithmetika pro třetí a čtvrtou třídu škol gymnasijních* (1886, 175 stran); Starý V., Machovec F., *Arithmetika pro nižší třídy gymnasií* (6. opravené vydání, 1891, 276 stran); Sommer J., *Arithmetika pro školy reálné, díl 1., 2., 3.* (2. vydání, 1900, 1901, 1902, 96 + 80 + 86 stran); Jarolímek Č., *Geometrie pro čtvrtou třídu škol reálných* (1874, 92 stran); Jarolímek V., *Geometrie pro II. a III. třídu škol realných (Planimetrie)* (1891, 96 stran); Strnad A., *Geometrie pro vyšší školy reálné* (1893, 324 stran); Jarolímek V., *Geometrie pro nižší třídy škol realných* (3. vydání, 1897, 188 stran).

[37] Jednota českých matematiků a fyziků požadovala, aby autoři učebnic pro vyšší třídy středních škol sepsali také učebnice pro IV. třídu nižší střední školy, které měly obsahovat shrnutí a systematizaci probraného učiva, neboť nižší střední škola poskytovala relativně ucelené vzdělání. Autoři, kteří tuto rekapitulaci provedli, tak přesně věděli, na jakých poznatcích mohou ve vyšších třídách stavět a na jaké učivo mohou dále navazovat.

Na následujících stránkách se podrobněji podíváme na učebnice B. Bydžovského a J. Vojtěcha, které na více než tři desetiletí ovlivnily výuku matematiky na našich středních školách. Pokusíme se stručně popsat jejich nejdůležitější rysy, poukážeme na nové tematické okruhy výkladu, jejich metodické zpracování, odbornou úroveň a náročnost učiva. Hlavní pozornost věnujeme především částem pojednávajícím o geometrických transformacích.[38]

V nových učebnicích B. Bydžovského a J. Vojtěcha[39] jsou poprvé v souladu s požadavkem vytyčeným v nových osnovách soustavně zkoumány funkce a je jim věnována značná pozornost. Studují se vlastnosti, průběh a grafické znázornění jednotlivých funkcí v závislosti na hodnotách příslušných koeficientů. Všude, kde je k tomu vhodná příležitost, je výklad ilustrován geometrickou problematikou, oproti učebnicím z předchozího období často upozorňuje na souvislosti mezi algebrou, matematickou analýzou a geometrií, např. při grafickém řešení soustav rovnic. Současně s logaritmickými funkcemi jsou studovány funkce exponenciální. Je konstatována souměrnost grafů obou funkcí podle osy I. a III. kvadrantu. Pojem inverzní funkce však zaveden není a až do roku 1945 se v učebnicích neobjevil. Souvisí to zřejmě s tehdejším pojetím výkladu problematiky funkcí, které byly studovány vždy pouze jako funkce konkrétní (lineární, kvadratické apod.). Obecná definice funkce na středoškolské úrovni vůbec vyslovena nebyla. Ve studiu jednotlivých funkcí však nové učebnice šly do značné hloubky. Při vyšetřování jejich průběhu byly určovány i lokální a globální extrémy – tímto způsobem se u nás do středoškolské matematiky postupně dostávaly prvky diferenciálního počtu. V učebnici *Mathematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií* [BV2] je již v partii o funkcích diferenciálnímu a integrálnímu počtu věnována značná pozornost. Kromě základních pojmů jakými jsou spojitost, limita a derivace funkce, je zde vyložen rozvoj funkcí v řady a výpočet omezeného i neomezeného integrálu.

