Přepis dvou významných Weyrových prací

In: Martina Štěpánová (author): Počátky teorie matic v Českých zemích a jejich ohlasy. (Czech). Praha: Matfyzpress, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty UK, Praha, 2014. pp. 365–369.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403397

Přepis dvou významných Weyrových prací

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie des matrices.*
Note de M. **Ed. Weyr**, présentée par M. Hermite.

≪ On sait que toute matrice de l'ordre n satisfait à une équation de degré n: c'est l'équation fondamentale de M. Cayley. Il y a cependant des matrices qui satisfont à une équation de degré moindre que n: ce sont les matrices que M. Sylvester nomme *dérogatoires.* Je suis parvenu à établir un théorème qui jette du jour sur ce sujet, et que je me permets de communiquer à l'Académie.

≫ M *étant une matrice d'ordre n aux racines latentes* μ_α, μ_β, …, μ_λ et α, β, …, λ *étant les degrés de multiplicité de ces racines, soient* α_1, β_1, …, λ_1 *les degrés de nullité des matrices* $\mathrm{M}-\mu_\alpha$, $\mathrm{M}-\mu_\beta$, …, $\mathrm{M}-\mu_\lambda$*; alors* M *satisfait à l'équation*

$$(\mathrm{M}-\mu_\alpha)^{\alpha-\alpha_1+1}(\mathrm{M}-\mu_\beta)^{\beta-\beta_1+1}\dots(\mathrm{M}-\mu_\lambda)^{\lambda-\lambda_1+1}=0.$$

≫ Les nombres α_1, β_1, …, λ_1, dont chacun est au moins égal à 1, ne peuvent pas surpasser les nombres respectifs α, β, …, λ. Dans le cas de $\alpha_1=\beta_1=\cdots=\lambda_1=1$, on tombe sur l'équation de M. Cayley. Dans tout autre cas, la matrice M est dérogatoire.

≫ Si l'on a $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, …, $\lambda=\lambda_1$, ce qui arrive, par exemple, quand les racines latentes sont toutes distinctes, on peut mettre M sous la forme

$$\mathrm{M}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{M}_0\mathrm{A}\,,$$

M_0 étant une matrice dont la diagonale principale contient α termes μ_α, β termes μ_β, …, enfin λ termes μ_λ et dont les autres termes sont nuls, et A désignat une matrice de nullité zéro; et ce n'est que dans le cas de $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, …, $\lambda=\lambda_1$, qu'on peut mettre M sous une telle forme (1).

≫ Pour montrer l'utilité de cette décomposition de M, je vais démontrer un théorème que M. Sylvester a bien voulu me communiquer. Représentons M_0 par $(\mu_\alpha,\mu_\beta,\dots,\mu_\lambda)$; nous aurons pour entier positif quelconque ε

$$\mathrm{M}^\varepsilon=\mathrm{A}^{-1}(\mu_\alpha^\varepsilon,\mu_\beta^\varepsilon,\dots,\mu_\lambda^\varepsilon)\mathrm{A},$$

d'où l'on conclut immédiatement qu'un terme quelconque $m_{ik}^{(\varepsilon)}$ de M^ε est mis sous la forme

$$m_{ik}^{(\varepsilon)}=a_{ik}\mu_\alpha^\varepsilon+b_{ik}\mu_\beta^\varepsilon+\cdots+l_{ik}\mu_\lambda^\varepsilon\,.$$

C'est la formule de M. Sylvester, qui ainsi se trouve démontrée dans le cas de $\alpha=\alpha_1$, …, $\lambda=\lambda_1$. Je ne suis pas parvenu à la démontrer pour les autres cas.

(1) Riemann, dans le Mémoire *Zwei allgemeine Sätze über lineäre Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten (OEuvres complétes, p. 359)*, attribue cette maniére de décomposer une substitution linéaire à Jacobi. Son assertion cependant, que la possibilité d'une telle décomposition exige l'inégalité des racines μ, doit être rectifiée dans le sens de notre énoncé.

