2 Nejstarší výsledky teorie matic u nás

Situace v českých zemích odpovídala evropskému vývoji. Čeští matematikové publikovali práce z teorie determinantů výrazně dříve než z maticového počtu, přesto však mezi nimi můžeme nalézt vědce, který pracoval jiným způsobem, než bylo tehdy běžné. Touto výjimkou byl Eduard Weyr, který v době přetrvávajícího užívání řeči determinantů a forem vyjadřoval své výsledky již v řeči matic a snažil se jako jeden z prvních matematiků na evropském kontinentě sjednotit teorii matic s teorií bilineárních a kvadratických forem. Jeho znalost maticového aparátu byla na světové úrovni, k některým otázkám přistupoval velmi originálně, ze zcela jiného, modernějšího pohledu než tehdejší světoví matematici.

2.1 První práce z algebry

Na začátku této části uveďme krátký přehled vývoje algebry v českých zemích, který nám umožní zařadit první české práce s maticovou tematikou mezi ostatní algebraické výsledky české matematické komunity a uvědomit si, na jakých podkladech byla tato disciplína vybudována.

Pomineme-li středověké početnice a některé algebraické výsledky, které byly formulovány v pracích zaměřených na jiné oblasti matematiky,[23] nelze v souvislosti s českými zeměmi až do poloviny 19. století mluvit o dílech, která by se soustavněji věnovala algebře. Tato situace se však ve druhé polovině 19. století začínala měnit.

Vídeňská akademie věd vydala roku 1858[24] práci faráře a suplujícího gymnaziálního profesora Václava Šimerky (1819–1887) *Die Perioden der quadratischen Zahlformen bei negativen Determinante* [Sk1], která byla předtím, zřejmě v jiné podobě, odmítnuta Královskou českou společností nauk. Věnovala se v té době značně studované teorii kvadratických forem. Václav Šimerka v ní zjednodušil a upravil Legendreovu metodu pro skládání dvou kvadratických forem a zkoumal mimo jiné aplikace kvadratických forem k řešení neurčité rovnice

$$ax^2 + bxy + cy^2 = pz^m.$$

Roku 1863 byla v Praze vydána Šimerkova *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia* [Sk3], k níž autor připojil základní poznatky z diferenciálního a integrálního počtu. Publikace byla schválena ministerstvem jako učebnice pro střední školy, zmíněný přehled matematické analýzy byl následujícího roku vydán samostatně pod názvem *Přídavek k algebře pro vyšší gymnázia* [Sk4].

[23] Uveďme například zpřesnění Gaussových důkazů základní věty algebry z roku 1817, které uvedl Bernard Bolzano (1781–1848) v rámci práce věnované teorii řad a teorii funkcí.

[24] Rok 1858 je uveden v poznámce *Život a působení p. Václava Šimerky* [Pk1], kterou roku 1888 publikoval Augustin Pánek (1843–1908), a v článku *Ocenění prací P. Václava Šimerky* [Pz1] z roku 1926, jehož autorem je Václav Petržílka (1905–1976). Kniha *Dějiny exaktních věd v českých zemích* [Nv1], kterou roku 1961 sepsal kolektiv autorů soustředěný kolem Luboše Nového (nar. 1929), však zmiňuje rok 1857, což je rok odmítnutí práce Královskou českou společností nauk.

Šimerka byl prvním českým matematikem, který publikoval článek o teorii determinantů. Jde o stať *Bestimmte Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten gelöst mittels der Permutationslehre* [Sk2] vydanou ve Vídni roku 1858, která pojednává o řešení soustavy lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla. Šimerkovy odborné práce však nevzbudily větší pozornost.[25] V jisté míře se na této skutečnosti podílela i jeho izolovanost od matematické komunity, která mu značně komplikovala práci. Augustin Pánek (1843–1908) uvádí v článku *Život a působení p. Václava Šimerky* [Pk1], že se ji zřejmě snažil překonat alespoň svojí oddaností matematice:

... lze poznati, s jakou láskou myslitel náš pěstoval královskou vědu mathematickou až do posledního dechu. ([Pk1], str. 255)

Roku 1870[26] vyšel učební text *Algebra pro střední školy* [Sl1] od Josefa Smolíka[27] (1832–1915) a postupně byly publikovány nové a nové učebnice algebry. Ze sedmdesátých let jmenujme ještě publikaci Františka Josefa Studničky[28] (1836–1903) *Algebra pro vyšší třídy škol středních* [St3] z roku 1877,[29] z osmdesátých let pak učebnici Františka Machovce[30] (1855–1892) *Algebra pro vyšší třídy škol středních* [Mv1] z roku 1886.

Ve druhé polovině 19. století bylo u nás v algebře nejvíce pozornosti věnováno teorii determinantů. Můžeme říci, že se většinou jednalo o kratší práce, které významné původní myšlenky nepřinášely, ale spíše opakovaly výsledky tou dobou již známé v zahraničí, rozvíjely nepodstatná vylepšení teorie či její aplikace v ostatních matematických disciplínách.

Martin Pokorný (1836–1900) vydal roku 1865 knihu *Determinanty a vyšší rovnice* [Py1], která je první česky psanou učebnicí, jež je z velké části věnována nauce o determinantech. O jejím postavení v české matematické literatuře Augustin Pánek v pojednání *O životě a činnosti Martina Pokorného* [Pk2] roku 1901 napsal:

[25] Určitou výjimkou je spis *Síla přesvědčení* [Sk5]. Jeho německá přepracovaná verze *Die Kraft der Ueberzeugung* byla publikována roku 1883 ve Vídni. Šimerkově článku se věnoval roku 1987 Jiří Fiala (1939–2012) v článku *Síla přesvědčení Václava Šimerky* [Fa1] a roku 2011 Magdalena Hykšová (nar. 1974) v knize *Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů* [Hy1].

[26] Druhé vydání je z roku 1875.

[27] Josef Smolík byl českým středoškolským učitelem (matematika, fyzika, český jazyk, francouzský jazyk), autorem středoškolských učebnic, archeologem, numismatikem a historikem matematiky, fyziky a astronomie. Bližší informace o životě a díle Josefa Smolíka lze nalézt v monografii *Josef Smolík (1832–1915)* [Bv1] z roku 2007 a méně podrobněji v kapitole *Středoškolští učitelé* knihy *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918* [Bv2] z roku 2008. Obě publikace napsala Martina Bečvářová (nar. 1971).

[28] František Josef Studnička studoval na filozofické fakultě vídeňské univerzity, byl suplujícím profesorem na německém gymnáziu v Českých Budějovicích, prozatímním honorovaným docentem na polytechnice v Praze, kde se roku 1866 stal řádným profesorem. Stejnou pozici zaujímal od roku 1869 na české polytechnice a od roku 1871 na univerzitě v Praze, po jejím rozdělení roku 1882 na české univerzitě. V letech 1882–83 byl děkanem filozofické fakulty a v letech 1888–89 rektorem české univerzity v Praze. Bližší informace viz monografie Martiny Němcové-Bečvářové *František Josef Studnička (1836–1903)* [Nm1] z roku 1998.

[29] Druhé vydání je z roku 1879.

[30] František Machovec byl středoškolským profesorem, v posledním roce svého života přednášel na stolici deskriptivní geometrie na české technice v Praze.

Zvláště důležitý a v literatuře naší významný je spis Pokorného Determinanty a vyšší rovnice (1865), jímž nauka o determinantech, tehdy ještě u nás málo známá, uvedena poprvé do české literatury mathematické; v příčině řešení vyšších rovnic nemáme dosud za něj žádné náhrady. ([Pk2], str. 84)

Pokorný přeložil též 1. díl učebnice Heinricha Richarda Baltzera *Die Elemente der Mathematik* [Bz2].

