1. Historický přehled geometrických transformací

První náznaky pojmu *geometrická transformace* lze nalézt ve starém Řecku před více než dvěma tisíci lety. Zpočátku se jednalo pouze o vztah mezi dvěma rovinnými, případně prostorovými objekty, který umožnil jednoduché řešení některých geometrických problémů. S postupným rozvojem geometrie byla transformacím věnována stále větší pozornost, získané poznatky byly dále prohlubovány a zobecňovány, byly zaváděny stále složitější typy transformací. Jejich aplikace v dalších oborech lidské činnosti jsou všestranné, příkladem je využití perspektivy v malířství nebo stereografické projekce při konstrukci map. V dnešní době se transformace využívají k řešení řady netriviálních problémů z různých oblastí matematiky, včetně např. neeukleidovské geometrie.

V dalším textu se pokusíme nastínit postupný vývoj chápání jednotlivých typů geometrických transformací od nejstarších dob až do 19. století. U každé transformace popíšeme základní myšlenku, poukážeme na její pravděpodobně první výskyt a uvedeme osobnosti, které s daným typem transformace pracovaly a pojem transformace dále rozvíjely.

1.1 Shodnost a podobnost

Nejstarším příkladem geometrické transformace je shodnost. Staří Řekové považovali dva objekty za shodné, pokud existoval pohyb, reálný nebo myšlenkový, který jeden objekt přemístil na druhý tak, že se kryly. Nevýhodou tohoto přístupu byla skutečnost, že pohyb byl vždy chápán pouze v souvislosti s jednotlivým objektem, s nímž byl pevně svázán. Skládání pohybů dvou různých objektů nebylo možno uvažovat, a tudíž se Řekové nemohli ani vzdáleně přiblížit k pojmu grupa.[1] Další překážkou mohlo být tehdejší chápání roviny jako omezené části plochy.

Geometrické pohyby se v předeukleidovské geometrii poměrně hojně využívaly. Svědčí o tom např. skutečnost, že matematik a fyzik Proklos (410–485) ve svých komentářích k Eukleidovým *Základům* poukázal na fakt, že řecký filozof a matematik Eudémos (asi 350–290 př. n. l.) ve svém díle *Dějiny geometrie* připsal Thalétovi z Milétu (7.–6. stol. př. n. l.) důkazy následujících tvrzení:

- Kruh je svým průměrem rozdělen na dvě shodné části.
- Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou shodné.
- Vrcholové úhly jsou shodné.
- Dva trojúhelníky, které se shodují v jedné straně a dvou úhlech, jsou shodné.

[1] Významným krokem, který později vedl k využití teorie grup v geometrii, byla myšlenka rozšíření pohybu svázaného s jedním objektem na pohyb celé roviny. Tento nový pohled již dával skládání různých pohybů smysl. Autorem této, z pohledu geometrických transformací revoluční myšlenky byl August Ferdinand Möbius (1790–1868). O jeho příspěvku k teorii geometrických transformací je podrobně pojednáno v kapitole 2 této monografie.

Thalétovy důkazy přitom nemohly být založeny na žádných axiomech ani pomocných větách, neboť v jeho době ještě nebyl vybudován ani axiomatický systém, ani systém základních vět. Výše uvedená tvrzení se týkají shodnosti objektů (půlkruhů, úhlů, trojúhelníků) a Thalés je patrně dokázal na základě představ o ztotožnění uvažovaných objektů pomocí „shodných zobrazení“, i když je tento pojem v jeho době ještě předčasný.

Thalés rovněž vypočítal výšku pyramidy tím, že změřil délku jejího stínu a délku stínu svislé tyče známé délky a využil jednoduchý poměr založený na podobnosti trojúhelníků.[2] Podle [Kol] navrhl navíc způsob, jak určit vzdálenost lodě od břehu. Z věže nebo ze skály na břehu se pomocí jednoduchého přístroje změřil úhel mezi svislým směrem a paprskem zaměřeným k lodi. Výška pozorovatelny nad hladinou moře byla přitom známá. Situace se ve zmenšeném měřítku sestrojila a naměřená vzdálenost se vynásobila příslušným koeficientem. Řešení tak bylo opět založeno na podobnosti trojúhelníků a úměrnosti stran ležících proti shodným úhlům.

V dnešním smyslu *shodné* objekty Thalés nazýval *podobné*. Označení *shodné* pro objekty stejného tvaru a velikosti zavedli patrně Pýthagorejci (6.–4. stol. př. n. l.), kteří věřili, že takové objekty jsou tvořeny shodným počtem bodů. Termín *podobné* objekty později získal moderní, obecnější význam. Eukleidés a jeho žáci *shodné* objekty nazývali *podobné a stejné*.[3]

Eukleidés z Alexandrie (asi 325–265 př. n. l.) uvedl v I. knize *Základů* (řecky *Stoicheia*, latinsky *Elementa*) následující tři věty o shodnosti trojúhelníků a v dalším textu se na ně odkazuje. Jedná se o klasické věty školské matematiky, dnes krátce označované jako *sus*, *sss* a *usu*.

> *Když mají dva trojúhelníky dvě strany (střídavě) s dvěma stranami stejné a úhly stejnými stranami sevřené mají stejné, budou i základnu základně míti rovnou a trojúhelník s trojúhelníkem bude stejný i ostatní úhly s ostatními úhly, proti nimž leží stejné strany, (střídavě) budou stejné.* ([Eu], kniha I, věta IV, str. 4)

> *Když mají dva trojúhelníky dvě a dvě strany střídavě stejné a mají též základnu základně rovnou, budou též úhly stejnými přímkami sevřené míti stejné.* ([Eu], kniha I, věta VIII, str. 6)

> *Když mají dva trojúhelníky dva úhly dvěma úhlům jednotlivě rovné a jednu stranu jedné straně rovnou buď při stejných úhlech nebo proti jednomu ze stejných úhlů, budou míti též ostatní strany rovné ostatním stranám i zbývající úhel úhlu zbývajícímu.*
> ([Eu], kniha I, věta XXVI, str. 14)

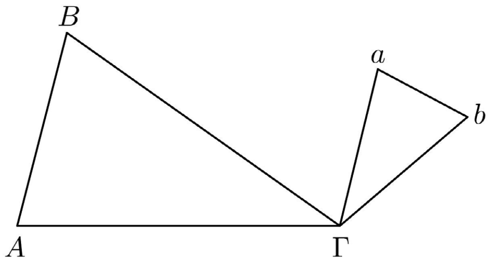
[2] Místo tyče možná využil své vlastní postavy; viz [Kol], str. 83.

[3] *Stejné pak i podobné (shodné) jsou útvary tělesové omezené rovinami podobnými, stejnými počtem i velikostí.* Viz [Eu], kniha XI, definice 10, str. 238.

Shodnost a podobnost byly během dalšího vývoje často využívány k důkazům, že dvě úsečky jsou shodné, nebo že jeden geometrický útvar je „násobkem" jiného geometrického útvaru. S postupným rozvojem dalších typů zobrazení se na shodnost a podobnost začalo stále více pohlížet pouze jako na speciální případy obecnějších zobrazení.

Z modernějších prací věnovaných podobnosti uveďme alespoň krátký článek *O středu podobnosti* (De centro similitudinis),[4] jehož autorem je Leonhard Euler (1707–1783). Ukázal v něm, že pro libovolné dva podobné útvary v rovině existuje tzv. střed podobnosti – bod Γ takový, že pokud a, b a A, B jsou dvě dvojice odpovídajících si bodů, potom trojúhelníky Γab a ΓAB jsou podobné. Prakticky tím dokázal, že každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod.

> *Si habeantur (Fig. 1) duae figurae similes in eodem plano descriptae, quarum maioris quodpiam latus sit AB, minoris vero latus respondens ab, semper dabitur in eodem plano certum punctum Γ, quod ad utramque figuram similiter referatur, ita ut figurae ΓAB et Γab sint inter se similes, hocque punctum Γ appelletur centrum similitudinis binarum figurarum similium propositarum, quod ergo quomodo quovis casu inveniri queat, hic investigemus.*



Obr. 1: Střed podobnosti v Eulerově článku (viz str. 154)

1.2 Pohyby v geometrii

První představy o *pohybu* v geometrii, tj. v našem pojetí *transformace*, využívali Pýthagorejci poměrně často. Např. přímku chápali jako stopu pohybujícího se bodu, rovinu jako stopu pohybující se přímky.

Archýtás z Tarentu (asi 428–365 př. n. l.), člen pýthagorejské školy, využil pohyb při řešení klasické řecké úlohy zdvojení krychle (tzv. Délský problém).[5]

[4] Viz Nova acta academiae scientiarum imperialis Petropolitanae 9(1791), 154–165. L. Euler předložil svůj článek petrohradské akademii věd již v říjnu roku 1777.

[5] Úloha zdvojení krychle spočívá v nalezení délky hrany krychle, jejíž objem je roven dvojnásobku objemu zadané krychle. Vyžaduje řešení geometrickou konstrukcí pouze pomocí kružítka a pravítka. O legendě, která je s touto úlohou spjata, včetně důkazu její neřešitelnosti viz Bečvář J., Fuchs E. (ed.), *Historie matematiky I*, edice Dějiny matematiky, svazek 1, Jednota českých matematiků a fyziků, Brno, 1994, 71–97.

Označme a délku hrany zadané krychle. Archýtás uvažoval (v dnešní symbolice a ve vhodně zvolené soustavě souřadnic) tři rotační plochy: válcovou plochu určenou kružnicí $x^2 + y^2 = 2ax$, kuželovou plochu $x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2$ a axoid (hranici anuloidu) $x^2 + y^2 + z^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$, který vznikl *rotací* kružnice $x^2 + z^2 = 2ax$ kolem souřadné osy z. Všechny tři uvedené plochy se protnou v bodě P, jehož souřadnice $[x, y, z]$ splňují rovnosti

$$\frac{2a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}.$$

Vzdálenost bodu P od počátku zvolené soustavy souřadnic představuje hledanou délku hrany zdvojené krychle.