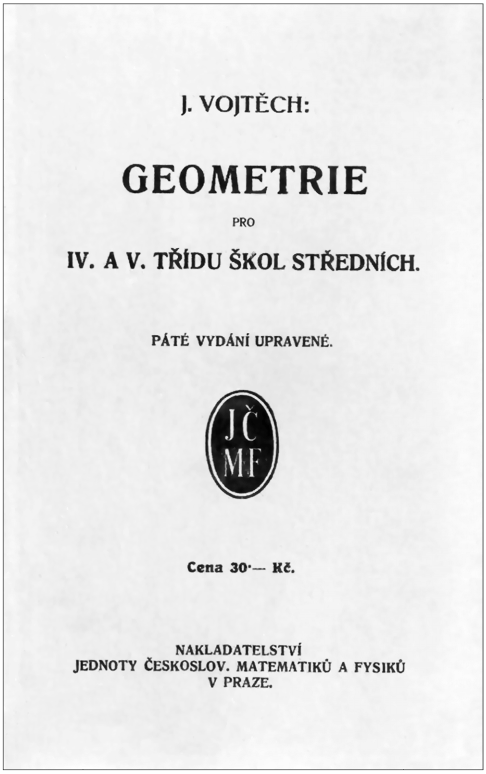
Je třeba konstatovat, že nové učebnice matematiky byly odborně na vysoké úrovni. Později se objevily oprávněné připomínky, že často přesahovaly chápání žáků a vedly k jejich neúměrnému přetěžování. V dalších vydáních byly proto některé obtížné partie vynechány nebo alespoň zjednodušeny.

[38] Podrobný rozbor vývoje obsahu českých středoškolských učebnic přesahuje zaměření a cíle této monografie. Zájemcům lze doporučit např. následující práce: Lávička M., *Vývoj vyučování analytické geometrie na českých středních školách od Exner-Bonitzova programu (1849)*, disertační práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 1999; Němečková M., *Vývoj vyučování komplexním číslům na českých středních školách od Exner-Bonitzova programu (1849)*, disertační práce, Univerzita Karlova, Matematický ústav, Praha, 2002; Melcer M., *Finanční matematika v českých učebnicích (Od Marchetovy reformy)*, edice Dějiny matematiky, svazek 55, Matfyzpress, Praha, 2013, 366 stran. Analýzu učebnic deskriptivní geometrie v současné době v rámci své disertační práce dokončuje V. Moravcová, syntetické geometrii však zatím nebyla věnována dostatečná pozornost.

[39] Bydžovský B., *Arithmetika pro IV. a V. třídu gymnasií a reálných gymnasií* (1910, 181 stran); Bydžovský B., *Arithmetika pro IV. třídu škol reálných* (1910, 149 stran); Bydžovský B., *Arithmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií* (1911, 154 stran); Bydžovský B., *Arithmetika pro V. až VII. třídu škol reálných* (1911, 196 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro IV. třídu gymnasií a reálných gymnasií* (1910, 142 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro IV. třídu reálek* (1910, 94 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro V. třídu gymnasií* (1910, 134 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro V. třídu reálných gymnasií* (1910, 122 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro VI. třídu gymnasií a reálných gymnasií* (1911, 131 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro VI. třídu reálek* (1911, 164 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií* (1912, 147 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro VII. třídu reálek* (1912, 166 stran).

V nových středoškolských učebnicích matematiky se poprvé na základě doporučení osnov objevily také grupy geometrických transformací.

Vojtěchovy učebnice geometrie pro IV. a V. třídu středních škol,[40] zpracované v duchu Meranského programu, kladly na geometrické transformace velký důraz. V učebnici *Geometrie pro IV. a V. třídu škol středních* [V2] se v partii věnované planimetrii z této problematiky objevila následující témata: osová souměrnost, posouvání, otáčení, shodnost trojúhelníků a mnohoúhelníků, souměrnost čtyřúhelníků, pohyby rovinných útvarů, stejnolehlost a podobnost rovinných útvarů, v dodatku pro reálky byla navíc zkoumána homologie. Partie věnovaná stereometrii zahrnovala posouvání a otáčení, souměrnost (podle bodu, přímky a roviny včetně osové souměrnosti vyšších řádů[41]), stejnolehlost a podobnost.


J. VOJTĚCH:

GEOMETRIE

PRO

IV. A V. TŘÍDU ŠKOL STŘEDNÍCH.

PÁTÉ VYDÁNÍ UPRAVENÉ.

JČ
MF

Cena 30·— Kč.

NAKLADATELSTVÍ
JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
V PRAZE.

Obr. 38: Obálka učebnice [V2]

[40] Vojtěch J., *Geometrie pro IV. třídu gymnasií a reálných gymnasií* (1910, 142 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro IV. třídu reálek* (1910, 94 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro V. třídu gymnasií* (1910, 134 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro V. třídu reálných gymnasií* (1910, 122 stran).