V teorii determinantů u nás v 19. století pracovali František Josef Studnička, Karel Zahradník (1848–1916), Eduard Weyr, Matyáš Lerch (1860–1922), Wilhelm Matzka (1798–1891), Ludvík Kraus, Vilém Jung (1857–1908), Matěj Norbert Vaněček (1859–1922), František Hoza (1843–1914), Anton Puchta (1851–1903), Martin Pelnář (2. pol. 19. stol.), O. Ježek (2. pol. 19. stol.) a další.

Nejsoustavněji se této problematice věnoval František Josef Studnička, výrazná osobnost české matematické komunity 2. poloviny 19. století. Svojí neúnavnou prací pro řadu odborných spolků (např. pro Jednotu českých matematiků, Královskou českou společnost nauk), pedagogickou a organizační činností a vydáváním česky psaných učebnic pomáhal velkou měrou k rozkvětu české matematiky.

Teorii determinantů je věnována značná část Studničkových prací. Ani v nich však nenacházíme původní výsledky, ale spíše jen pozměněné postupy a speciální případy v zahraničí známých skutečností. Velkou pozornost Studnička věnoval některým základním poznatkům, např. výpočtům determinantů, typům úprav či Laplaceově větě. Zabýval se nulovostí determinantu v závislosti na vlastnostech příslušné matice, determinanty symetrických, antisymetrických, persymetrických,[31] reciprokých a jiných speciálních matic i různými funkcionálními determinanty.

Značnou pozornost věnoval pojmům *mocninný* a *sestavný determinant.* Mocninným determinantem přitom nazýval determinant tvaru

$$\begin{vmatrix} a_1^{m_1} & a_1^{m_2} & \cdots & a_1^{m_n} \\ a_2^{m_1} & a_2^{m_2} & \cdots & a_2^{m_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^{m_1} & a_n^{m_2} & \cdots & a_n^{m_n} \end{vmatrix},$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou libovolná čísla, $m_1 = 0 < m_2 < \cdots < m_n$ jsou čísla celá. Jedná se tedy o obecněji koncipovaný Vandermondeův determinant, s nímž již pracovali hlavně francouzští matematikové Alexandre Théophile Vandermonde, Pierre Simon Laplace, Étienne Bézout a jiní. Sestavným (kombinačním) determinantem označoval Studnička determinant uspořádaný ze symetrických funkcí $K_0, K_1, ..., K_n$ vytvořených z prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tyto funkce jsou do řádků v uvedeném pořadí vepsány tak, aby byl každý další řádek „posunut alespoň o jeden prvek doprava“.

[31] V *persymetrické matici* se rovnají prvky se stejným součtem řádkového a sloupcového indexu.

Příkladem sestavného determinantu je

$$\begin{vmatrix} K_2 & K_3 & K_4 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & 0 \\ 1 & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ 0 & 0 & 1 & K_1 & K_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & K_1 \end{vmatrix},$$

kde
$K_0 = 1,$
$K_1 = a_1 + a_2 + ... + a_n,$
$K_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_1a_n + a_2a_3 + a_2a_4 + ... + a_{n-1}a_n,$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$K_n = a_1a_2a_3 \cdots a_n.$

Studnička také nacházel některé vztahy mezi mocninnými a sestavnými determinanty.

Ve své čtyřicetistránkové práci *A. L. Cauchy als formaler Begründer der Determinanten-Theorie. Eine literarisch-historische Studie* [St2] z poloviny osmdesátých let vyslovil názor, že skutečným zakladatelem teorie determinantů je až francouzský matematik Augustin-Louis Cauchy. Opakovaně se rovněž pozitivně vyjádřil k přijetí determinantů do náplně středoškolské matematiky.

Připomeňme zde ještě některé Studničkovy práce zpracovávající problematiku determinantů: útlá knížka *O determinantech* (1870) [St1], která vyšla téhož roku i rusky pod názvem *Načal'naja osnovanija teorii Determinantov' ili opred'litelej* a o rok později německy pod názvem *Einleitung in die Theorie der Determinanten. Für Studierende an Mittelschulen und technischen Anstalten*, spis *O determinantech mocninných a sestavných* [St4] a učebnice *Úvod do nauky o determinantech* [St5] z roku 1899.

Dle původních plánů mělo být vydáno obsáhlejší dílo *Základové vyšší algebry* Václava Řehořovského (1849–1911) a Eduarda Weyra. Z plánovaných tří svazků však vyšel jediný, jedná se o Řehořovského publikaci *Theorie souměrných funkcí kořenů* [Rh1] z roku 1883.

2.2 Ludvík Kraus

Teorií matic se v našich zemích ve druhé polovině 19. století zabývali jen Eduard Weyr a Ludvík Kraus, jehož předčasná smrt byla velkou ztrátou pro naši matematickou obec.

Ludvík Kraus studoval na pražské univerzitě v období, kdy zde začal přednášet Eduard Weyr. Titul doktora filozofie získal roku 1878. Během svých studijních pobytů absolvoval v Mnichově přednášky Felixe Kleina (1849–1925) a na přelomu sedmdesátých a osmdesátých let poslouchal po čtyři semestry v Berlíně Karla Theodora Wilhelma Weierstrasse a Leopolda Kroneckera. Weierstrassovy přednášky byly proslulé. Sjížděli se na ně matematikové z celé Evropy, měly značný vliv na rozvoj evropské matematiky.

Roku 1881 se Ludvík Kraus stal soukromým docentem na pražské univerzitě, po jejím rozdělení přednášel čtyři semestry (teorii funkcí a algebru) na univerzitě české. Ve vlasti se snažil zahraniční zkušenosti předávat dál.[32]

Byl to zřejmě právě Kraus, který ve svém učiteli Eduardu Weyrovi vzbudil zájem o maticový počet.[33]

... získala tenkráte nového docenta mathematiky L. Krause, vynikajícího to žáka Weierstrassova. S tímto žil Ed. Weyr v poměrech zvláště přátelských a zdá se, že vlivem tohoto mathematika tak záhy zesnulého (v r. 1886)[34] *sesíleno bylo v Eduardovi přání vniknouti v methody Weierstrassovy.* ([Pe1], str. 461)

Pro zajímavost uveďme pochvalné vyjádření Eduarda Weyra na adresu Ludvíka Krause:

... úvahy dra. Krause vynikají takovou přesností a obsahují tolik duchaplných myšlének, že je lze nazvati pravými perlami. ... Hlavním cílem života jeho bylo poznati pravdy mathematické; za tím cílem kráčel neohlížeje se ani po zevní slávě ani po hmotných výhodách, pokládaje je za věc vedlejší. – Rád hovoříval o vědeckých předmětech, překvapoval každého originalností a silou myšlének, a vynikal skromností, jaká vyskytuje se jen u těch, jimž jde v pravdě o věc. ... ([We7], str. 50, 52)

Podotkněme, že právě na Krausových pracích lze dokumentovat skutečnost, že determinant byl u nás (stejně jako ve světě) pro matematickou komunitu zcela známým pojmem. Kraus jej používal (například pro zápis rovnice křivky) bez jakéhokoli vysvětlení a s determinanty prováděl běžné operace.[35]

Krausovy odborné schopnosti dokumentuje skutečnost, že roku 1884 znal důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty pro matice řádu n. Připomeňme, že toto tvrzení uveřejnil roku 1858 Arthur Cayley v článku *A memoir on the theory of matrices* bez obecného důkazu, o který se poté snažili přední světoví matematikové. Krausův důkaz citoval Eduard Weyr v práci *O základní větě v theorii matric* ([We2], viz dále), autorem publikován nebyl. Ludvík Kraus pracoval pro jednoduchost s maticí řádu tři, v postupu však využil pouze tvrzení platící pro čtvercové matice řádu n, jedná se tedy o důkaz obecný.