Eukleidés ve svých *Základech* definoval kružnici, aniž by využil pohyb. Jeho definice koule, kužele a válce jsou však již kinematické, pohyb v sobě zahrnují. Koule vznikne rotací půlkruhu kolem jeho průměru, kužel vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné jeho odvěsny a válec vznikne rotací obdélníku kolem jedné jeho strany.

> *Kruh jest útvar rovinný, objímaný jednou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu vnitř útvaru vedené přímky všecky sobě rovny jsou.* ([Eu], kniha I, definice 15, str. 1)

> *Koule jest útvar omezený tím, že se kolem pevného průměru polokruhu polokruh otočí, až se opět vrátí na totéž místo, odkud se počal otáčeti.* ([Eu], kniha XI, definice 14, str. 238)

> *Kužel jest útvar omezený tím, že se trojúhelník pravoúhlý otočí kolem pevné jedné ze stran pravý úhel svírajících, až se opět vrátí na totéž místo, odkud se počal otáčeti.* ([Eu], kniha XI, definice 18, str. 238)

> *Válec jest útvar omezený tím, že se rovnoběžník pravoúhlý otočí kolem pevné jedné ze stran rovnoběžníku pravý úhel svírajících, až se opět vrátí na totéž místo, odkud se počal otáčeti.* ([Eu], kniha XI, definice 21, str. 238)

Uvedený způsob definování základních rotačních těles patrně odráží starší tradici, později ustoupil do pozadí. Řecký matematik a astronom Theodosius (asi 160–90 př. n. l.) ve svém díle *Sphaerica* definoval kouli (kulovou plochu, tj. sféru) staticky, podobně jako Eukleidés definoval kružnici.[6]

Na druhou stranu, např. slavný filozof Aristotelés ze Stageiry (384–322 př. n. l.) byl proti využití pohybu v geometrii, geometrické objekty považoval za nehybné.[7] Zastával názor, že rovina je obecnější (abstraktnější) než těleso, protože postrádá

[6] Viz Kunitzsch P., Lorch R., *Theodosius: Sphaerica*, Arabic and Medieval Latin translations, Boethius: Texte und Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, svazek 62, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 2010, 431 stran; definice sféry viz kniha 1, definice 1.

[7] Podle Aristotela matematika nepracuje s reálnými, ale abstraktními objekty, není proto přípustné užívat v matematice pohyb.

jeden jeho rozměr, přímka je obecnější než rovina, protože postrádá její šířku, a bod je obecnější než přímka, protože postrádá její délku. Tedy přímka nemůže být složena z bodů, rovina z přímek a těleso z rovin. Slovy Aristotela: nic, co je spojitého, nelze složit z jednotlivostí. Proto tedy nelze přímku získat pohybem bodu, rovinu pohybem přímky a těleso pohybem roviny.[8]

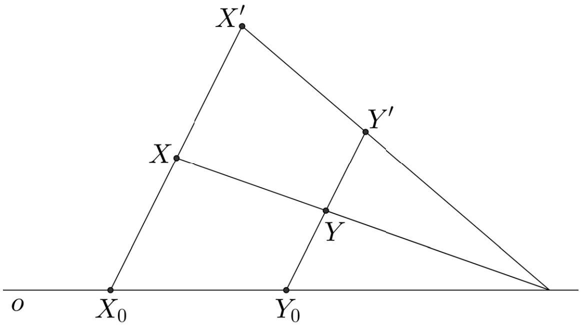
Arabští matematici Thābit ibn Qurra (830–901) a Abū Alī ibn al-Haytham (asi 965–1039) tento Aristotelův přístup kritizovali a pohyby v geometrii hojně využívali. Naopak Omar Khayyam (1048–1131) Aristotelovy názory sdílel a ve svých komentářích k Eukleidovým *Základům* kritizoval přístup ibn al-Haythama. Namítal, že není žádných pochyb, že přímka může existovat pouze v rovině, je její částí, a nemůže jí tedy předcházet, nemůže se bez ní pohybovat. Stejně tak přímka nemůže vzniknout pohybem bodu, protože přímka svou podstatou, svou existencí bodu předchází.

Další matematici blízkého a středního východu i západní Evropy ve svých geometrických pracích pohyby využívali pravidelně a systematicky, a to jak při řešení geometrických problémů, tak při důkazech některých tvrzení.[9]

Prvními doloženými geometrickými transformacemi, které jsou složitější než jednoduché pohyby, jsou osová afinita a stejnolehlost (homothetie).

1.3 Osová afinita

Osová afinita je určena osou afinity o a dvojicí odpovídajících si bodů (viz obr. 2). Jedná se o zobrazení, které úsečku zobrazí opět na úsečku, přičemž přímky, v nichž obě úsečky leží, se protínají na ose afinity. Spojnice odpovídajících si bodů jsou navzájem rovnoběžné, určují tzv. směr afinity. Charakteristika afinity k je definována jako poměr vzdáleností obrazu bodu a jeho vzoru od průsečíku jejich spojnice s osou afinity, tj. $k = \frac{|X'X_0|}{|XX_0|}$ (viz obr. 2). Body ležící na ose afinity jsou samodružné. Osová afinita zachovává rovnoběžnost.



Obr. 2: Osová afinita s osou afinity o a charakteristikou $k = 2$

[8] Viz *Aristoteles' Werke*, Erster Band: Acht Bücher Physik, Griechisch und Deutsch und mit sacherklärenden Anmerkungen herausgegeben von Carl Prantl, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1854, 528 stran.

[9] Viz Luther I. O., *The geometric transformations in the medieval Near and Middle East*, Istoriko-matematičeskie issledovanija 36(1995), 40–60 (Russian).

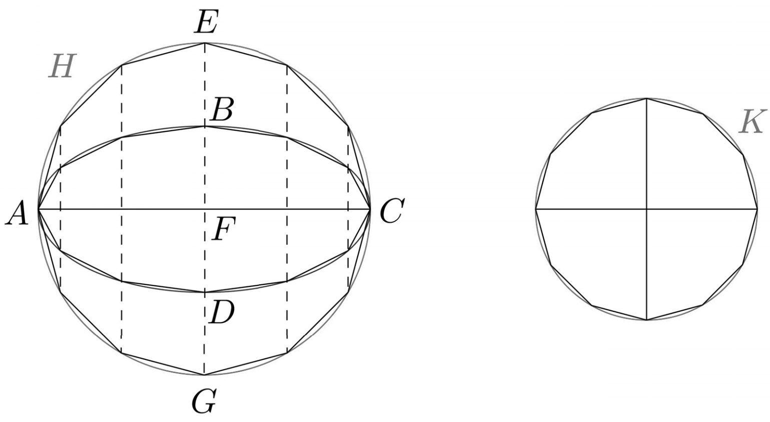
Osová afinita se poprvé objevila v pojednání *O kónoidech a sféroidech* (Peri kōnoeideōn kai sphairoeideōn), jehož autorem je Archimédés ze Syrákús (287–212 př. n. l.), jeden z největších přírodovědců starověku.[10] Věta 4 tohoto pojednání říká, že poměr obsahu libovolné elipsy a obsahu kruhu sestrojeného nad její hlavní osou je stejný jako poměr délek vedlejší a hlavní osy (viz citace na obr. 3).[11]

δʹ.

Πᾶν χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κωνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον ἴσαν τᾷ μείζονι διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἐλάσσων διάμετρος αὐτᾶς ποτὶ τὰν μείζω, τὰν τοῦ κύκλου διάμετρον.

Obr. 3: Archimédés – *O kónoidech a sféroidech*, věta 4

Nechť je dána elipsa (viz obr. 4). Nad její hlavní osou uvažujme kruh H, jeho obsah označme S_H. Sestrojme další kruh K tak, aby pro jeho obsah S_K platilo $S_K : S_H = |BD| : |EG|$. Potom obsah kruhu K je roven obsahu dané elipsy. Archimédovo zdůvodnění je následující (důkaz je veden sporem).



Obr. 4: Archimédův důkaz využívající osovou afinitu

[10] Archimédés své pojednání uvedl dopisem Dositheovi, v němž shrnul své nové výsledky a podal definice ploch, jimiž se v dalším textu zabýval. Pravoúhlým kónoidem rozuměl v dnešní terminologii rotační paraboloid, tupoúhlý kónoid je Archimédovo označení pro dvoudílný rotační hyperboloid. Termín sféroid Archimédés užíval pro rotační elipsoid.

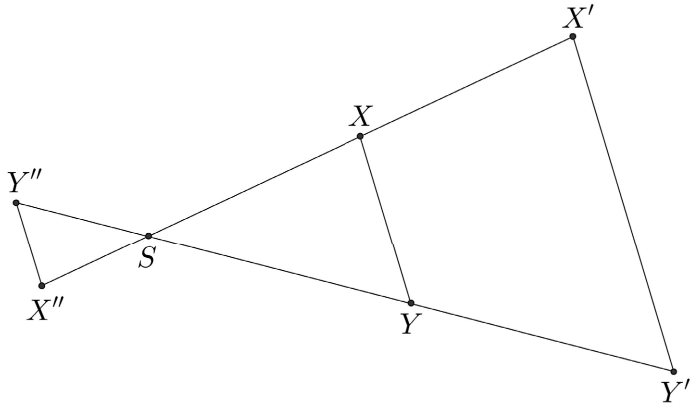
[11] *Každá plocha ohraničená řezem ostroúhlého kuželu má ku kruhu majícímu průměr rovný většímu průměru řezu ostroúhlého kuželu tentýž poměr, jako její menší průměr ku většímu,* [*neboli*] *ku průměru kruhu.* Citace viz Heiberg J. L. (ed.), *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. I, B. G. Teubner, Leipzig, 1910, str. 306.