[41] *Útvar prostorový má osu souměrnosti n-tého řádu, jestliže může zaujmouti n poloh různých a přece totožných, totiž $n-1$ nových poloh, v nichž splývá s polohou původní.* Uvedené nové polohy takto souměrného útvaru získáme jeho otočením kolem dané osy o úhel velikosti $\frac{360^\circ}{n}$ a dále o jeho násobky až do hodnoty $(n-1)\cdot\frac{360^\circ}{n}$. Viz [V2], str. 181.

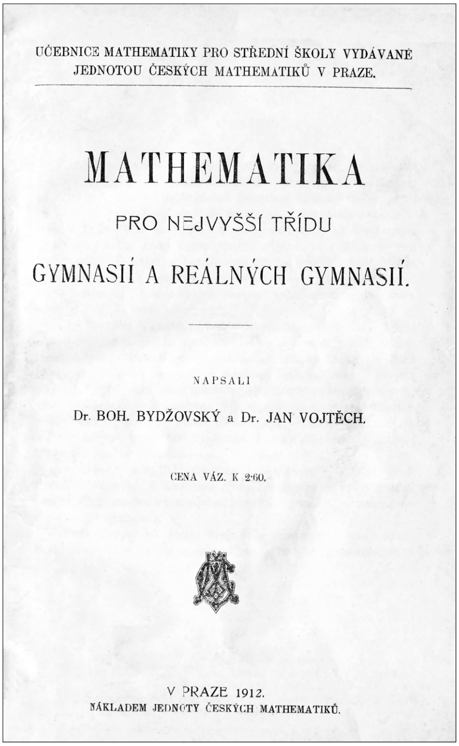
V úvodu Vojtěchovy učebnice [V2] jsou shodnost, podobnost a souměrnost zavedeny takto:

> *Dva geometrické útvary slují shodné (kongruentní), je-li možno jeden z nich uvésti pohybem v takovou polohu, aby se úplně (ve všech svých částech) ztotožňoval s druhým; čili shodné útvary představují týž útvar na různých místech. Shodné útvary mají týž tvar i touž velikost. Pozorujeme, že lze změniti daný útvar v nový tak, aby tvar jeho zůstal ve všech částech zachován (zmenšíme-li jej nebo zvětšíme, na př. čočkou); i nazýváme takový nový útvar podobným danému. . . .*
> *Pozorujíce obraz nějakého útvaru v rovném zrcadle, seznáváme, že se liší od předmětu pouze opačným uspořádáním svých částí; jmenujeme jej souměrným k danému.* ([V2], str. 5–6)

Na tento úvod navazuje následující vymezení obsahu geometrie:

> *Geometrie vyšetřuje ty vlastnosti útvarů, které se nemění pohybem jejich, proměnou v útvary podobné a proměnou v útvary k nim souměrné.* ([V2], str. 6)

V této formulaci je již patrná Kleinova jednotná definice geometrie, autor ji však podal co nejpřijatelnějším způsobem s přihlédnutím k rozumovým schopnostem žáků odpovídajícího věku. Ačkoliv to není explicitně řečeno, omezil se přirozeně pouze na elementární eukleidovskou geometrii; existence jiných geometrií není ani naznačena.



UČEBNICE MATHEMATIKY PRO STŘEDNÍ ŠKOLY VYDÁVANÉ JEDNOTOU ČESKÝCH MATHEMATIKŮ V PRAZE.

MATHEMATIKA

PRO NEJVYŠŠÍ TŘÍDU

GYMNASIÍ A REÁLNÝCH GYMNASIÍ.

NAPSALI

Dr. BOH. BYDŽOVSKÝ a Dr. JAN VOJTĚCH.

CENA VÁZ. K 2·60.

V PRAZE 1912.

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

Obr. 39: Titulní list učebnice [BV2]

Bydžovského a Vojtěchova učebnice *Mathematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií* [BV2] téma geometrických transformací pojímá vzhledem k předpokládané vyšší rozumové vyspělosti žáků mnohem obecněji, jsou zde podrobně vyloženy základní myšlenky obsažené v Kleinově Erlangenském programu. Kniha je rozdělena do tří částí; první část (str. 2–136) obsahuje přehled matematického učiva probíraného v posledním ročníku střední školy, druhá část (str. 137–159) zahrnuje výklad o základních pojmech logiky, o základech matematiky, jejím charakteru a praktickém i kulturním významu, třetí část (str. 159–179) představuje stručný přehled historie matematiky od starověku až po tehdejší dobu.