Uvažoval matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix}$$

[32] Na základě svého pobytu v Berlíně napsal Kraus práce *Základové arithmetiky. Dle výkladů prof. Weierstrassa* [Ks1] a *Základové náuky o funkcích racionálných* [Ks2]. Obě pojednání byla publikována v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky, a to v roce 1883, resp. 1885. Seznam Krausových publikací je uveden v monografii Bečvář J. a kol.: *Eduard Weyr (1852–1903)* [Be1] z roku 1995 na stranách 53–54.

[33] V roce 1886 publikoval Eduard Weyr v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky článek *Život a působení dra Ludvíka Krause. Nástin životopisný* [We7]. Ten byl v témže roce referován Františkem Josefem Studničkou v časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 18(1886), str. 22.

[34] Karel Petr, autor tohoto výroku, se zde zmýlil. Kraus zemřel již roku 1885.

[35] Viz například práce *Základové náuky o funkcích racionálných* [Ks2] nebo *Příspěvek ku transformaci jedenáctého řádu funkcí elliptických* [Ks3].

s vlastními čísly μ_1, μ_2, μ_3 a zavedl lineární substituci

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & (a_{11}-\mu_1)x \;+\; a_{12}y \;+\; a_{13}z \\ y_1 & = & a_{21}x \;+\; (a_{22}-\mu_1)y \;+\; a_{23}z \;, \\ z_1 & = & a_{31}x \;+\; a_{32}y \;+\; (a_{33}-\mu_1)z \end{array}$$

kterou označil symbolem

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \end{pmatrix}_{\mu_1}.$$

Obdobně uvažoval substituce

$$\begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}_{\mu_2} \qquad \text{a} \qquad \begin{pmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}_{\mu_3}.$$

Tyto tři substituce složil. Jejich kompozici zapsal jedinou soustavou tří lineárních rovnic, kterou lze v dnešní maticové symbolice vyjádřit vztahem

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = (M-\mu_3E)(M-\mu_2E)(M-\mu_1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

kde E značí jednotkovou matici. Při označení koeficientů výsledné soustavy tří lineárních rovnic řeckými písmeny α_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, je Cayleyova-Hamiltonova věta ekvivalentní tvrzení, že všechny koeficienty α_{ij} jsou nulové. K důkazu tohoto tvrzení Kraus nejprve zvolil za x, y, z takové hodnoty $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, aby vektor (x, y, z) byl vlastním vektorem matice M příslušným vlastnímu číslu μ_1. Potom je však $x_3 = y_3 = z_3 = 0$, a tedy $\alpha_{i1}\bar{x} + \alpha_{i2}\bar{y} + \alpha_{i3}\bar{z} = 0,\ i = 1, 2, 3$. Vzhledem k platnosti Laplaceovy věty o rozvoji determinantu dle jakéhokoli řádku a skutečnosti, že μ_1 je vlastní číslo matice M, lze hodnoty $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ položit rovny algebraickým doplňkům $\psi_1(\mu_1)$, $\psi_2(\mu_1)$, $\psi_3(\mu_1)$ prvků prvního řádku determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\mu_1, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}-\mu_1, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}-\mu_1 \end{vmatrix}.$$

Analogicky lze postupovat s vlastním číslem μ_2 (resp. μ_3) a druhým (resp. třetím) řádkem matice M a získat tak další možnou volbu hodnot $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ – trojici algebraických doplňků $\chi_1(\mu_2)$, $\chi_2(\mu_2)$, $\chi_3(\mu_2)$ (resp. $\vartheta_1(\mu_3)$, $\vartheta_2(\mu_3)$, $\vartheta_3(\mu_3)$). Jelikož soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_{i1}\psi_1(\mu_1) & + & \alpha_{i2}\psi_2(\mu_1) & + & \alpha_{i3}\psi_3(\mu_1) & = & 0 \\ \alpha_{i1}\chi_1(\mu_2) & + & \alpha_{i2}\chi_2(\mu_2) & + & \alpha_{i3}\chi_3(\mu_2) & = & 0 \\ \alpha_{i1}\vartheta_1(\mu_3) & + & \alpha_{i2}\vartheta_2(\mu_3) & + & \alpha_{i3}\vartheta_3(\mu_3) & = & 0 \end{array}$$

je homogenní, stačí dokázat, že determinant matice této soustavy se identicky nerovná nule, neboť potom jsou jistě všechny koeficienty α_{ij} nulové. Ludvík Kraus našel jeden případ, kdy je uvedený determinant nenulový; konkrétněji se jedná o diagonální matici s různými prvky na diagonále. Tento jeho poslední krok důkazu však není korektní, svou volbou se v podstatě omezil jen na případ diagonálních matic, jejichž prvky na diagonále (a tedy i vlastní čísla) jsou navzájem různé.

2.3 Eduard Weyr

Eduard Weyr se narodil do rodiny, ve které měl již od dětství příznivé podmínky k budování vztahu k přírodním vědám. Jeho otec František Weyr (1820–1889) byl profesorem matematiky na pražské německé reálce v Mikulandské ulici.[36] Z devíti sourozenců Eduarda Weyra se matematice (především geometrii) věnoval starší bratr Emil (1848–1894), který udržoval kontakty s předními evropskými matematiky a který se již roku 1875 stal řádným profesorem vídeňské univerzity. Ačkoli spolu oba sourozenci sepsali jen jedinou matematickou práci,[37] byla Eduardova profesní cesta starším bratrem značně ovlivněna. V roce 1890 založil Emil Weyr spolu s Gustavem von Escherichem (1849–1935) časopis Monatshefte für Mathematik und Physik.[38] Hned v prvním ročníku v něm Eduard Weyr publikoval své významné výsledky z maticového počtu. K bližšímu vykreslení obrazu Weyrovy rodiny ještě dodejme, že mladší bratr Bedřich (1853–1908) se stal chemikem.

Od roku 1868 studoval Eduard Weyr na pražské polytechnice, na které ho učili např. Jacob Heinrich Karl Durège[39] (1821–1893), Karl Joseph Küpper[40] (1828–1900), Josef Šolín[41] (1841–1912) či František Josef Studnička. Mnohé své znalosti a zkušenosti získal rovněž studiem v zahraničí. V akademickém roce 1872/73 pobýval v Göttingen, kde působili Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833–1872), Ernst Christian Julius Schering (1833–1897) a Ernst Friedrich Wilhelm Klinkerfues (1827–1884), roku 1873 zde získal titul doktora filozofie. V témže roce odjel Eduard Weyr do Paříže, kde poslouchal přednášky Charlese Hermita[42] a Josepha Alfreda Serreta (1819–1885). Během zimního semestru 1885/86 navštěvoval přednášky Leopolda Kroneckera v Berlíně, kde se zúčastnil také přednášek, které vedl Immanuel Lazarus Fuchs (1833–1902). V korespondenci z roku 1885 popisuje příteli Jaroslavu Vrchlickému[43] (1853–1912), který byl v té době tajemníkem české techniky, berlínskou

[36] František Weyr patřil mezi výrazné české středoškolské učitele té doby. Za svou pedagogickou činnost byl uznáván například Jednotou českých mathematiků.

[37] Jedná se o třídílnou učebnici *Základové vyšší geometrie* [WW1], [WW2], [WW3], jejíž jednotlivé díly jsou datovány roky 1871, 1874 a 1878.

[38] Časopis je vydáván i dnes, od roku 1952 pod zkráceným názvem *Monatshefte für Mathematik*.