Kdyby byl obsah kruhu K větší než obsah dané elipsy, pak Archimédés do kruhu K vepíše n-úhelník, kde n je sudé číslo, jehož obsah je také větší než obsah dané elipsy, do kruhu H vepíše jemu podobný n-úhelník, spojí úsečkami dvojice jeho vrcholů, které jsou souměrně sdruženy podle hlavní osy elipsy, označí jejich průsečíky s elipsou a ukáže, že z těchto bodů vzniklý mnohoúhelník je k vepsanému mnohoúhelníku v poměru $|BD| : |EG|$; vepsaný mnohoúhelník je přitom ve stejném poměru k mnohoúhelníku vepsanému kruhu K. Tedy mnohoúhelník vepsaný uvažované elipse má stejný obsah jako mnohoúhelník vepsaný kruhu K, což je spor s předpokladem, že mnohoúhelník vepsaný kruhu K má obsah větší než elipsa. Předpoklad, že obsah kruhu K je menší než obsah elipsy, se vyvrátí zcela analogicky.

Archimédés v důkazu využil pravoúhlou osovou afinitu určenou osou AC, jejíž charakteristika je rovna poměru délek hlavní a vedlejší osy elipsy. Ukázal, že poměr obsahů ploch vepsaných n-úhelníků je roven poměru obsahů ploch geometrických útvarů, které získáme z těchto n-úhelníků pro n jdoucí do nekonečna. Dále odvodil, že obsah elipsy mající poloosy délek a a b je roven πab a poloměr kruhu K je roven $\sqrt{ab}$ (geometrickému průměru délek obou poloos).

1.4 Stejnolehlost

Stejnolehlost (homothetie, centrální dilatace) je určena středem stejnolehlosti S a tzv. koeficientem stejnolehlosti $\kappa \neq 0$. Jedná se o podobné zobrazení, které úsečku zobrazí na úsečku s ní rovnoběžnou, přičemž střed stejnolehlosti, bod a jeho obraz jsou kolineární. Absolutní hodnota koeficientu stejnolehlosti určuje poměr podobnosti, jeho znaménko určuje umístění obrazu vzhledem ke středu stejnolehlosti (viz obr. 5).

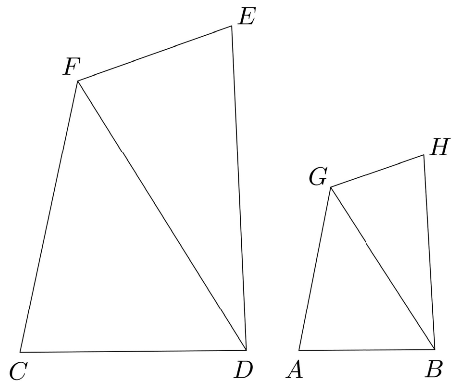


Obr. 5: Stejnolehlosti se středem S a koeficienty $\kappa_1 = 2$ a $\kappa_2 = -\frac{1}{2}$

První výskyt stejnolehlosti lze nalézt již v Eukleidových *Základech*, kde je mimo jiné uvedena následující „úloha“:

> *Na dané přímce narýsuj útvar přímkový danému útvaru přímkovému podobný a podobně položený (stejnolehlý).*
>
> ([Eu], kniha VI, věta XVIII, str. 93)

Z Eukleidova řešení (viz obr. 6) je však zřejmé, že je zde stejnolehlost jako zobrazení obsažena pouze implicitně. Eukleidés prakticky vyšetřoval pouze vztah mezi dvěma podobnými útvary, přičemž využíval podobné trojúhelníky.



Obr. 6: Eukleidovo řešení úlohy ([Eu], str. 93)

Stejnolehlost dále zmínil řecký geometr Apollónios z Pergy (262–190 př. n. l.) v pojednání *Rovinná místa* (Peri topoi epiphanoi, De locis planis),[12] o němž se dochoval záznam díky práci *Synagōgē mathēmatikē*, jejímž autorem je řecký matematik Pappos z Alexandrie (asi 290–350). Apollónios základní vlastnosti stejnolehlosti pravděpodobně znal, podrobnější informace se však nedochovaly.[13]

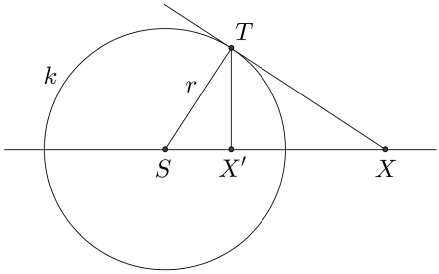
1.5 Kruhová inverze

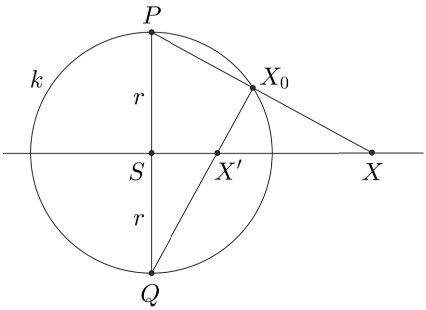
Apollónios ve výše uvedené práci *Rovinná místa* rovněž poprvé uvažoval *kruhovou inverzi*. Jedná se o zobrazení, které je určeno středem S a tzv. koeficientem inverze $\kappa \neq 0$. Střed inverze, bod a jeho obraz jsou kolineární, přičemž součin vzdáleností obrazu a vzoru od středu inverze je roven absolutní hodnotě koeficientu inverze; platí tedy $|SX|\cdot|SX'| = |\kappa|$. Znaménko koeficientu inverze určuje umístění obrazu vzhledem ke středu inverze. Obraz středu inverze se klade do nevlastního bodu, tj. do nekonečna.

[12] Pojednání sestávalo ze dvou knih, autor v nich provedl klasifikaci geometrických míst, speciální pozornost přitom věnoval „rovinným místům“, tj. přímkám a kružnicím.

[13] Fragmenty z Apollóniova pojednání *Rovinná místa* viz Heiberg J. L. (ed.), *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*, vol. II, B. G. Teubner, Leipzig, 1893, 115–117.

Kruhová inverze je involutorním zobrazením.[14] Zobrazuje zobecněné kružnice (přímky nebo kružnice) opět na zobecněné kružnice. Dva základní způsoby konstrukce obrazu X' bodu X v kruhové inverzi se středem S a koeficientem inverze $\kappa = r^2$ jsou uvedeny na obr. 7.[15] Kružnice k se středem S a poloměrem r je množinou všech samodružných bodů v dané kruhové inverzi. Z involutornosti zobrazení plyne, že bod X je naopak obrazem bodu X' v zadané kruhové inverzi.





Obr. 7: Konstrukce obrazu bodu v kruhové inverzi

Umístíme-li soustavu souřadnic s počátkem O do středu S dané kružnice a označíme-li $X = [x, y]$ a $X' = [x', y']$, získáme analytické vyjádření kruhové inverze ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}\,, \\ y' &= \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}\,. \end{aligned}$$

Apollónios znal základní vlastnosti kruhové inverze. Ve svém osmisvazkovém díle *Pojednání o kuželosečkách* (Kōnika)[16] se již věnoval obecně inverzím na všech (regulárních) kuželosečkách, tedy nejen na kružnici, ale rovněž na elipse, hyperbole a parabole.[17] Kruhová inverze byla po řadu následujících století matematiky opomíjena a nepříliš využívána.

[14] Říkáme, že zobrazení f je *involutorní* (*involutivní*), jestliže složeno samo se sebou dává identitu, tj. $f \circ f =$ identita. Involutorní zobrazení je tedy samo k sobě inverzní.

[15] Popis obou konstrukcí včetně důkazu jejich správnosti viz Kubát V., Trkovská D., *Analytická geometrie v afinních a eukleidovských prostorech*, Matfyzpress, Praha, 2011, 318–319.

[16] Originální řecký text včetně latinského překladu viz Heiberg J. L. (ed.), *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*, vol. I, II, B. G. Teubner, Leipzig, 1891, 1893. První tři knihy včetně jejich překladu jsou otištěny v prvním svazku (str. 1–451), čtvrtá kniha a její překlad jsou uveřejněny ve druhém svazku (str. 1–97). Pátá, šestá a sedmá kniha se dochovaly pouze v arabském překladu, osmá kniha je ztracena.

[17] Názvy elipsa, hyperbola a parabola zavedl právě Apollónios. Do té doby se pro ně používaly termíny sečna ostroúhlého, tupoúhlého a pravoúhlého kužele.

Kruhové inverzi se patrně po Apollóniovi jako první blíže věnoval až švýcarský geometr Jacob Steiner (1796–1863). Je mu přisuzován objev inverze v plné obecnosti (1824). Sám v této souvislosti hovořil o „Wiedergeburt und Auferstehung“ (znovuzrození a vzkříšení). Jeho statě věnované *inverzní geometrii* však nebyly publikovány, našly se až v jeho pozůstalosti.[18]

Belgický matematik Adolphe Quetelet (1796–1874) odvodil roku 1827 výše uvedené analytické vyjádření kruhové inverze.[19]

Giusto Bellavitis (1803–1880) sepsal roku 1836 patrně první systematickou studii o kruhové inverzi nazvanou *Teorie inverzních útvarů a její využití v elementární geometrii* (Teoria delle figure inverse, e loro uso nella geometria elementare).[20] Zformuloval v ní definici inverze (viz citace na obr. 8) a vyložil její základní vlastnosti (konformnost, zachování cirkularity – zobecněné kružnice se zobrazí na zobecněné kružnice). Později pojem inverze zobecnil do trojrozměrného prostoru.