Geometrickým transformacím je v této učebnici věnována 5. kapitola nazvaná *Transformace* (str. 68–82). Hned v jejím úvodu je zdůrazněn základní význam pojmu *transformace* a pojmu *grupa* v geometrii. Grupa transformací je posléze, po nastínění základních představ, definována následujícím způsobem:

> *Grupa transformací je taková soustava transformací, že kterékoli dvě z nich postupně provedené (a tedy i libovolný jich počet) lze nahraditi jedinou transformací téže soustavy. Transformace, při které nenastává žádná změna, sluje identická a patří vždy ke grupě.* ([BV2], str. 68)

Z dnešního pohledu v této definici chybí explicitní požadavek existence inverzní transformace ke každé transformaci. Speciálně jsou jako příklady grup uvedeny pohyby v rovině, rovinné translace, rotace kolem pevného středu v rovině, pohyby v prostoru a šroubové pohyby[42] kolem téže osy. Dále je poznamenáno, že při grupě pohybů v rovině nebo v prostoru jsou tvar, velikost a smysl (uspořádání, tj. orientace) geometrických útvarů *invariantní*. V dalším textu je pozornost věnována souměrnosti, je zdůrazněn zásadní rozdíl mezi souměrnými útvary v rovině (podle přímky) a v prostoru (podle roviny).

> *Rovinné útvary spolu (dle osy) souměrné nelze ztotožniti žádným pohybem, při kterém body útvarů těch setrvají v rovině jejich; možno je však ztotožniti překlopením kolem osy souměrnosti, tedy pohybem v prostoru. I jsou dva rovinné útvary dle osy souměrné přece shodny, odpovídající sobě části jejich jsou však v opačných smyslech uspořádány (jsou „obráceně“ shodny). … Prostorové útvary dle roviny souměrné nejsou shodny, protože jich vůbec nelze ztotožniti; shodují se však ve všech svých částech sobě odpovídajících, lišíce se pouze smyslem jejich uspořádání. Mezi souměrnými útvary v rovině a v prostoru jest tedy důležitý rozdíl.* ([BV2], str. 70–71)

Současně je zdůvodněno, že souměrnosti v rovině ani v prostoru grupy netvoří.

> *Proměníme-li útvar U_1 v útvar souměrný U_2 (dle osy v rovině nebo dle roviny v prostoru), tento pak opět (dle libovolné osy, po případě roviny) v útvar souměrný U_3, jsou U_1 a U_3 téhož smyslu a lze je ztotožniti pohybem. Dvě transformace v útvar souměrný po sobě provedené nelze tedy nahraditi proměnou téhož druhu; proto netvoří proměny v útvar souměrný ani v rovině ani v prostoru grupy.* ([BV2], str. 71)

[42] Šroubovým pohybem se rozumí pohyb v prostoru složený z otočení kolem přímky (osy) a posunutí ve směru této přímky.

Rozšířením grupy pohybů (rovinných nebo prostorových) o souměrnosti však získáme opět grupu; při ní jsou invariantní tvar a velikost geometrických útvarů.

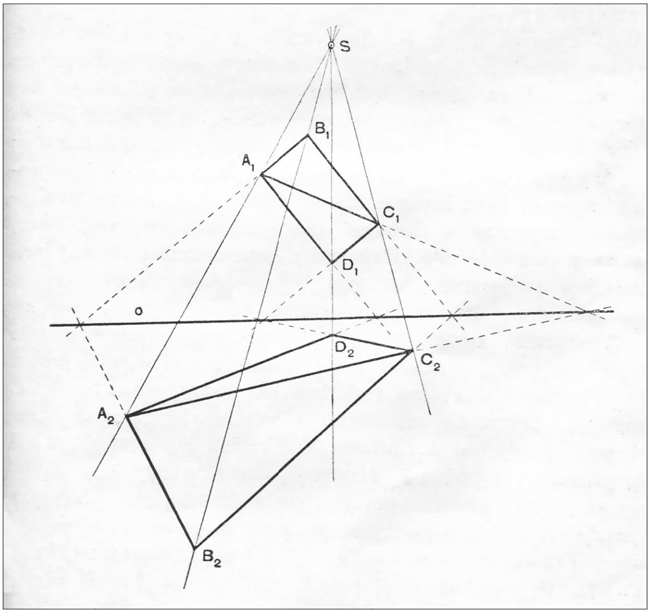
Další odstavec je věnován podobnosti a homothetickým transformacím, které rovněž tvoří grupu; při ní jsou invariantní tvar geometrických útvarů a velikost úhlů. Je uvedeno, že grupa pohybů v rovině nebo v prostoru (rozšířená v rovině o souměrnosti podle osy) rozšiřuje se grupou transformací homothetických v grupu transformací podobnostních. Při ní již zůstává invariantní pouze tvar geometrických útvarů.