[39] Německý profesor Jacob Heinrich Karl Durège byl v letech 1857 až 1864 profesorem matematiky na polytechnice v Curychu, poté několik let na pražské technice, odkud přešel v roce 1969 na pražskou (a později na německou) univerzitu. Hlavními oblastmi jeho odborného zájmu byly především matematická analýza a geometrie.

[40] Karl Joseph Küpper byl německý matematik, jenž od roku 1852 učil na průmyslové škole v Terstu, roku 1867 se stal profesorem deskriptivní geometrie na pražské technice, v období 1869–1900 přednášel na německé technice v Praze.

[41] Josef Šolín byl český matematik a deskriptivní geometr, který se zabýval i pružností, pevností, statikou či stereotomií. Pro uvedené obory se stal spolutvůrcem jejich terminologie.

[42] Kontakt s Charlesem Hermitem, jedním z nejvýznamnějších matematiků té doby, umožnil vytvoření dalších spojení české matematické komunity se zahraničím. Od doby pobytu Eduarda Weyra ve Francii získávala Jednota českých mathematiků z Paříže časopis *Comptes Rendus*. Byl to právě Charles Hermite, který předkládal Weyrovy práce pařížské akademii.

[43] Jaroslav Vrchlický, vlastním jménem Emil Bohuslav Frída, byl český básník, dramatik a překladatel nominovaný na Nobelovu cenu za literaturu. Byl profesorem srovnávacích literatur na univerzitě, poslancem Panské sněmovny ve Vídni a tajemníkem jak české techniky,

výuku a přijetí tamější odbornou společností, v níž hrály podstatnou roli nejvýraznější světové osobnosti teorie matic, takto:

Budu navštěvovati Kroneckerovy a Fuchsovy přednášky. Tyto dnes započly a mohu říci, že mě to činilo náramnou švandu, když jsem se zase po tolika letech do škamny posadil, zdálo se mi jako bych omládl a smát jsem se musil, když jsem tu mládež pozoroval kterak s pietou však horlivě si zapisovala, … Prof. Fuchs mě po přednášce vyzval, abych se súčastnil v sobotu banketu, který pořádají Weierstrassovi kollegové na počest jeho 70. narozenin v Hôtelu de Rome i pozvání to jsem s radostí přijal a tak zýtra ten zdejší učený svět důkladně okouknu.

Roku 1874 se Eduard Weyr habilitoval na české polytechnice, roku 1876 na pražské univerzitě, kde v té době již rok suploval hodiny bratra Emila po jeho odchodu do Vídně. Od téhož roku byl mimořádným a od roku 1881 řádným profesorem na české technice, od roku 1891 navíc suplujícím profesorem na české univerzitě v Praze. Chystaného jmenování řádným profesorem na české univerzitě v roce 1903 se nedožil.

V obdobích 1884/85 a 1890/91 zaujímal Eduard Weyr na technice funkci rektora. Byl členem řady českých i zahraničních společností, udržoval kontakty s mnoha evropskými matematiky, odmítl několik nabídek profesury na zahraničních univerzitách. Nepřijetí této nabídky z vídeňské univerzity komentoval roku 1890 v Drobných zprávách v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky[44] matematik Josef Beneš[45] (1859–1927) následujícími slovy:

P. prof. Ed. Weyra prosím, by prominul, že jeho jménem krášlím sobě tuto zprávu. Svým dopisem, prof. Escherichovi zaslaným, a zvláště motivem, proč u nás zůstane, uchystal české počtářské rodině roztomilé překvapení. … Shodujíť se všichni v tom, že p. professor dopisem oním přitulil své jméno k našemu kroužku tím těsněji, čím je vlastními pracemi vzdálil do nejpřednějších řad pracovníků světových. (str. 302–303)

Odborné zaměření prací Eduarda Weyra zahrnuje nejen oblasti algebry (determinanty, matice, kvaterniony), ale výraznou měrou především geometrii a dále potom analýzu. Bližší informace o jeho životě a činnosti (včetně řady fotografií) uvádí monografie Jindřicha Bečváře a kolektivu autorů *Eduard Weyr (1852–1903)* [Be1] z roku 1995, článek Jindřicha Bečváře *Eduard Weyr and Linear Algebra* [Be7] z roku 2010 a společná práce Karla Petra a Jana Sobotky (1862–1931) *O životě a činnosti Eduarda Weyra* [PS1][46] z roku 1905.

Z prací Eduarda Weyra jsou dnes nejvíce ceněny publikace s maticovou tematikou, zejména jeho výsledek o konvergenci maticové mocninné řady a teorie charakteristických čísel. Dá se říci, že autor žil ve svém maticovém světě, který

tak České akademie věd a umění.

[44] Drobné zprávy. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 19(1890), str. 300–305.

[45] Josef Beneš studoval na české technice a české univerzitě v Praze. Jeho zájmem byla pojistná matematika. Od roku 1890 pracoval v Úrazové pojišťovně dělnické, kde se stal vrchním radou. Od roku 1904 byl soukromým docentem pojistné matematiky na české technice.

[46] Práce [PS1] je složena ze čtyř článků [Pe1], [Pe2], [So1] a [Pe3], z nichž posledně jmenovaný je seznamem publikací Eduarda Weyra. Tento seznam byl po devadesáti letech zkorigován, okomentován a doplněn chybějícími tituly Jindřichem Bečvářem v již zmíněné knize [Be1].

se stal jakousi malou enklávou na území evropského kontinentu soustředěného v této sféře na teorii determinantů a teorii bilineárních a kvadratických forem.

Do problematiky teorie matic budeme řadit Weyrovy publikace, jejichž chronologický seznam je následující:

- *O základní větě v theorii matric* (1884),
- *Sur la théorie des matrices* (1885),
- *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* (1885),
- *O binarných matricích* (1887),
- *Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices* (1887),
- *O theorii forem bilinearných* (1889),
- *Zur Theorie der bilinearen Formen* (1890),
- *O theorii forem bilinearných* (1901).

Vzhledem k vzájemně jednoznačnému vztahu mezi kvaterniony a čtvercovými maticemi druhého řádu bychom však zřejmě mohli na začátku přehledu uvést i článek

- *Sur la théorie des quaternions* (1884),

který je primárně zaměřen na teorii kvaternionů, nicméně matice se v něm rovněž vyskytují. V textu se pozastavíme rovněž u Weyrova článku

- *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* (1887).

Není sice věnován teorii matic, ale jeho výsledky lze do řeči matic přeložit. To také Weyr v dalších pracích učinil.

Dříve než Eduard Weyr v druhé polovině osmdesátých let 19. století publikoval své nejdůležitější výsledky z teorie matic, resp. tvrzení o konvergenci mocninné řady v lineární asociativní algebře platící také v algebře matic, sepsal i jiné práce, které lze zařadit do lineární algebry. Zmiňme krátký článek z roku 1880 nazvaný *Verification der Multiplicationsformel für Determinanten* [We1],[47] jehož náplň je evidentní z názvu, a práci *O řešení lineárných rovnic* [We4][48] z roku 1885, která pojednává o řešení homogenních a nehomogenních soustav lineárních rovnic. K dané otázce, kterou bychom dnes řešili spíše pomocí hodností matice soustavy, resp. rozšířené matice soustavy, přistoupil autor v roce 1885 ještě z pohledu teorie determinantů. V řešení tohoto problému se tedy nevymykal postupům svých současníků.[49]

[47] Krátká reference od Eugena Otta Erwina Netta viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 13(1881), str. 123. Viz též historický přehled Thomase Muira *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development IV.* [Mu3], str. 5.

[48] Studničkova reference viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 17(1885), str. 64–65, dále viz např. Muir T.: *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development IV.*, str. 100.

[49] Celosvětová situace viz 1. kapitola.