» En étudiant la nullité des matrices, j'ai trouvé que « le degré de nullité d'un produit de matrices est au plus égal à la somme des degrés de nullité des facteurs, et au moins égal au plus petit de ces degrés » . La seconde partie de ce théorème a été mentionnée par M. Sylvester (*Comptes rendus*, t. XCIX, p. 69) comme faisant partie de sa troisième loi de mouvement algébrique. Cette loi en contient probablement aussi la première partie, ce que je ne puis constater, n'ayant jamais eu sous les yeux le *John Hopkins Circular* qui a donné les trois lois de M. Sylvester.

» De là on conclut immédiatement à l'impossibilité de certaines équations en matrices. Donnons-en un exemple. Soit N une matrice qui a la racine α^{uple} zéro, et soit N de nullité $\alpha_1 < \alpha$. Alors il est impossible de déterminer une matrice X telle qu'on ait $\mathrm{X}^k = \mathrm{N}$, l'entier k étant plus grand que $\alpha - \alpha_1$. En effet, X doit avoir la racine α^{uple} zéro; mais alors je peux démontrer que X^k est de nullité α, et, comme N n'est que de nullité α_1, l'équation proposée n'est pas soluble. Dans cette catégorie d'équations rentre l'exemple donné par M. Sylvester (*Comptes rendus*, t. XCVIII, p. 474); on y a

$$n = 2, \quad \alpha = 2, \quad \alpha_1 = 1.$$

» Les démonstrations rigoureuses de tous ces énoncés feront l'objet d'un Mémoire que je compte publier sous peu. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces.*
Note de M. **Ed. Weyr**, présentée par M. Hermite.

« Je me permets de présenter quelques résultats ultérieurs que j'ai obtenus dans la théorie des matrices.

» Soient M une matrice quelconque d'ordre n et μ_α une racine α^{uple} de M. En formant les puissances de $\mathrm{M}-\mu_\alpha$, on tombe nécessairement sur une puissance $(\mathrm{M}-\mu_\alpha)^\varrho$ qui est de nullité α; les puissances plus élevées sont de la même nullité.

» Désignons par $\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \ldots, \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\varrho=\alpha$ les degrés de nullité des matrices $\mathrm{M}-\mu_\alpha$, $(\mathrm{M}-\mu_\alpha)^2, \ldots, (\mathrm{M}-\mu_\alpha)^\varrho$; alors je dis que *la suite des nombres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ *ne peut jamais croître*, c'est-à-dire qu'on a toujours

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_\varrho .$$

» Pour abréger, je dis que la racine μ_α a pour *caractéristiques* les nombres $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho)$.

» Soient maintenant $\mu_\alpha, \mu_\beta \ldots, \mu_\lambda$ les racines de M, et soient leurs caractéristiques respectives $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho)$, $(\beta, \beta_1, \ldots, \beta_\sigma)$, $\ldots$, $(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_\tau)$.

Alors l'*équation de degré minimum, satisfaite par M, est la suivante*:

$$(\mathrm{M}-\mu_\alpha)^\varrho(\mathrm{M}-\mu_\beta)^\sigma \ldots (\mathrm{M}-\mu_\lambda)^\tau = 0.$$

» Je dis, de deux matrices d'ordre n, qu'elles sont de même espèce si elles possèdent les mêmes racines aux mêmes caractéristiques.

» M *et* N *étant deux matrices de même espèce, on peut toujours assigner des matrices Q, de nullité zéro, telles qu'on ait*

$$\mathrm{N} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ}.$$

Et, réciproquement, deux matrices M et N, liées par une telle équation, sont de même espèce.

» De là, on conclut qu'ayant trouvé une seule matrice M d'une certaine espèce, on les a toutes par la formule $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ}$, Q étant une matrice quelconque de nullité zéro.

» Deux matrices de même espèce satisfont évidemment à la même équation de degré minimum; la réciproque n'a pas toujours lieu.