Následuje vymezení elementární (metrické) geometrie jakožto geometrie, která přísluší ke grupě podobnostních transformací:

> *V geometrii t. zv. elementární čili metrické vyšetřujeme ty vlastnosti útvarů geometrických, jež jsou invariantní při všech transformacích útvarů těch v útvary podobné (proměny v útvary shodné a v útvary souměrné sem počítaje), t. j. při grupě transformací podobnostních. V tomto smyslu geometrie elementární přísluší ke grupě transformací podobnostních.* ([BV2], str. 72)

V dalších odstavcích se učebnice zabývá projektivní geometrií. Ocitujme pro ilustraci definici homologie (viz obr. 40):

> *Dva rovinné útvary U_1 a U_2 jsou homologické (perspektivní) dle určitého bodu (středu homologie) S a dle určité přímky (osy homologie) o, jestliže dvojice jejich bodů sobě odpovídajících leží na paprscích téhož svazku o středu S a dvojice jejich přímek sobě odpovídajících protínají se na téže ose o.* ([BV2], str. 73)



Obr. 40: Homologie mezi dvěma rovinnými útvary ([BV2], str. 73)

Je uvedeno, že homologické transformace v rovině ani v prostoru netvoří grupy. Zachovává se při nich však incidence geometrických prvků (bodů, přímek a rovin). Projektivnost mezi dvěma útvary je následně v rovině definována takto:

> *Dva rovinné útvary slují kollineární (homografické) čili projektivní, jestliže v nich sobě odpovídají prvky stejnojmenné a všechny incidence jsou zachovány.* ([BV2], str. 74)

Projektivní transformace v rovině i v prostoru již grupy tvoří.

V dalším textu se připomíná rozšiřování eukleidovských přímek, rovin i prostoru o „prvky v nekonečnu" a princip duality[43]. Poslední odstavec nese název *Význam transformací pro úvahy geometrické.* Geometrické transformace jsou zde charakterizovány jako důležitý pomocný nástroj při studiu vlastností geometrických útvarů.[44] Dále je naznačena možnost využití geometrických transformací k přenášení vlastností z původního útvaru na útvar transformovaný.[45] Ocitujme úvod posledního odstavce obsahující tyto hlavní myšlenky:

> *Geometrické transformace jsou samy o sobě důležitým předmětem úvah geometrických. Jsou však také názornou a vydatnou pomůckou při vyšetřování útvarů geometrických: všímáme si buď útvarů a vztahů při transformaci invariantních, nebo srovnávajíce útvar transformovaný s útvarem původním, odvozujeme vlastnosti onoho z vlastností tohoto. V tom bývá jednak úspora práce, ježto věta dokázaná pro některý útvar převádí se potom (se zřetelem k transformaci) na útvar transformovaný, jednak ulehčení, protože každou úvahu geometrickou můžeme provésti pro nejjednodušší z těch útvarů, jež spolu transformací souvisí.* ([BV2], str. 80)

V závěru uvedeného odstavce je nastíněn význam geometrických transformací pro uspořádání geometrie; každá grupa geometrických transformací charakterizuje příslušnou geometrii.[46] Kapitola věnovaná geometrickým transformacím končí stručnou poznámkou:

> *Uvedený význam grup transformačních pro podstatu a uspořádání geometrie vytkl první Felix Klein (1872).* ([BV2], str. 82)

---

[43] *Zákon duálnosti v rovině: Ke každé větě geometrie projektivní lze připojiti novou větu tím, že v ní slovo **bod** nahradíme slovem **přímka** a naopak. Zákon duálnosti v prostoru: Každá věta projektivní geometrie přechází ve větu rovněž správnou, nahradíme-li v ní slovo **bod** slovem **rovina** a naopak.* Viz [BV2], str. 78–79.