S výjimkou dvou publikací (*O základní větě v theorii matric* a *O theorii forem bilinearných* – článek z roku 1901) byly zmíněné práce referovány v rozsáhlém díle *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*, který je podstatně spojen s Johannem Christianem Poggendorffem (1796–1877).[50]

2.4 Weyrův důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty

- *O základní větě v theorii matric* [We2], 1884

Dne 25. dubna 1884 přednášel Eduard Weyr na zasedání Královské české společnosti nauk. Příspěvek, který byl téhož roku publikován ve *Zprávách o zasedání KČSN*, nazval *O základní větě v theorii matric.* Uvedl zde výše zmíněný důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty Ludvíka Krause a poté svoji mírně pozměněnou verzi tohoto důkazu.

V úvodu připomněl Cayleyův *Memoár*, z něhož také při argumentaci, proč se důkazu věnoval, citoval:

... toť základní Cayley-em uvedená věta. Důkaz její provádí autor jen v případu $n = 2$ přímou verifikací; toutéž cestou i případ $n = 3$ sám proskoumal a praví „but I have not thought it necessary to undertake the labour of a formal proof of the theorem in the general case of a matrix of any degree."

Chtíti verifikovati theorem v případu obecném přímým vyčíslením napsaného determinantu by bylo prací nad míru obtížnou a ani mi na mysl nepřišlo, bych ji podniknul. Měl jsem však za to, že by přece bylo záhodno podati důkaz vytknuté základní věty v případu obecném. ([We2], str. 149)

Čtenářům rovněž připomněl znění samotné věty, kterou zapsal rovností

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - M, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - M, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} - M \end{vmatrix} = 0,$$

kde

$$M = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\}.$$

[50] Práce Eduarda Weyra viz Bd. 3, str. 1435–36, a Bd. 4, str. 1623–24.

Zmíněný slovník je velmi rozsáhlou, mnohosvazkovou prací obsahující na více než 20 000 stranách přibližně 30 000 bibliografií doplněných seznamem publikací, ocenění či nekrology. Dílo je i více než sto let po Poggendorffově smrti dále vydáváno jeho následovníky. Základní životní a profesní data J. Ch. Poggendorffa, historie slovníku a přesný přehled informací o jednotlivých svazcích (včetně počtu stránek, vykazovaného období, let vydání nebo počtu obsažených článků) viz článek vydaný k dvoustému výročí Poggendorffova narození: *J. C. Poggendorff, Biographisch-literarisches Handwörterbuch der exakten Naturwissenschaften*, N. T. M. 5(1997), Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

V dalším textu se již o referenci jednotlivých Weyrových prací v tomto obsáhlém díle nebudeme zmiňovat.

je libovolná čtvercová matice stupně n.

Tvrzení jsme zapsali v symbolice, kterou používal Eduard Weyr, tj. svislé čáry pro determinant, resp. složené závorky pro matici. Všimněme si rovněž z dnešního pohledu problematického dosazení matice M do determinantu.

Dále autor zavedl značení

$$\varphi(\mu) = \begin{vmatrix} a_{11}-\mu, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\mu, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn}-\mu \end{vmatrix},$$

kořeny rovnice $\varphi(\mu) = 0$ označil $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Potom lze Cayleyovu-Hamiltonovu větu ekvivalentně vyjádřit výrokem, že všechny prvky „*determinantu*“ $\Delta_{12\dots n} = \varphi(\mu_n)\varphi(\mu_{n-1})..\varphi(\mu_2)\varphi(\mu_1)$ jsou rovny nule, *neboť pokládáme-li determinant $\varphi(\mu_k)$ za matrix, tu on značí patrně rozdíl $M - \mu_k$, tak že $\Delta_{12\dots n}$ značí pak matrix $(M - \mu_n)..(M - \mu_1)$ t. j. značí levou stranu v rovnosti Cayley-ově.* ([We2], str. 149–150).

Z části citace (*neboť pokládáme-li determinant $\varphi(\mu_k)$ za matrix*) si čtenář může uvědomit existenci stále přetrvávajících nejasných hran v odlišování pojmů „determinant“ a „matice“. Tato nepřesná diverzifikace je evidentní i přímo z důkazu.

Dále Eduard Weyr podotkl na adresu svého přítele následující milá slova:

Hleděl jsem tuto větu obecně dokázati, však se mi to nepodařilo, neboť cesta, která v jednoduchých poměrně případech $n = 2, 3$ vedla k cíli, se v obecném případu stávala neschůdnou. Obrátil jsem se k svému příteli p. Dr. L. Krausovi, priv. docentu na zdejší české universitě, s prosbou, aby se pokusil o důkaz; byl jsem nemálo potěšen, obdržev ihned, čeho jsem si přál. Dovolím si reprodukovati doslovně pěkné úvahy p. dra Krause. ([We2], str. 150).

Následuje Krausův (takřka dvoustránkový) důkaz.[51] Po předložení postupu svého kolegy využil Eduard Weyr Krausovy myšlenky k formulaci své modifikované, mnohem kratší verze důkazu.

Uvažoval n hodnot $x_{k1}, \dots, x_{kn}$, pro které platí[52]

$$(M - \mu_k) \cdot \left\{ \begin{matrix} x_{k1}, & 0, & \dots, & 0 \\ x_{k2}, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{kn}, & 0, & \dots, & 0 \end{matrix} \right\} = 0.$$

Vztah jsme uvedli opět v autorově podání, abychom si uvědomili, že z hlediska dnešního zápisu Weyr „odčítal neodečitatelné“, tj. číslo od „schématu“ čísel. Zápis $M - \mu$ místo $M - \mu E$, kde E značí jednotkovou matici, používal autor běžně i v pozdějších textech. Pod značením μ rozuměl skalární matici určenou

[51] Ten byl prezentován v podkapitole 2.2 této monografie.

[52] Sloupcový vektor se složkami $x_{k1}, \dots, x_{kn}$ je tedy vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu μ_k.

hodnotou μ, odůvodnění zkráceného značení podal roku 1887 v práci *O binarných matricích* [We8] (viz později). V dalším textu, nebude-li výslovně řečeno jinak, budeme dle současné symboliky do zápisů doplňovat matici E.

Pro libovolná $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a $r = 1, \ldots, n$ dále zavedl hodnoty

$$\xi_r = \lambda_1 x_{1r} + \lambda_2 x_{2r} + \cdots + \lambda_n x_{nr}$$

a vypočítal *součin matric*[53]

$$D\begin{pmatrix} \xi_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_n, & 0, & \ldots, & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 D \begin{pmatrix} x_{11}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n}, & 0, & \ldots, & 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + \lambda_n D \begin{pmatrix} x_{n1}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{nn}, & 0, & \ldots, & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 (M - \mu_2 E) \ldots (M - \mu_n E) \cdot (M - \mu_1 E) \begin{pmatrix} x_{11}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n}, & 0, & \ldots, & 0 \end{pmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \lambda_n (M - \mu_1 E) \ldots (M - \mu_{n-1} E) \cdot (M - \mu_n E) \begin{pmatrix} x_{n1}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{nn}, & 0, & \ldots, & 0 \end{pmatrix}.$$

Znovu poukažme na nedostatečné odlišování pojmů matice a determinant. Zatímco na začátku svého textu Eduard Weyr použil písmeno D pro označení determinantu, v této závěrečné fázi pod symbolem D rozuměl příslušnou matici.