» Les entiers $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho; \beta, \beta_1, \ldots, \beta_\sigma, \ldots; \lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_\tau$ ayant été choisis de manière que chacun d'eux soit au moins égal à 1, et que les suites $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_\sigma)$, $\ldots$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\tau)$ ne soient jamais croissantes, et que, de plus,

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_\varrho, \quad \beta = \beta_1 + \cdots + \beta_\sigma, \quad \ldots, \quad \lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_\tau,$$

$$n = \alpha + \beta + \cdots + \lambda,$$

je dis qu'*il existe toujours des matrices d'ordre* n, *ayant les racines* $\mu_\alpha, \mu_\beta, \ldots, \mu_\lambda$ *aux caractéristiques respectives* $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho)$, $(\beta, \beta_1, \ldots, \beta_\sigma)$, $\ldots$,

$(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_\tau)$, *les valeurs* $\mu_\alpha, \mu_\beta, \ldots, \mu_\lambda$ *étant arbitraires, mais distinctes entre elles.*

≫ En effet, on peut trouver une telle matrice M de la manière suivante :

≫ Je forme d'abord une matrice H d'ordre α à la racine α^{uple}, μ_α caractérisée par les nombres $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho)$.

≫ Pour cet effet, désignons par $G_{\varrho-1} - \mu_\alpha$ la matrice zéro, et d'ordre α_ϱ, et posons successivement

$$G_{\varrho-2}-\mu_\alpha=\left\{\begin{array}{c|c} \dfrac{G_{\varrho-1}-\mu_\alpha}{A_{\varrho-1}} & \overbrace{\begin{matrix}0&\cdots&0\\ \cdot&\cdots&\cdot\\ 0&\cdots&0\end{matrix}}^{(\alpha_{\varrho-1}).}\end{array}\right\},\quad G_{\varrho-3}-\mu_\alpha=\left\{\begin{array}{c|c} \dfrac{G_{\varrho-2}-\mu_\alpha}{A_{\varrho-2}} & \overbrace{\begin{matrix}0&\cdots&0\\ \cdot&\cdots&\cdot\\ 0&\cdots&0\end{matrix}}^{(\alpha_{\varrho-2}).}\end{array}\right\},$$

....

$$G_1-\mu_\alpha=\left\{\begin{array}{c|c} \dfrac{G_2-\mu_\alpha}{A_2} & \overbrace{\begin{matrix}0&\cdots&0\\ \cdot&\cdots&\cdot\\ 0&\cdots&0\end{matrix}}^{(\alpha_2).}\end{array}\right\},\quad H-\mu_\alpha=\left\{\begin{array}{c|c} \dfrac{G_1-\mu_\alpha}{A_1} & \overbrace{\begin{matrix}0&\cdots&0\\ \cdot&\cdots&\cdot\\ 0&\cdots&0\end{matrix}}^{(\alpha_1).}\end{array}\right\}.$$

≫ Les nombres $\alpha_{\varrho-1}, \alpha_{\varrho-2}, \ldots, \alpha_1$, mis au-dessus des colonnes formées par des zéros, marquent le nombre de ces colonnes. Les compartiments $A_{\varrho-1}, A_{\varrho-2}, \ldots, A_1$ sont formés de la manière suivante :

$$A_{\varrho-1}=\left\{\overbrace{\begin{matrix}1&0&\ldots&0\\ 0&1&\ldots&0\\ \cdot&\cdot&\ldots&\cdot\\ 0&0&\ldots&1\\ 0&0&\ldots&0\\ \cdot&\cdot&\ldots&\cdot\\ 0&0&\ldots&0\end{matrix}}^{(\alpha_\varrho).}\right\}(\alpha_{\varrho-1}),\quad A_{\varrho-2}=\left\{\overbrace{\begin{matrix}0&\ldots&0\\ 0&\ldots&0\\ \cdot&\ldots&\cdot\\ 0&\ldots&0\\ 0&\ldots&0\\ \cdot&\ldots&\cdot\\ 0&\ldots&0\end{matrix}}^{(\alpha_\varrho).}\;\overbrace{\begin{matrix}1&0&\ldots&0\\ 0&1&\ldots&0\\ \cdot&\cdot&\ldots&\cdot\\ 0&0&\ldots&1\\ 0&0&\ldots&0\\ \cdot&\cdot&\ldots&\cdot\\ 0&0&\ldots&0\end{matrix}}^{(\alpha_{\varrho-1}).}\right\}(\alpha_{\varrho-2}),$$

....