[44] Např. translace slouží ke studiu geometrických útvarů obsahujících rovnoběžné přímky nebo roviny. Rotaci lze využít k vyšetřování kolmých přímek i rovin, útvarů obsahujících kružnice nebo útvarů souměrných. Podobnost útvarů zkoumáme na základě jejich stejnolehlosti (homothetie).

[45] Např. lze pomocí vhodné transformace některé vlastnosti kružnice (např. věty o vzájemné poloze přímky a kružnice nebo věty o pólu a poláře) přenést obecně na kuželosečky. Zdrojem mnoha nových geometrických vět týkajících se vlastností transformovaných útvarů jsou transformace homologické nebo transformace polární.

[46] *Ke grupě geometrických transformací patří soustava geom. útvarů a jich vlastností, jež jsou při transformacích těch invariantní; grupa ta charakterisuje příslušnou soustavu vět čili příslušnou geometrii.* Viz [BV2], str. 81.

V 11. kapitole nazvané *Mathematická věda a její význam* nalezneme následující vymezení obsahu geometrie:

> *Obsah geometrie můžeme děliti podle předmětu nebo podle methody. Vzhledem k předmětu je pronikavé rozdělení geometrie podle grup transformací, při kterých jsou vlastnosti geometrických útvarů invariantní; rozeznáváme tak geometrii příslušnou ke grupě transformací (pohybových a) podobnostních (geometrie metrická čili elementární, jejíž nejjednodušší části bývají dosud nazývány planimetrie, stereometrie a trigonometrie), geometrii příslušnou ke grupě transformací projektivních (geom. projektivní), geometrii vlastností, jež jsou invariantní při všech proměnách, kterými se neporušuje souvislost útvarů (tvar jejich se však jinak libovolně mění, tak zvaná analysis situs, k níž na př. patří Eulerova věta o mnohostěnech).* ([BV2], str. 156)

Na závěr ještě ocitujme krátký úryvek z poslední, 13. kapitoly věnované historickému přehledu vývoje „novodobé" matematiky. Autoři v něm poukazují na stěžejní pojmy „současné" matematiky, jimiž jsou pojem *funkce* a pojem *transformace*:

> *Mathematika doby nejnovější má několik charakteristických rysů. Celým vývojem mathematiky novodobé připravována byla vláda dvou pojmů: pojmu funkce a pojmu transformace. Nauka o funkcích a nauka o transformacích došly a docházejí stoupajícího rozkvětu nejen v užším smyslu mathematických odvětví, nýbrž pronikají všechno moderní myšlení mathematické. ... Theorie transformací geometrických nabyla vynikajícího významu geometrií projektivní; odtud spěje k dalšímu a všestrannému rozvoji.* ([BV2], str. 175)

Na Bydžovského a Vojtěchovy učebnice *Mathematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií* [BV2] a *Mathematika pro nejvyšší třídu reálek* [BV1], jež se od verze pro gymnázia obsahově příliš neliší, vyšla roku 1913 v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky recenze Bohuslava Hostinského (1884–1951).[47] Recenze vyznívá ve prospěch obou učebnic celkem příznivě, její autor se však neztotožňuje s užitím termínu „grupa transformací". Připomeňme stručně část jeho vyjádření:

> *V geometrii jsou důkladně vyloženy principy geometrie metrické i projektivní a pojem transformace ... Jádro celé knihy tvoří první část (mathematická), jež jest psána veskrze přesně a v moderním duchu. ... Spisovatelé právem upozorňují na několika místech na to, jaký význam má theorie transformací pro nynější mathematiku. Název „grupa transformací", kterého důsledně užívají, nepokládám za vhodný; myslím, že by spíše se doporučovalo přidržeti se způsobu, jakého právě při pojmenování tohoto důležitého pojmu bylo užito v literatuře německé, francouzské, italské a anglické, voliti totiž známé, v řeči dávno užívané slovo; název „skupina transformací" úplně by vyhověl.*

[47] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 42(1913), 201–202.