Z vlastností hodnot $x_{k1}, \ldots, x_{kn}$ plyne, že výsledná matice je nulová. Jsou-li $\xi_1, \ldots, \xi_n$ libovolné, musí být každý prvek matice D (neboli $\Delta_{12\ldots n}$) skutečně roven nule. Možnost volby libovolných hodnot $\xi_1, \ldots, \xi_n$ autor dokázal v závěru práce. Bohužel se dopustil obdobné chyby jako Ludvík Kraus. Svou konkrétní volbou matice v závěru důkazu jej omezil jen na speciální typ matic, neřešil případ vícenásobných kořenů.

[53] O několik řádků výše autor psal ve zcela analogickém případě o *součinu matrix*. V článku jsou střídavě používány oba termíny. Pojem *matrice* (*matrix*) není v práci nikde zaveden. Vzhledem ke skutečnosti, že se zřejmě jedná o první českou publikovanou práci o maticích, je absence definice překvapivá.

Uvědomme si, že v součinu $\prod_{i=1}^{n} (M - \mu_i E)$ nehraje pořadí činitelů roli. Matice $(M - \mu_i E)$ a $(M - \mu_j E)$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, totiž komutují, neboť jejich součin je roven lineární kombinaci matic MM, EM, ME a EE.

Weyrův důkaz Cayleyho-Hamiltonovy věty nalezl odezvu v zahraniční literatuře. Je zmíněn již v článku Jamese Josepha Sylvestera *Sur la résolution générale de l'equation linéaire en matrices d'un ordre quelconque* [Sy14] z téhož roku,[54] dále na 71. straně přehledové práce *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen* [Su1] z roku 1898, jejímž autorem je německý matematik Eduard Study (1862–1930), na stranách 418 a 419 přepracovaného textu *Nombres complexes* [SC1] z roku 1908, který napsali Study a francouzský matematik Elie Joseph Cartan (1869–1951), a také na straně 448 stati *Theorie des formes et des invariants* [MD1] z roku 1907 německo-francouzské dvojice Friedrich Wilhelm Franz Meyer (1856–1934) a Jules Joseph Drach (1871–1949).

Weyrova práce [We2] je referována Františkem Josefem Studničkou v časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.[55]

2.5 Exponenciála a logaritmus

- *Sur la théorie des quaternions* [We3], 1884

Vstupní branou ke zbývajícím pracím s tematikou matic z výše uvedeného chronologického seznamu lze nazvat článek *Sur la théorie des quaternions* z roku 1884. Práce je rozdělena na dvě části, které byly publikovány v 98. ročníku francouzského časopisu Comptes Rendus. Francouzské akademii byly představeny Charlesem Hermitem. V první ještě čtenář žádnou poznámku z maticového počtu nenalezne,[56] v druhé části jsou představeny zajímavé maticové výsledky. Hned v úvodu je totiž připomenut (a pomocí konkrétních čtyř matic 1, i, j, k blíže objasněn) vztah mezi kvaternionem $w + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ a maticí

[54] Konkrétněji se jedná o následující řádky:

C'est dans les Lectures, publiées en 1844, que pour la premiére fois a paru la belle conception de l'équation identique appliquée aux matrices du troisième ordre, enveloppée dans un langage propre à Hamilton, après lui mise à nu par M. Cayley dans un très important Mémoire sur les matrices dans les Philosophical Transactions pour 1857 ou 1858, et étendue par lui aux matrices d'un ordre quelconque, mais sans démonstration; cette démonstration a été donnée plus tard per feu M. Clifford (voir ses oeuvres posthumes), par M. Buchheim dans le Mathematical Messesger (marchant, comme il l'avoue, sur les traces de M. Tait, d'Édimbourg), par M. Ed. Weyr, par nousmême, et probablement par d'autres; mais les quatre méthodes citées plus haut paraissent être tout à fait distinctes l'une de l'autre.
([SyP], díl IV., str. 202)

[55] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 17(1885), str. 107.

[56] V této části předvedl řešení tzv. bilaterální rovnice tvaru $aq^n b + cq^{n-1} d + \ldots + gqh = r$, kde $a, b, c, \ldots$ jsou dané kvaterniony a q hledaný kvaternion. Jedná se zobecnění problému, který vyřešil téhož roku James Joseph Sylvester. Ten snahu a výsledky Eduarda Weyra i dalších matematiků řešících daný problém okomentoval na konci roku 1884 v časopisu Nature pochvalnými slovy (citováno i s dvěma chybami ve jménech, správně je Poincaré a Buchheim):

The subject could not be in better hands. The ball is served, and the most skilful and practised players – tha Cayleys, the Lipschitzes, the Poincarrés, the Weyrs, the Buckheims (and who knows how many more?) – stand round ready to receive it, and keep it flying in the air. ([Sy16], str. 36)

Uvedené výsledky můžeme využít i pro matice druhého řádu, jejich vztah ke kvaternionům však v první části práce ještě zmíněn není.

druhého řádu

$$\begin{matrix} w+z\sqrt{-1} & x+y\sqrt{-1} \\ -x+y\sqrt{-1} & w-z\sqrt{-1} \end{matrix}\ .$$

Na rozdíl od předchozí práce *O základní větě v theorii matric* z roku 1884 Weyr nepoužil pro označení matice jakékoli znaky ohraničující čtvercové schéma.

Pro matici M druhého řádu definoval matici e^M vztahem:

$$\mathrm{e}^M = \frac{\mathrm{e}^{\mu_1} - \mathrm{e}^{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot M + \frac{\mu_1 \cdot \mathrm{e}^{\mu_2} - \mu_2 \cdot \mathrm{e}^{\mu_1}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot E,$$

kde μ_1, μ_2 jsou tzv. *racines latentes* matice M. *Latentními kořeny* matice M přitom Weyr rozuměl (v dnešní řeči) její vlastní čísla. Při pojmenování kořenů charakteristické rovnice se v této práci přidržel Sylvesterovy terminologie,[57] později však od tohoto označení ustoupil. Ostatně právě v pasáži věnované zavedení matice e^M se na Sylvestera, resp. na jeho *seconde loi de mouvement algébrique*, který byl uveden téhož roku v Comptes Rendus, Weyr odvolal. Vztah pro e^M je totiž obdobou Sylvesterova výsledku, že každou celistvou nebo lomenou funkci $\varphi(M)$ matice M lze vyjádřit ve tvaru

$$\varphi(M) = \frac{\varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2} \cdot M + \frac{\mu_1 \cdot \varphi(\mu_2) - \mu_2 \cdot \varphi(\mu_1)}{\mu_1 - \mu_2} \cdot E.$$

V případě $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ je

$$\varphi(M) = \varphi'(\mu) \cdot M + (\varphi(\mu) - \mu\varphi'(\mu))E.$$

Dále Eduard Weyr hledal pro libovolnou matici M a příslušnou exponenciální funkci e^M periodu L, tj. matici L, pro kterou platí

$$\mathrm{e}^{M+L} = \mathrm{e}^M.$$

Došel k výsledku, že v obecném případě je periodou skalární matice L určená hodnotou $2k\pi i$, kde k je celé číslo. Uvažujeme-li však pouze tzv. matice komplanární s M, tj. matice ve tvaru $\alpha M + \beta E$, existuje vedle skalární periody $2\pi i$ ještě neskalární perioda

$$2\pi i \cdot \frac{M - \mu_2 E}{\mu_1 - \mu_2}\ .$$

[57] V článku *On the equation to the secular inequalities in the planetary theory* [Sy10] z roku 1883 Sylvester při zavedení pojmu *latent roots* napsal:

It will be convenient to introduce here a notion (which plays a conspicuous part in my new theory of multiple algebra), viz. that of the latent roots of a matrix – latent in a somewhat similar sense as vapour may be said to be latent in water or smoke in a tobacco-leaf. ([Sy10], str. 267, nebo [SyP], díl IV., str. 110)

Dále Eduard Weyr poopravil větu o periodách exponenciální funkce definované pro komplementární kvaterniony, kterou uvedl roku 1866 William Rowan Hamilton v práci *Elements of Quaternions* [Ha2].