3. Dati quanti si vogliano punti $A, B, C\ldots$ (Fig. 1), ed un punto I, che diremo *centro d'inversione*, se sulle rette $IA, IB, \ldots$ sieno prese rispettivamente le distanze $IA' = \frac{i^2}{IA}$, $IB' = \frac{i^2}{IB}, \ldots$ i punti $A', B'\ldots$ si diranno *inversi* dei punti $A, B, \ldots$ e le intere figure $ABC\ldots A'B'C'\ldots$ saranno *inverse* l'una dall'altra. La lunghezza costante i si chiamerà *raggio d'inversione*. L'oggetto delle presenti ricerche sarà stabilire la relazione fra due *figure inverse*, e specialmente trovare la proprietà di una di esse conoscendo quelle dell'altra. Perciò la teoria delle figure inverse può riguardarsi come un ramo della Geometria ch'io chiamo *derivata*, appunto perchè in essa le proprietà di una figura si *derivano* da quelle di un'altra (*). Esporremo da prima la legge di *derivazione* colla quale si passa dalle equazioni o equipollenze relative ad una data figura alle equazioni o equipollenze relative alle figure inverse della proposta; il resto della Memoria consisterà nell'applicazione di questa legge ad alcuni casi particolari, e così seguendo un metodo semplice ed uniforme saranno trovati o risolti alcuni teoremi o problemi.

Obr. 8: G. Bellavitis – *Teoria delle figure inverse, e loro uso nella geometria elementare*; úryvek ze str. 126–127

[18] Steinerovu vědeckou pozůstalost uloženou v knihovně přírodovědné společnosti v Bernu objevil asi třicet let po jeho smrti Johann Heinrich Graf (1852–1918). Kromě dopisů a vědeckých článků obsahovala i nepublikované rukopisy, jež J. H. Graf předal profesoru Friedrichu Bützbergerovi, aby je kriticky zhodnotil a případně publikoval. Podle něj se Steinerovo explicitní vyjádření principu kruhové inverze datuje k 8. únoru 1824. Později bylo otištěno v práci Bützberger F., *Über Bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion*, B. G. Teubner, Leipzig, 1913, 50–55. Recenze této práce viz Emch A., *The discovery of inversion*, Bulletin of the American Mathematical Society 20(1914), 412–415. O objevu kruhové inverze více viz Patterson B. C., *The origins of the geometric principle of inversion*, Isis 19(1933), 154–180.

[19] Viz Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Bruxelles 4(1827), str. 112.

[20] Viz Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto 6(1836), 126–141. Z názvu tohoto díla pochází dnešní termín *kruhová inverze*.

Během dalších let kruhovou inverzi znovu objevilo několik matematiků. Např. William Thomson (lord Kelvin, 1824–1907) v letech 1845 až 1847 v rámci studia elektrostatiky hovořil o *transformaci s reciprokými průvodiči* (v originále *transformation by reciprocal radii*) a své fyzikální úvahy rozšířil na geometrický prostor. Uvedený termín od W. Thomsona převzal Joseph Liouville (1809–1882) a modifikoval jej na *transformace reciprokými poloměry* (v originále *transformation par rayons vecteurs réciproques*).[21] Dokázal, že se jedná o jedinou nelineární transformaci v prostoru, která je konformní (zachovává úhly mezi dvěma křivkami).

Studium kruhové inverze završil August Ferdinand Möbius (1790–1868). V práci *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung*[22] z roku 1855 provedl významné zobecnění inverze. Čistě geometrickými prostředky položil základy obecné bodové transformace roviny, která kružnice zobrazuje opět na kružnice (tzv. *kruhové transformace*). Přijal následující předpoklady: zobrazení je bijekcí, obrazem čtveřice bodů ležících na kružnici jedné roviny je čtveřice bodů incidentních s kružnicí druhé roviny (kružnicemi nazýval i přímky, tj. uvažoval tzv. zobecněné kružnice), je zachována spojitost (dvěma nekonečně blízkým bodům jedné roviny odpovídají dva nekonečně blízké body druhé roviny).

Po vyloučení lineárních zobrazení dospěl k závěru, že v každé z rovin existuje právě jeden bod, který se v eukleidovském prostoru nemůže zobrazit do žádného bodu druhé roviny (centrální bod, střed), a ke každé z uvažovaných rovin je třeba přidat po jednom bodu, který bude obrazem, resp. vzorem centrálního bodu roviny vzorů, resp. obrazů (odtud *Möbiova rovina*). Jedním z jeho výsledků je tzv. *Möbiův faktorizační teorém*:

> *Každou vzájemně jednoznačnou transformaci eukleidovské roviny, která zobecněné kružnice zobrazuje opět na zobecněné kružnice, lze složit z kruhových inverzí a osových souměrností.*

Poznamenejme, že kruhové transformace patří mezi konformní zobrazení. Analyticky je lze popsat jako lineární lomené transformace komplexní roviny.

Na Möbiovy výsledky dále navázali Carl Friedrich Gauss (1777–1855), který odvodil analytické vyjádření kruhových transformací v komplexní rovině, a Arthur Cayley (1821–1895), jenž ukázal, že každá kruhová transformace je složením kruhové inverze v Möbiově rovině a libovolného pohybu.[23]

Teorie kruhových transformací byla brzy zobecněna do trojrozměrného prostoru. Zásadní krok v tomto směru představoval Liouvilleův teorém, který byl publikován v jednom z dodatků pátého vydání Mongeovy knihy *Application de l'analyse à la géométrie*.[24] J. Liouville zde dokázal, že konformní zobrazení trojrozměrného prostoru jsou generována mimo jiné sférickými inverzemi, a představují tedy zobecnění kruhových transformací roviny.[25]

---

[21] Viz Journal de mathématiques pures et appliquées 12(1847), str. 276.

[22] Viz Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe 2(1855), S. Hirzel, Leipzig, 529–595.

[23] Viz Cayley A., *Note on the „Circular Relation" of Prof. Möbius*, The quarterly journal of pure and applied mathematics 2(1858), str. 162.

[24] Viz Monge G., Liouville J., *Application de l'analyse à la géométrie*, Bachelier, Paris, 1850; Note VI. *Extension au cas des trois dimensions de la question du tracé géographique*, 609–616.

[25] Konformní zobrazení trojrozměrného prostoru generují tři typy transformací – shodnost, stejnolehlost a speciální konformní transformace (složení souměrnosti a sférické inverze).

1.6 Promítání

Promítání (projekce) se podle dochovaných záznamů hojně využívalo ve starém Řecku a Římě. Známý římský stavitel a architekt Marcus Vitruvius Pollio (1. stol. př. n. l.) ve svém obsáhlém díle *Deset knih o architektuře* (De architectura libri decem)[26] popsal tři projekce využívané tehdejšími staviteli. Podle jeho slov se jednalo o *ichnografii*, *orthografii* a *scénografii* (viz citace na obr. 9).

> **Diſpoſitio autem eſt rerum apta collocatio, elegansq́; in compoſitionibus effectus operis cum qualitate. Species diſpoſitionis, quæ Græcè dicuntur ἰδέαι, hæ ſunt, Ichnographia, Orthographia, & Scenographia. Ichnographia eſt circini regulæq́; modice continens vſus, ex qua capiuntur formarum in ſolis arearum deſcriptiones. Orthographia autem eſt erecta frontis imago, modiceq́; picta rationibus operis futuri figura. Item Scenographia eſt, frontis & laterum abſcedentium adumbratio, ad circiniq́; centrum omnium linearum reſponſus. Hæ naſcuntur ex cogitatione, & inuentione.**

Obr. 9: M. Vitruvius Pollio – *De architectura libri decem*; úryvek z vydání z roku 1552, kniha I, kapitola II, str. 12

Cílem ichnografie (*ichnos* = stopa, *grapho* = psaní) bylo vytvoření obrazového modelu (projektu, plánu) prostorové situace pomocí pravítka a kružítka, v dnešní terminologii se jedná o konstrukci *horizontální projekce*. Orthografie (*orthos* = = kolmý) představovala zakreslení nárysu, v dnešní terminologii jde o konstrukci *frontální projekce*. Scénografie (*skēnē* = scéna) zahrnovala *perspektivu*. Lze se domnívat, že tyto tři projekce byly známy již Řekům několik století před naším letopočtem (viz [Ro], str. 117).

Pappos z Alexandrie v VII. knize *Synagōgē mathēmatikē* vyložil geometrické vlastnosti středového promítání a perspektivy. Odkazoval se na Eukleidovo ztracené dílo *Porismata*,[27] které se tomuto tématu snad také věnovalo. Pappos uvedl i větu, již lze v dnešní terminologii vyjádřit takto (viz obr. 10):

Jsou-li dány tři různé přímky AB, AC a AD, které protínají dvě další přímky FB a FE, potom platí následující rovnost $\frac{|FB|\cdot|DC|}{|FD|\cdot|BC|} = \frac{|FE|\cdot|HG|}{|FH|\cdot|GE|}$, *neboli* $\frac{|FB|}{|FD|} : \frac{|CB|}{|CD|} = \frac{|FE|}{|FH|} : \frac{|GE|}{|HG|}$.