≫ Dans le cas de $\alpha_\varrho = \alpha_{\varrho-1}$, le compartiment $A_{\varrho-1}$ aura la forme d'un carré et ne contiendra pas les lignes remplies entièrement de zéros; les mêmes lignes manqueront dans $A_{\varrho-2}$, si $\alpha_{\varrho-1} = \alpha_{\varrho-2}$, et ainsi de suite.

≫ A l'aide de H on peut former une matrice K d'ordre $\alpha + \beta$ ayant les racines μ_α et μ_β aux caractéristiques $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho)$, $(\beta, \beta_1, \ldots, \beta_\sigma)$. Il suffit de poser successivement

$$\mathrm{H}_{\sigma-1}-\mu_\beta=\left\{\begin{array}{c|c} \mathrm{H}-\mu_\beta & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{(\beta_\sigma).} \\ \hline \mathrm{B}_\sigma & \end{array}\right\};\ \mathrm{H}_{\sigma-2}-\mu_\beta=\left\{\begin{array}{c|c} \mathrm{H}_{\sigma-1}-\mu_\beta & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}^{(\beta_{\sigma-1}).} \\ \hline \mathrm{B}_{\sigma-1} & \end{array}\right\},$$

. . . .

$$\mathrm{H}_1-\mu_\beta=\left\{\begin{array}{c|c} \mathrm{H}_2-\mu_\beta & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{(\beta_1).} \\ \hline \mathrm{B}_2 & \end{array}\right\};\ \ \mathrm{K}-\mu_\beta=\left\{\begin{array}{c|c} \mathrm{H}_1-\mu_\beta & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}^{(\beta_2).} \\ \hline \mathrm{B}_1 & \end{array}\right\}.$$

≫ Le compartiment B_σ est entièrement arbitraire et peut être rempli, par exemple, par des zéros; les compartiments $\mathrm{B}_{\sigma-1}$, $\mathrm{B}_{\sigma-2}$, …, B_1 sont formés comme il suit :

$$\beta_{\sigma-1}=\left\{\begin{matrix} \overbrace{0 \ldots 0}^{(\alpha).} & \overbrace{1 \quad 0 \ldots 0}^{(\beta_\sigma).} \\ 0 \ldots 0 & 0 \quad 1 \ldots 0 \\ \cdot \ldots \cdot & \cdot \quad \cdot \ldots \cdot \\ 0 \ldots 0 & 0 \quad 0 \ldots 1 \\ 0 \ldots 0 & 0 \quad 0 \ldots 0 \\ \cdot \ldots \cdot & \cdot \quad \cdot \ldots \cdot \\ 0 \ldots 0 & 0 \quad 0 \ldots 0 \end{matrix}\right\}(\beta_{\sigma-1});\ \mathrm{B}_{\sigma-2}=\left\{\begin{matrix} \overbrace{0 \ldots 0}^{(\alpha+\beta_\sigma).} & \overbrace{1 \quad 0 \ldots 0}^{(\beta_{\sigma-1}).} \\ 0 \ldots 0 & 0 \quad 1 \ldots 0 \\ \cdot \ldots \cdot & \cdot \quad \cdot \ldots \cdot \\ 0 \ldots 0 & 0 \quad 0 \ldots 1 \\ 0 \ldots 0 & 0 \quad 0 \ldots 0 \\ \cdot \ldots \cdot & \cdot \quad \cdot \ldots \cdot \\ 0 \ldots 0 & 0 \quad 0 \ldots 0 \end{matrix}\right\}(\beta_{\sigma-2}),$$

. . . .

≫ Aprés avoir formé K, on formera de la même manière une matrice L d'ordre $\alpha+\beta+\gamma$ ayant les racines μ_α, μ_β, μ_γ aux caractéristiques données, et ainsi de suite jusqu'à la matrice cherchée M. Alors $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ}$ donne toutes les matrices de l'espèce caractérisée. ≫

Pozn.: Článek je přepsán včetně drobných tiskových chyb: zaměněny jsou počty β_1, β_2 posledních nulových sloupců v maticích $H_1-\mu_\beta$ a $K-\mu_\beta$; matice $B_{\sigma-1}$ je nesprávně označena symbolem $\beta_{\sigma-1}$.