V samém závěru článku autor definoval funkci inverzní k funkci e^M, tj. přirozený logaritmus $\log M$ matice M vztahem[58]

$$\mathrm{e}^{\log M} = M,$$

z něhož odvodil ekvivalentní explicitní vyjádření funkce:

$$\log M = \frac{\log \mu_1 - \log \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \cdot M + \frac{\mu_1 \log \mu_2 - \mu_2 \log \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \cdot E + k\omega E + k'\omega',$$

kde ω a ω' značí výše uvedené periody, k a k' jsou celá čísla.

Problematiku matic e^M a $\log M$ studoval Weyr i ve svých později publikovaných spisech *O binarných matricích*, *O theorii forem bilinearných*, *Zur Theorie der bilinearen Formen*, nicméně jejich zavedením v roce 1884 se stal zřejmě prvním matematikem, který s exponenciálou a logaritmem s maticovým argumentem pracoval. I kdybychom mu toto prvenství přiřkli neprávem, jeho zařazení mezi průkopníky je nezpochybnitelné. Americký matematik Cyrus Colton MacDuffee v útlé monografii *The Theory of Matrices* [Mc1] z roku 1933 i Morris Kline mnohem později v díle *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* [Kl1] z roku 1972 uvedli v partiích pojednávajících o historii této problematiky texty pozdější. MacDuffee zmínil (na str. 99) článek *Intégration par séries des équations différentielles linéaires* [Pn1] z roku 1888, který napsal italský matematik Giuseppe Peano (1858–1932) a který je překladem jeho italského originálu *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari* z roku 1887, dále práci Emmanuela Carvalla (1856–1945) *Sur les systèmes linéaires, le calcul des symboles différentiels et leur application à la physique mathématique* [Cv1] z roku 1891 a krátkou poznámku *Note on the representation of orthogonal matrices* [Tb3] Henryho Tabera z roku 1892. Oba matematikové, MacDuffee i Kline (ten na str. 811), shodně poukázali na text *On the roots of matrices* [Mz1] matematika kanadského původu Williama Henryho Metzlera (1863–1943) z roku 1892. Jedná se o disertační práci,[59] kterou Metzler napsal pod vedením již zmíněného Henryho Tabera a amerického matematika Williama Edwarda Storyho (1850–1930). Metzlerova práce byla publikována v časopisu American Journal of Mathematics. Citujme konkrétní Klinova slova:

In his paper … Metzler introduced transcendental functions of a matrix, writing each as a power series in a matrix. He established series for e^M, e^{-M}, $\log M$, $\sin M$, *and* $\sin^{-1} M$. *Thus*

$$\mathrm{e}^M = \sum_{n=0}^{\infty} M^n/n!$$

([Kl1], str. 811)

[58] Přidržíme se autorova značení, tj. funkci *přirozený logaritmus* matice M budeme značit $\log M$.

[59] Práce byla napsána na Clark University ve Worcesteru ve státě Massachusetts.

Erik Hemmingsen, emeritní profesor na Syracuse University, o Metzlerovi napsal:[60]

William Henry Metzler ... was the one who first pointed out that one could have the transcendental functions of a square matrix simply by substituting it into the appropriate Taylor series.

Pro kvaternion q však byly funkce e^q a $\log q$ studovány již dříve, a to v Hamiltonových monografiích *Lectures on Quaternions* a *Elements of Quaternions* z let 1853 a 1866. Dnes běžně využíváme vzájemně jednoznačný vztah mezi maticemi a homomorfismy, proto na tomto místě uveďme ještě skutečnost, že pro endomorfismus R byl endomorfismus e^R zaveden roku 1888 Peanem v knize *Calcolo geometrico* [Pn2] (str. 150) vztahem

$$e^R = 1 + R + \frac{R^2}{2!} + \frac{R^3}{3!} + \dots$$

Autorem reference na Weyrův článek pro časopis Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik[61] je německý matematik Stanislaus Ferdinand Victor Schlegel (1843–1905) působící v Hagenu. Dále viz např. časopis Bulletin des sciences mathématiques.[62]

2.6 Počátky Weyrovy teorie

- *Sur la théorie des matrices* [We5], 1885
- *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* [We6], 1885

V roce 1885 vyšly dva Weyrovy krátké články nazvané *Sur la théorie des matrices* a *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces*. Oba byly opět otištěny ve francouzském časopisu Comptes Rendus a představeny Charlesem Hermitem. Ač jsou datovány do téhož roku a mají obdobnou náplň, použil v nich autor mírně pozměněné pojmenování pro vlastní čísla matice. V prvním z uvedených článků se Eduard Weyr ještě držel plného názvu *latentní kořen*, zatímco v druhém používal již jen označení *kořen*. Výrazným společným znakem obou krátkých prací je to, že v nich autor ve stručnosti prezentoval některé své poznatky, které později plodně rozvinul a použil ve své *teorii charakteristických čísel* a s ní spojené problematice *typických tvarů matic*. Podrobně je vysvětlil především v práci *O theorii forem bilinearných*, resp. v její pozměněné německé verzi *Zur Theorie der bilinearen Formen* (viz dále).

Teorii vystavěl na pojmu *nulita matice*. V té době užívaný pojem nulita matice znamená (pro čtvercovou matici) rozdíl řádu a hodnosti matice. Byl

---

[60] *Recollections by Erik Hemmingsen, The Department of Mathematics until 1960* [online], http://math.syr.edu/DeptRecollections.htm

Úryvek je součástí příspěvku o Katedře matematiky na Syracuse University v New Yorku, na které byl Metzler v období 1895 až 1923 profesorem.

[61] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 16(1884), str. 107.

[62] Bulletin des sciences mathématiques 9(1885), str. 54–55.

zaveden roku 1882 Jamesem Josephem Sylvesterem.[63] Skutečnost, že dnes dáváme (alespoň v základních kurzech lineární algebry) přednost pojmu hodnost, je logická, neboť tento pojem má obecnější význam (zahrnuje i obdélníkové matice). Pojem nulita však zažívá v poslední době své znovuzrození.

V článku *Sur la théorie des matrices* autor nejprve zmínil Arthura Cayleyho a jeho slavnou *l'équation fondamentale* (Cayleyova-Hamiltonova věta) a dále Sylvesterovy *matrice dérogatoire.* (Přívlastek *dérogatoire* užíval James Joseph Sylvester pro matice řádu n, pro které existuje anulující polynom stupně nižšího než n.[64]) Poté přistoupil k prezentaci vlastních výsledků, které uvedl slovy:

Je suis parvenu à établir un théorème qui jette du jour sur ce sujet, et que je me permets de communiquer à l'Académie. ([We5], str. 787)

Pro matici M řádu n zapsal Eduard Weyr rovnici

$$(M-\lambda_1E)^{s_1-\alpha_1+1}(M-\lambda_2E)^{s_2-\beta_1+1}\ldots(M-\lambda_uE)^{s_u-\upsilon_1+1}=0,$$

kde $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_u$ jsou navzájem různá vlastní čísla matice M, s_1, $s_2,\ldots$, s_u jejich násobnosti a $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\upsilon_1$ nulity matic

$$M-\lambda_1E,\ M-\lambda_2E,\ \ldots,\ \ M-\lambda_uE.$$

Čísla $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\upsilon_1$ jsou menší než jim příslušná čísla s_1, s_2, …, s_u, a protože pro každé $i=1$, 2, …, u je matice $M-\lambda_iE$ singulární, jsou čísla $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\upsilon_1$ minimálně rovny jedné. Pro případ $\alpha_1=\beta_1=\cdots=\upsilon_1=1$ dostáváme anulující polynom stupně n (tj. tvrzení z Cayleyho *Memoáru*), v ostatních případech je však matice M *dérogatoire.* Autor tak odvodil výsledek, že pro danou matici M stupně n existuje anulující polynom stupně menšího než n právě tehdy, když existuje aspoň jedno vlastní číslo λ matice M, pro které je nulita matice $M-\lambda E$ větší než jedna.