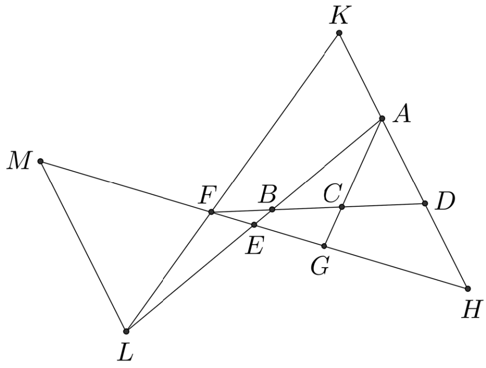
Protože body F, E, G, H získáme z bodů F, B, C, D projekcí z bodu A, je výše uvedená Pappova rovnost speciálním případem obecné vlastnosti každé projekce, podle níž se při projekci zachovává dvojpoměr čtyř kolineárních bodů[28].

---

[26] Je k dispozici český překlad; viz Marcus Vitruvius Polio, *Deset knih o architektuře*, z latinského originálu přeložil Alois Otoupalík, Svoboda, Praha, 1979, 430 stran.

[27] Spis *Porismata* tvořily tři knihy, úryvkovitě se jejich obsah zachoval v pracích, jež sepsal Pappos. *Porisma tuto jest úkol, jímž se žádá, by se na základech daných vyhledala veličina určitých vlastností. V základech porisma značí poučku, jež z důkazu poučky jiné vysvítá jasně sama sebou* (*důsledek*). Citace viz [Eu], první strana nestránkovaného Úvodu.

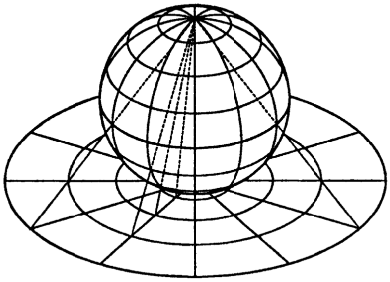
[28] Nechť A, B, C, D jsou čtyři kolineární body (předpokládáme $A \neq D$), pro něž platí $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} = l \cdot \overrightarrow{BD}$, kde $k, l \in \mathbb{R}$ (díky předpokladu je $l \neq 0$). Dvojpoměrem bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) nazveme číslo $(A,B,C,D) = \frac{k}{l}$.



Obr. 10: Zachování dvojpoměru čtyř kolineárních bodů při projekci

1.7 Stereografická projekce

Příkladem jedné z nejvýznamnějších projekcí, jež byla využívána již ve starověku, je *stereografická projekce.* Jedná se o průmět sféry z jednoho jejího bodu (pólu) do tečné roviny vedené diametrálně protilehlým bodem, nebo do roviny s ní rovnoběžné (viz obr. 11). Kružnice procházející pólem se zobrazí do přímek, ostatní kružnice se zobrazí opět do kružnic. Stereografická projekce je konformním zobrazením (zachovává úhly mezi dvěma křivkami).



Obr. 11: Stereografická projekce

Základy stereografické projekce položil patrně Hipparchos (190–120 př. n. l.).[29] První písemné zmínky však o ní nacházíme až u Vitruvia v díle *Deset knih*

[29] Hipparchos byl jeden z největších antických astronomů, který sestavil první velký katalog hvězd, jenž obsahoval přesné polohy více než 800 stálic. Zdůrazňoval nutnost přesných pozorování a význam matematických výpočtů. Vymyslel nové přístroje pro měření výšky hvězd, stanovil sklon zemské osy k ekliptice, určil délku slunečního roku s chybou jen 6 minut. Astronomické poznatky aplikoval v geografii, zavedl pojmy zeměpisná délka a šířka, jež určoval na základě pozorování zatmění Měsíce. Chtěl prověřit heliocentrický model vesmíru. Vyšel ze správné úvahy, že pokud Země obíhá kolem Slunce, pak se musí v průběhu roku měnit vzájemná poloha hvězd na nočním nebi. Příslušná měření skutečně provedl, ale změny ve vzájemné poloze hvězd nezaznamenal. Proto heliocentrický model vesmíru zavrhl.

o architektuře a v Ptolemaiově pojednání *Zobrazení sféry do roviny* (Aplōsis epiphaneias sphairas, Planisphaerium)[30]. Klaudios Ptolemaios (asi 85–165)[31] popsal průmět nebeské sféry (její severní polokoule) na rovinu rovníku, přičemž za střed projekce vzal jižní pól. Naznačil, že průmětem libovolné kružnice je opět kružnice, kromě největších kružnic procházejících pólem, jež se promítnou jako přímky. Obecný důkaz tohoto tvrzení však nepodal, spokojil se s důkazem pouze pro několik speciálních případů. Nepoukázal ani na skutečnost, že stereografická projekce zachovává velikosti úhlů. Dále sepsal spis *O projekci* (Peri analēmmatos, Analemma),[32] v němž se zabýval ortogonální projekcí nebeské sféry do horizontální roviny, kterou využíval k řešení různých problémů sférické astronomie.

Astroláb

Vitruvius i Ptolemaios se věnovali astronomickým pozorováním nebeské sféry, k jejímu proměřování využívali starověké přístroje *arachné*[33] a *astroláb* (astrolabon organon)[34]. Konstrukce astrolábu je založena na stereografické projekci nebeské sféry z nebeského pólu (viz obr. 12). Arabskými učenci byla stereografická projekce nazývána *tasṭīḥ al-asṭurlāb.* Termín stereografická projekce (*stereon* = = těleso) zavedl až François D'Aguillon (1566–1617) v díle *Šest knih o optice* (Opticorum libri sex) z roku 1613. Jak Vitruvius, tak Ptolemaios ve svých pracích využívali základní vlastnosti stereografické projekce, avšak bez důkazů.

První souhrnnější pojednání o stereografické projekci včetně důkazů základních vlastností uvedl až Aḥmad al-Farghānī (9. stol.) v práci *Kniha o konstrukci astrolábu* (Kitāb ṣan'at al-asṭurlāb). Stereografické projekci věnoval první kapitolu (v anglickém překladu Survey of the geometric propositions from which the form of the astrolabe is deduced)[35] a dokázal v ní mimo jiné, že kružnice procházející pólem se zobrazí do přímek a ostatní kružnice se zobrazí opět do kružnic, přičemž není obecně obrazem středu kružnice střed kružnice získané zobrazením. V dalších kapitolách je pak již popsána konstrukce samotného astrolábu.

---

[30] Viz Heiberg J. L. (ed.), *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia*, vol. II: Opera astronomica minora, B. G. Teubner, Leipzig, 1907, 225–259.

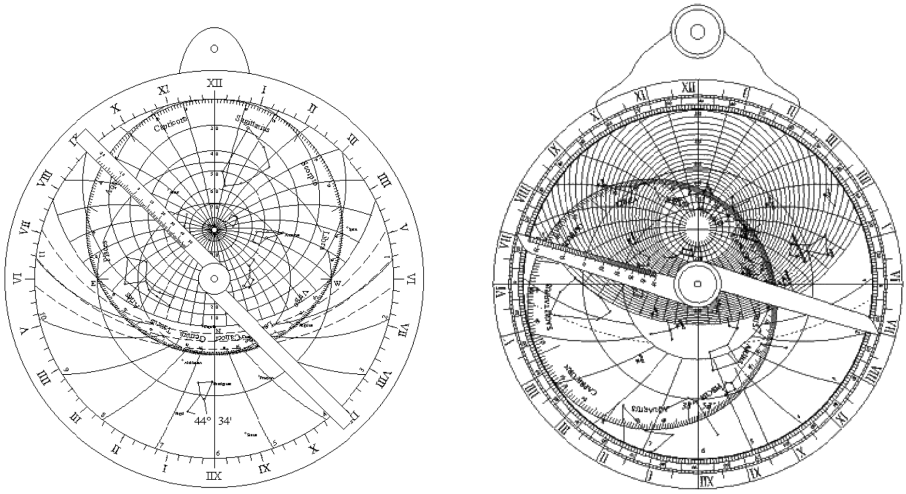
[31] Klaudios Ptolemaios je autorem *Almagestu* (Mathématiké syntaxis, Megalé syntaxis), astronomického spisu, jenž představoval encyklopedii tehdejšího hvězdářského vědění. Byl zastáncem geocentrického systému, Zemi pokládal za střed vesmíru, okolo něhož obíhají Slunce, Měsíc, planety a hvězdy. Jeho popis sluneční soustavy byl považován za správný po celých patnáct století. Z nejjasnějších viditelných hvězd sestavil 48 souhvězdí, jež mu připomínala určité obrazce postav, zvířat nebo věcí. Mnohá z nich se používají v moderní astronomii dodnes.

[32] Viz Heiberg J. L. (ed.), *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia*, vol. II: Opera astronomica minora, B. G. Teubner, Leipzig, 1907, 187–223.

[33] *Arachné* sloužil zejména jako sluneční hodiny, umožňoval však měřit i výšku hvězd nad horizontem. Sestával z polokruhového ciferníku a otáčivého bubínku, na němž byla znázorněna nebeská klenba včetně některých hvězd a zvěrokruh s dvanácti nebeskými znameními.

[34] *Astroláb* v sobě zahrnuje zjednodušenou mapu hvězdné oblohy (nebeské sféry). Obsahuje pevné i pohyblivé části, které umožňují modelovat pohyby nebeských těles, měřit jejich úhlovou výšku nad horizontem, zeměpisné souřadnice i místní čas. Hlavní ciferník je rozdělen na dvanáct dílů podle znamení zvěrokruhu, střed ciferníku představuje nebeský pól.

[35] Viz *Al-Farghānī: On the astrolabe*, Arabic text edited with translation and commentary by Richard Lorch, Boethius: Texte und Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, svazek 52, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 2005, 447 stran.



Obr. 12: Astroláb

Další astronomové a matematici středověku se pokoušeli využít ke konstrukci astrolábu jiné geometrické transformace. Perský astronom Abū Ḥāmid al-Ṣaghānī (10. stol.) ve svém díle *Kniha o projekci do roviny* (Kitāb fīal-tasṭīḥ al-tamm) navrhl nahradit stereografickou projekci sféry do roviny z jejího pólu projekcí z libovolného bodu souřadnicové osy; v ní se kružnice na sféře zobrazí obecně do kuželoseček.

V knize *Přehled možností konstrukce astrolábu* (Isti'āb al-wujūh al-mumkina fīṣan'at al-asṭurlāb), kterou sepsal Abū l-Rayḥān al-Bīrūnī (973–1048), autor nejprve popsal různé způsoby a metody konstrukce tohoto přístroje. V dalším textu navrhl za základ konstrukce tzv. *válcovou projekci*, tj. ortogonální projekci podle osy, která je limitním případem projekce al-Ṣaghānīho, pokud střed projekce klademe do nekonečna. Tato projekce zobrazí kružnice buď na kružnice, nebo na elipsy.

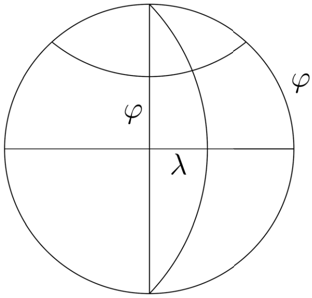
Tvorba map

Stereografická projekce se prakticky využívá k zobrazení povrchu Země do roviny, tj. v kartografii. Vzhledem k tomu, že je konformním zobrazením, jsou takové mapy velmi užitečné např. pro mořeplavce.

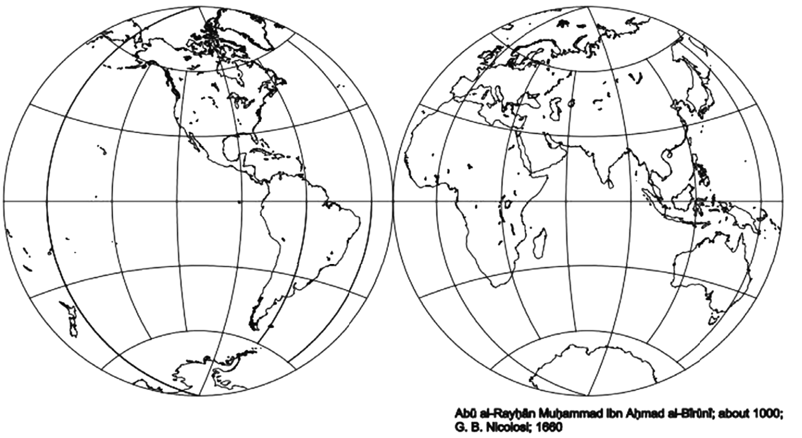
Stereografickou projekci při tvorbě map užíval Abū l-Rayḥān al-Bīrūnī v díle *Pojednání o zobrazení souhvězdí a o zakreslení zemí na mapu* (Risala fi tastih al-suwar wa-tabtih al-kuwar). V něm též popsal další typ projekce sféry do roviny, která je dnes známa jako tzv. *kulová projekce* (globular projection).[36] Polosféra se

[36] Tuto projekci nalezl sám al-Bīrūnī, znovu ji objevili Giovanni Battista Nicolosi (1610–1670) roku 1642 a Aaron Arrowsmith (1750–1823) kolem roku 1804. Ke konstrukci astrolábu ji využil Philippe de La Hire (1640–1717).

zobrazí do kruhu, jehož obvod je rozdělen na 360 stejných dílků a jehož vodorovný a svislý průměr jsou rozděleny na 180 stejných částí. Zakreslení bodu polosféry majícího zeměpisnou délku λ a zeměpisnou šířku φ se provádí následujícím způsobem: od středu kruhu vyneseme λ dílků na vodorovném průměru a sestrojíme kruhový oblouk procházející tímto bodem a koncovými body svislého průměru. Dále vyneseme od středu kruhu φ dílků na svislém průměru a od koncových bodů vodorovného průměru φ dílků na obvodu kruhu a sestrojíme kruhový oblouk procházející všemi třemi uvedenými body. Požadovaný bod reprezentující zvolený bod na sféře získáme jako průsečík obou kruhových oblouků (viz obr. 13).



Obr. 13: Kulová projekce



Obr. 14: Kulová projekce podle al-Bīrūnīho (převzato z internetu[37])

Z pozdějších prací, které se věnovaly využití stereografické projekce při konstrukci map, uveďme alespoň dvě Eulerovy práce nazvané *O reprezentaci sférické plochy v rovině* (De repraesentatione superficiei sphaericae super plano, 1777) a *O geografické projekci sférické plochy* (De projectione geographica superficiei sphaericae, 1777).[38] L. Euler se v nich zabýval otázkou existence a konstrukce

[37] Viz http://www.csiss.org/map-projections/Polyconic/Nicolosi_Globular.pdf.

[38] Viz Acta academiae scientiarum imperialis Petropolitanae 1(1777), 107–132, 133–142.

obecného konformního zobrazení sféry do roviny. Využil stereografickou projekci sféry do roviny, která bodu sféry majícímu zeměpisnou délku t a zeměpisnou šířku v přiřadí bod reprezentovaný komplexním číslem $z = \operatorname{tg} \frac{v}{2} (\cos t + \mathrm{i} \sin t)$. Konformní zobrazení roviny poté definoval pomocí komplexní funkce.

Na jeho dílo navázal Joseph Louis Lagrange (1736–1813), který v článku *O konstrukci zeměpisných map* (Sur la construction des cartes géographiques, 1779)[39] využil konformní zobrazení zadané pomocí analytických funkcí ve tvaru $x + \mathrm{i}\,y = f(u + \mathrm{i}\,t)$, $x - \mathrm{i}\,y = \varphi(u - \mathrm{i}\,t)$. Funkce f a φ přitom volil tak, aby se poledníky a rovnoběžky na sféře zobrazily do předem zvoleného ortogonálního systému rovinných křivek.

Belgický matematik a inženýr Pierre Germinal Dandelin (1794–1847) popsal roku 1827 základní vlastnosti stereografické projekce a využil ji k řešení některých matematických problémů, např. k řešení Apollóniovy úlohy spočívající v sestrojení kružnice, která se dotýká tří pevně zadaných kružnic.[40]

1.8 Afinní transformace

Stejnolehlost a osová afinita jsou speciálními příklady *afinních transformací*, nejobecnějších vzájemně jednoznačných transformací roviny, při nichž se přímky zobrazí opět na přímky. Afinní transformace zachovávají rovnoběžnost přímek. Obecná afinní transformace má analytické vyjádření ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + p, \\ y' &= cx + dy + q, \quad \text{kde } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Pokud $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \pm 1$, nazýváme příslušné zobrazení *ekviafinní.*

Ekviafinní zobrazení poprvé nalézáme v práci *Kniha o řezech válce a jeho povrchu* (Kitab qutu al-ustuwana wa-basitha), jejímž autorem je Thābit ibn Qurra. Dokázal zde, že obsah elipsy, jejíž poloosy mají délky a a b, je roven obsahu kruhu o poloměru $\sqrt{ab}$, a dále uvedl (včetně důkazu pomocí exhaustivní metody),[41] že ekviafinní transformace zobrazí libovolnou úseč elipsy na úseč kruhu o stejném obsahu.

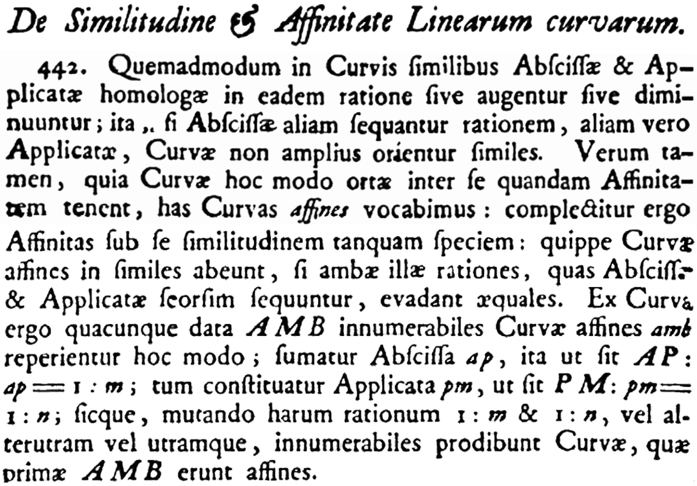
[39] Viz Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1779, 161–210.

[40] Viz Dandelin P. G., *Mémoire sur l'emploi des projections stéréographiques en géométrie*, Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Bruxelles 4(1827), 11–47.

[41] Exhaustivní (vyčerpávací) metodu (lat. *exhaurire = vyčerpat*) jako první rozpracoval Eudoxos z Knidu (asi 408–355 př. n. l.). Až do objevu limit a integrálního počtu byla užívána k výpočtům obsahů rovinných útvarů a objemů těles. Její podstatou je nekonečné dělení dané veličiny. Je založena na následujícím tvrzení: *Jestliže od dané veličiny odečteme její část větší než její polovina a od zbytku opět jeho část větší než jeho polovina a budeme tak činit stále, zbude nějaká veličina, jež bude menší než libovolná kladná veličina.* Viz Schwabik Š., Šarmanová P., *Malý průvodce historií integrálu*, edice Dějiny matematiky, svazek 6, Prometheus, Praha, 1996; citace ze str. 13.

Obecné afinní transformace se poprvé objevují v práci *Kniha o měření paraboly* (Kitab fi misahat al-qat al mukafi), jejímž autorem je Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit (908–946), vnuk ibn Qurry. Dokázal zde, že afinní transformace zachovává poměr ploch mnohoúhelníků; tento výsledek pomocí exhaustivní metody dále rozšířil i na dvě úseče paraboly.

Systematické vybudování afinní geometrie však učinil až mnohem později L. Euler. Ve druhém svazku své dvoudílné monografie *Introductio in analysin infinitorum*[42] z roku 1748 poprvé zavedl termín „afinní“ (latinsky *affinitas* = = spřízněnost, příbuznost) (viz citace na obr. 15), jímž chtěl poukázat na skutečnost, že ačkoliv geometrický útvar a jeho afinní obraz nejsou přísně vzato podobné, jsou přesto určitým způsobem příbuzné. Afinní transformace popsal analytickými vztahy $x = \frac{X}{m}$, $y = \frac{Y}{n}$ a poznamenal, že tyto transformace kružnici zobrazí obecně na elipsu, hyperbolu zobrazí na hyperbolu a parabolu zobrazí na parabolu.



De Similitudine & Affinitate Linearum curvarum.

442. Quemadmodum in Curvis ſimilibus Abſciſſæ & Applicatæ homologæ in eadem ratione ſive augentur ſive diminuuntur; ita „ ſi Abſciſſæ aliam ſequantur rationem, aliam vero Applicatæ, Curvæ non amplius orientur ſimiles. Verum tamen, quia Curvæ hoc modo ortæ inter ſe quandam Affinitatem tenent, has Curvas *affines* vocabimus: complectitur ergo Affinitas ſub ſe ſimilitudinem tanquam ſpeciem: quippe Curvæ affines in ſimiles abeunt, ſi ambæ illæ rationes, quas Abſciſſæ & Applicatæ ſeorſim ſequuntur, evadant æquales. Ex Curva ergo quacunque data *AMB* innumerabiles Curvæ affines *amb* reperientur hoc modo; ſumatur Abſciſſa *ap*, ita ut ſit *AP* : *ap* = 1 : *m*; tum conſtituatur Applicata *pm*, ut ſit *PM* : *pm* = 1 : *n*; ſicque, mutando harum rationum 1 : *m* & 1 : *n*, vel alterutram vel utramque, innumerabiles prodibunt Curvæ, quæ primæ *AMB* erunt affines.

Obr. 15: L. Euler – *Introductio in analysin infinitorum*;
úryvek ze svazku II, kapitoly XVIII, str. 236, 239–240

1.9 Projektivní transformace

Afinní transformace jsou speciálním příkladem obecnějších, tzv. *projektivních transformací*. Obecná projektivní transformace má v kartézských souřadnicích analytické vyjádření ve tvaru

$$x' = \frac{ax + by + p}{ex + fy + r},$$

$$y' = \frac{cx + dy + q}{ex + fy + r}.$$

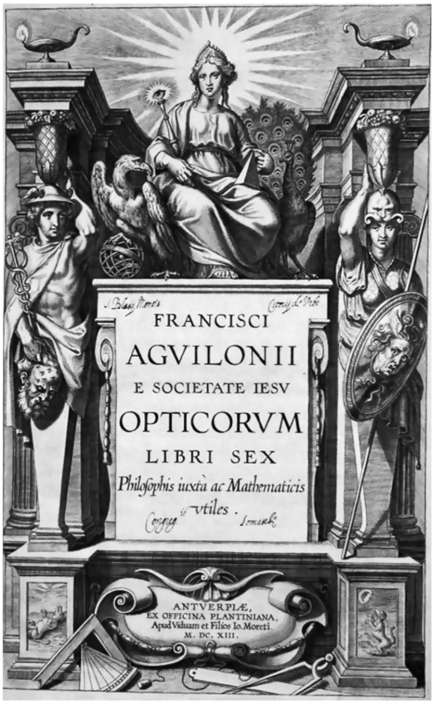
[42] Viz Euler L., *Introductio in analysin infinitorum*, Tomus secundus, apud Marcum-Michaelem Bousquet, Lausannae, 1748, 398 stran.

V klasických homogenních souřadnicích (x_0, x_1, x_2) má její analytické vyjádření tvar

$$\begin{aligned} x_0' &= a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2, \\ x_1' &= a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' &= a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \quad \text{kde } \det(a_{ij}) \neq 0. \end{aligned}$$

Abychom mohli projektivní transformace roviny definovat, je třeba přidat k obvyklé eukleidovské rovině tzv. nevlastní body jakožto průsečíky navzájem rovnoběžných přímek. Tato nutnost souvisí s požadavkem, aby projekce jedné roviny do druhé byla vzájemně jednoznačným zobrazením. Projektivní transformace (kolineace projektivní roviny) zobrazují přímky opět na přímky.

Myšlenku nevlastních bodů poprvé explicitně zmínil astronom a matematik Johannes Kepler (1571–1630) v práci *Astronomiae pars optica* z roku 1604.[43] V kapitole *O kuželosečkách* uvedl, že řezem kužele rovinou může být v závislosti na poloze roviny přímka, kružnice, elipsa, hyperbola nebo parabola a popsal přechod mezi jednotlivými kuželosečkami (přímka přechází přes hyperbolu do paraboly, a ta dále přes elipsu až do kružnice). Dále zde zavedl ohniska kuželosečky jako takové body, že úsečky spojující tyto body s libovolným bodem kuželosečky svírají s tečnou v tomto bodě shodné úhly. V případě paraboly pak druhé ohnisko kladl do nekonečna.



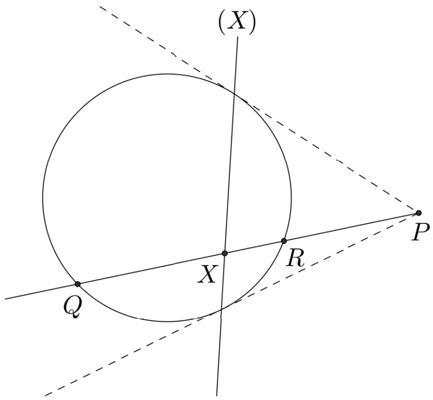
Obr. 16: François D'Aguillon – *Šest knih o optice*

[43] *Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur*, apud Claudium Marnium & haeredes Ioannis Aubrii, Francofurti, 1604, 449 stran. Podtitul *Dodatek k Vitellovi* naznačuje, že J. Kepler touto svou prací navazoval na dílo polského fyzika Vitella (13. stol.).

V roce 1613 vydal belgický matematik, fyzik a architekt François D'Aguillon *Šest knih o optice* (Opticorum libri sex),[44] v nichž se kromě stereografické projekce věnoval rovněž obecné centrální projekci, kterou nazýval *scénografie*. Na obr. 16 je titulní list uvedené práce, jejž tehdy vytvořil vlámský malíř Peter Paul Rubens (1577–1640), který do ní nakreslil rovněž šest dalších tematických ilustrací.

J. Kepler i F. D'Aguillon ve svých dílech navazovali na řadu prací o perspektivě, které byly sepsány během 14. a 15. století.[45]

První souhrnné pojednání o projektivních transformacích sepsal Girard Desargues (1591–1661) pod názvem *Předběžný náčrt pokusu o pochopení jevů při vzájemném styku kužele a roviny* (Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan, Paris, 1639). K obvyklé eukleidovské rovině přidal celou nevlastní přímku a na hyperbolu poté pohlížel jako na uzavřenou křivku, jež nevlastní přímku protíná ve dvou bodech. Asymptoty hyperboly považoval za její tečny v nevlastních bodech. Parabolu chápal jako uzavřenou křivku, jež se nevlastní přímky dotýká.



Obr. 17: G. Desargues – polární transformace

G. Desargues studoval rovněž dvojpoměr čtyř kolineárních bodů, byl si vědom jeho invariantnosti při projektivních transformacích. Pro projektivní transformace, jejichž dvojím složením získáme identitu, zavedl termín *involuce*, jenž se používá dodnes. Jako první zkoumal *polární transformace* vzhledem ke kuželosečkám (viz obr. 17). Ke zvolenému bodu P hledal množinu všech bodů X takových,

[44] Viz D'Aguillon F., *Opticorum libri sex: Philosophis iuxtà ac Mathematicis utiles*, ex officina Plantiniana, apud viduam et filios I. Moreti, Antverpiae, 1613, 684 stran.

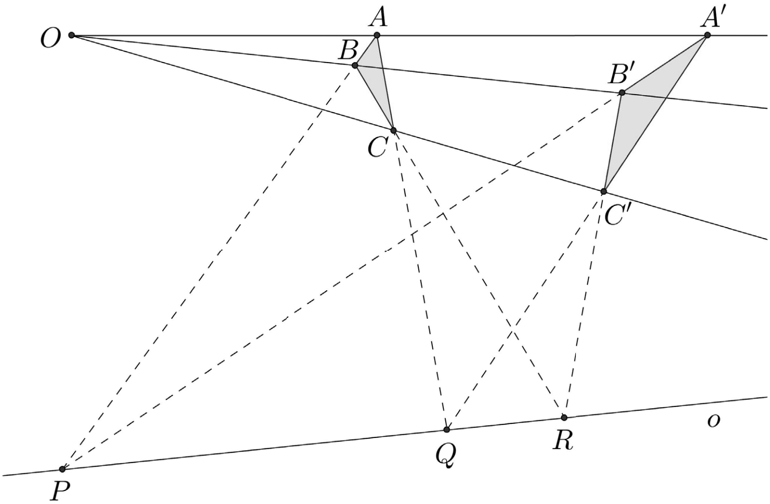
[45] Uveďme alespoň pojednání *O kreslení* (Della pittura, Florencie, 1435), které sepsal Leon Battista Alberti (1404–1472), a spis *O perspektivě v kreslení* (De perspectiva pingendi, Řím, asi 1480), jehož autorem je Piero della Francesca (1416–1492). V souvislosti s využitím perspektivy v malířství bychom měli zmínit také dílo Leonarda da Vinciho (1452–1519) nazvané *Pojednání o kreslení* (Il trattato della pittura) a vydané až po jeho smrti roku 1651 a dvě práce Albrechta Dürrera (1471–1528) nazvané *Návod pro měření kružítkem a pravítkem* (Unterweysung der Messung mit Zirckel und Richtscheyt, 1525) a *O proporcích člověka* (Von menschlicher Proportion, 1528). Oba malíři, L. da Vinci a A. Dürrer, se ve svých pracích věnovali geometrickým otázkám včetně geometrických zobrazení.

že body P a X harmonicky dělí body Q a R, v nichž přímka PX protne danou kuželosečku.[46] Ukázal, že množinou všech hledaných bodů X je přímka; dnes tuto přímku nazýváme *polárou* bodu P vzhledem k dané kuželosečce, bod P nazýváme jejím *pólem*.[47]

Dále dokázal, že polárou vnějšího bodu vzhledem k dané kuželosečce je přímka procházející body dotyku tečen vedených tímto bodem k dané kuželosečce. Pokud uvažovaný bod leží na kuželosečce, je jeho polárou vzhledem k dané kuželosečce tečna procházející tímto bodem. V případě nevlastní přímky ukázal, že jejím pólem vzhledem k elipse nebo hyperbole je střed uvažované kuželosečky. Tyto poznatky prakticky využíval při řešení některých konstrukčních úloh, např. při hledání kuželosečky, která je projektivním obrazem kružnice.

G. Desargues rovněž roku 1639 zformuloval a dokázal tvrzení, které je dnes označováno jako tzv. *Desarguesova věta* (viz obr. 18):[48]

> *Nechť jsou dány dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$, pro které platí, že přímky AA', BB' a CC' se protínají v jediném bodě O. Označme průsečíky přímek AB a $A'B'$, AC a $A'C'$, BC a $B'C'$ po řadě P, Q, R. Potom body P, Q, R jsou kolineární.*



Obr. 18: Desarguesova věta

[46] Říkáme, že body P a X *harmonicky dělí* body Q a R, jestliže dvojpoměr $(Q, R, P, X) = -1$.

[47] Termín *pól* je odvozen z řeckého slova *polos* (osa) a původně značil průsečík sféry s její osou rotace. Názvy *polára bodu* a *pól přímky* vzhledem k dané kuželosečce zavedli nezávisle na sobě francouzští matematici François Joseph Servois (1767–1847) a Joseph Diaz Gergonne (1771–1859).

[48] G. Desargues uvedené tvrzení nikdy nepublikoval. V roce 1648 Desarguesovu větu uveřejnil jeho přítel Abraham Bosse (1602–1676) v knize *Manière universelle de Mr. Desargues, pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le geometral*, De l'imprimerie de Pierre Des-Hayes, Paris, 1648, 342 stran.

Lze ukázat, že ve výše uvedeném případě existuje speciální projektivní transformace – *homologie*,[49] se středem O a osou o určenou body P, Q, R, která trojúhelník ABC zobrazí na trojúhelník $A'B'C'$.

Anglický matematik a fyzik Isaac Newton (1642–1727) projektivní transformace často využíval při řešení složitějších geometrických otázek, neboť podle jeho vlastních slov umožňují transformovat zadané útvary do jednodušších, problém vyřešit a inverzní transformací získat řešení vzhledem k původnímu zadání (viz citace na obr. 19).

Inservit autem hoc lemma solutioni difficiliorum problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam (^{1}) rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit ; idque quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum ; lineæ autem parallelæ sunt, quæ nusquam concurrunt. Postquam autem problema solvitur in figurâ novâ ; si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, (^{k}) habebitur solutio quæsita.

Obr. 19: I. Newton – *Philosophiae naturalis principia mathematica*, svazek I, 1687; úryvek z vydání z roku 1833, str. 171–172

Opětovný zájem matematiků o syntetickou projektivní geometrii podnítil koncem 18. století francouzský matematik Gaspard Monge (1746–1818) vydáním díla *Deskriptivní geometrie* (Géométrie descriptive, 1799).[50] Podstatná část práce je věnována Mongeově nové metodě spočívající v zobrazení trojrozměrných útvarů do dvou navzájem kolmých rovin, obsahuje však rovněž řadu tvrzení projektivní geometrie včetně důkazů. V souvislosti s transformacemi se novou myšlenkou jeví zobecnění polárních transformací do trojrozměrného prostoru.

Mongeův žák Lazare Nicolas Carnot (1753–1823) v díle *O korelaci geometrických útvarů* (De la corrélation des figures de géométrie, 1801)[51] uvažoval spojité projektivní transformace, které nazýval *korelace* (viz citace na obr. 20). „Principem korelace“ pak mínil skutečnost, že tyto transformace zachovávají určité vlastnosti geometrických útvarů. Jsou-li dva útvary ve vztahu korelace, lze na vlastnosti jednoho útvaru usuzovat z vlastností druhého útvaru.

[49] Termín *homologie* v tomto smyslu poprvé použil právě G. Desargues. Poznamejme, že osová afinita a stejnolehlost jsou speciálními případy homologie; osová afinita je homologie se středem v nevlastním bodě, stejnolehlost je homologie se středem ve středu stejnolehlosti a s osou tvořenou nevlastní přímkou.

[50] Viz Monge G., *Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles Normales, l'an 3 de la Republique*, Baudouin, Paris, 1799, 132 stran.

[51] Viz Carnot L. N., *De la corrélation des figures de géométrie*, Duprat, Paris, 1801, 188 stran.

2. Le mode que je me propose de suivre consiste à rapporter chaque figure dont on recherche les propriétés, à une autre figure dont les propriétés sont connues, et qu'on prend pour terme de comparaison; puis à l'aide de caractéristiques particulières, et de l'arrangement systématique des lettres employées pour désigner les points qui déterminent les diverses parties de ces figures, on exprime les modifications qui les distinguent : c'est ce que j'appelle *établir la corrélation des figures.*

Obr. 20: L. N. Carnot – *De la corrélation des figures de géométrie*; úryvek ze str. 1

Ve své práci z roku 1803 nazvané *Geometrie polohy* (Géométrie de position)[52] definoval L. N. Carnot důležitý invariant projektivních transformací – dvojpoměr čtyř kolineárních bodů. Na rozdíl od svých předchůdců však v definici uvažoval orientované úsečky, jejichž délky proto opatřil znaménky. Ukázal, že znaménko dvojpoměru bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) záleží na tom, zda se dvojice bodů A, B a C, D na přímce navzájem oddělují, či nikoliv. Pro takto definovaný dvojpoměr čtyř kolineárních bodů dokázal tvrzení, které mnohem dříve zformuloval Pappos z Alexandrie (viz kapitola 1.6).

Studium projektivních transformací z hlediska syntetické geometrie završil roku 1822 francouzský matematik Jean Victor Poncelet (1788–1867) vydáním obsáhlé práce *Pojednání o projektivních vlastnostech útvarů* (Traité des propriétés projectives des figures).[53] V první kapitole nejprve definoval středové promítání a popsal jeho vlastnosti, které lze odvodit čistě geometrickými prostředky. Zavedl termíny *projektivní útvary* a *projektivní vlastnosti* pro ty vlastnosti geometrických útvarů, které mají společné jak vzor, tak jeho projektivní obraz (viz citace na obr. 21). V dalším textu ukázal, že mezi projektivní útvary patří všechny (regulární) kuželosečky.

5. Une figure dont les parties n'auront entre elles que des dépendances graphiques de la nature de celles qui précèdent, c'est-à-dire des dépendances indestructibles par l'effet de la projection, sera appelée, dans ce qui va suivre, *figure projective.*

Ces dépendances elles-mêmes, et, en général, toutes les relations ou propriétés qui subsistent à la fois dans la figure donnée et dans ses projections, seront appelées également *relations* ou *propriétés projectives.*

Obr. 21: J. V. Poncelet – *Traité des propriétés projectives des figures*; úryvek ze str. 5

[52] Viz Carnot L. N., *Géométrie de position*, Duprat, Paris, 1803, 489 stran.

[53] Viz Poncelet J. V., *Traité des propriétés projectives des figures: ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*, Bachelier, Paris, 1822, 426 stran.

Podobně jako I. Newton navrhoval i J. V. Poncelet při řešení složitých otázek týkajících se kuželoseček zobrazit tyto křivky nejprve do kružnice, vyřešit odpovídající problém pro kružnici a na řešení aplikovat inverzní zobrazení.

Výše uvedenými výsledky o afinních a projektivních transformacích, k nimž jednotliví matematici dospěli během 17. a 18. století, se nepochybně inspiroval německý matematik August Ferdinand Möbius. Řadu zmíněných prací znal a ve svém díle *Barycentrický počet* (1827) na ně odkazoval. Jeho přístup však představuje z pohledu geometrických transformací kvalitativní změnu, neboť afinní a projektivní transformace poprvé zpracoval analyticky s využitím tzv. barycentrických souřadnic. Do té doby byly transformace přirozeně studovány a popisovány výhradně prostředky syntetické geometrie, což je pochopitelné, neboť teprve začátkem 19. století plně dozrála doba k novému, algebraickému přístupu k transformacím, protože pro něj již byly vytvořeny vhodné podmínky. V geometrii byly zavedeny souřadnice, byly položeny základy analytické i algebraické geometrie, byla k dispozici vhodná symbolika i algebraické metody, základní typy transformací a jejich vlastnosti byly v této době již podrobně popsány. Barycentrickému počtu proto věnujeme následující samostatnou kapitolu.