Dalším výsledkem článku je tvrzení, že

$$s_1=\alpha_1,s_2=\beta_1,\ldots,s_u=\upsilon_1$$

---

[63] Zájemce o citaci Sylvesterovy definice nulity (včetně názvu jeho článku) odkazujeme na 1. kapitolu této knihy.

[64] James Joseph Sylvester zavedl tento pojem v roce 1884 v práci *Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton* [Sy12]. Konkrétně napsal následující slova:

Avant de considérer l'équation $xy=yx$, il importe d'avoir une idée nette d'une certaine classe de matrices que je nomme privilégiées ou dérogatoires, en tant qu'elles dérogent à la loi générale que toute matrice est assujettie à satisfaire à une équation identique dont le degré ne peut pas être moindre que l'ordre de la matrice.

Les matrices dérogatoires sont justement celles qui satisfont à une équation d'un ordre inférieur à leur ordre propre; on peut les nommer simplement, doublement, triplement, … dérogatoires, selon que le degré de l'équation identique à laquelle elles satisfont diffère par une, deux, trois, … unités du degré minimum ordinaire ([Sy12], str. 471, nebo [SyP], str. 157)

Tyto matice lze definovat také odlišnými způsoby, například jako matice mající alespoň jedno vlastní číslo λ_i, pro které $\dim\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_iE)\neq 1$, nebo jako matice mající alespoň jedno vlastní číslo, k němuž náleží více než jedna Jordanova buňka, nebo samozřejmě jako matice, jejichž charakteristický a minimální polynom nejsou totožné atd.

platí právě tehdy, když lze matici M psát ve tvaru

$$M = A^{-1} M_0 A,$$

kde M_0 značí diagonální matici, jejíž hlavní diagonála obsahuje vlastní čísla matice M (v počtu rovném násobnosti daného vlastního čísla), a A je matice, jež má nulitu nula, tj. v dnešní řeči matice M je diagonalizovatelná, právě když se násobnost každého vlastního čísla λ_i rovná nulitě matice $M - \lambda_i E$.

Další uvedené tvrzení je významné, jedná se totiž o Weyrův zápis odhadu nulity součinu dvou matic:

... le degré de nullité d'un produit de matrices est au plus égal à la somme des degrés de nullité des facteurs, et au moins égal au plus petit de ces degrés. ([We5], str. 788)

Označíme-li nulitu matice zkratkou nul, můžeme slovní vyjádření přepsat do symbolického zápisu

$$\text{nul}\,(M_i) \leq \text{nul}\,(M_1 M_2) \leq \text{nul}\,(M_1) + \text{nul}\,(M_2), \qquad i = 1, 2.$$

Rovněž tento vztah je úzce spjat s Jamesem Josephem Sylvesterem, který jej představil tři roky před Eduardem Weyrem, tj. roku 1882.[65]

V závěru článku je uvedena věta o neřešitelnosti konkrétní maticové rovnice. Jestliže N je matice s α-násobným vlastním číslem 0 a α_1 je nulita matice N $(\alpha_1 < \alpha)$, potom neexistuje matice X, pro kterou by platilo $X^k = N$, kde k je celé číslo větší než $\alpha - \alpha_1$.

Shrnutí Weyrova článku vyšlo v roce 1887 v časopisu Bulletin des Sciences Mathématiques,[66] neobsahovalo však ani zmínku o nutné a postačující podmínce pro diagonalizovatelnost čtvercové matice. V několika souvětích byly hlavní výsledky Weyrovy práce rovněž zapsány berlínským matematikem Eugenem Otto Erwinem Nettem (1848–1919) v referativním časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.[67]

V článku *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* je ihned v úvodu představen nový pojem. Jedná se o *charakteristické číslo* příslušné vlastnímu číslu matice. Eduard Weyr uvedl, že pro každou komplexní matici M řádu n a její s-násobné vlastní číslo λ existuje přirozené číslo t, tzv. *index matice A* příslušný vlastnímu číslu λ, pro které je[68]

$$\text{nul}(M - \lambda E) < \text{nul}(M - \lambda E)^2 < \cdots < \text{nul}(M - \lambda E)^t = \text{nul}(M - \lambda E)^{t+1} = \cdots$$

[65] Sylvesterova originální formulace tvrzení (včetně názvu práce) je obsažena v 1. kapitole.

[66] Bulletin des Sciences Mathématiques 11(1887), Revue des publications académiques et périodiques, str. 158–159.

[67] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 17(1885), str. 109.

[68] Současný český matematik Jiří Holenda ve své knize *O maticích* [Hl1] z roku 2007 nazval toto číslo (pro $\lambda = 0$) *vzestup matice*, moderní anglicky psané odborné články často používají (pro $\lambda = 0$) termínu *index of a matrix*, pro nilpotentní matici *nilpotency index of a matrix*. Karl-Heinz Förster a Béla Nagy v práci *On spectra of expansion graphs and matrix polynomials, II* [FN1] zmínili současně termíny *index of A*, *ascent of A* (což odpovídá Holendově české terminologii), ale překvapivě také termín *descent of A*.

Označíme-li

nul $(M - \lambda E) = \eta_1$,
nul $(M - \lambda E)^2 = \eta_1 + \eta_2$,
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
nul $(M - \lambda E)^t = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_t$,

potom přirozená čísla $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ nazveme *charakteristická čísla příslušná vlastnímu číslu* λ *matice* M. Nejedná se tedy o nic jiného než o přírůstky nulit matic $M - \lambda E$, $(M - \lambda E)^2$, ..., $(M - \lambda E)^t$.

Pro charakteristická čísla příslušná vlastnímu číslu λ matice platí:

$$\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_t, \qquad \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_t = s.$$

Označíme-li počty jednotlivých charakteristických čísel (příslušné ke všem vlastním číslům λ_1, λ_2, ..., λ_u matice M) symboly t_1, t_2, ..., t_u, potom lze výsledek z článku *Sur la théorie des matrices* o anulujícím polynomu menšího stupně než je řád příslušné matice zpřesnit rovností

$$(M - \lambda_1 E)^{t_1} (M - \lambda_2 E)^{t_2} \dots (M - \lambda_u E)^{t_u} = 0,$$

kde polynom na levé straně má ze všech anulujících polynomů matice M nejmenší stupeň. Jedná se tedy (v dnešní řeči) o minimální polynom matice M.

Eduard Weyr poznamenal, že matice M a N jsou podobné, právě když mají stejná vlastní čísla a k nim příslušná charakteristická čísla. Dále uvedl velmi důležitý poznatek: systém všech vlastních čísel a jim příslušných charakteristických čísel tvoří úplný systém invariantů podobnosti matic a ke každé možné volbě těchto invariantů je přidružena třída podobných matic. Pro soubor všech charakteristických čísel příslušných ke všem vlastním číslům matice A se vžil název *Weyrova charakteristika matice* A. Bereme-li v úvahu pouze charakteristická čísla odpovídající jednomu vlastnímu číslu λ, mluvíme o *Weyrově charakteristice matice* A *příslušné vlastnímu číslu* λ.

Weyr dále sestrojil konkrétní matici M řádu n mající daná vlastní čísla a charakteristická čísla a k této matici nalezl s využitím vztahu $X = Q^{-1}MQ$ všechny matice X patřící do stejné třídy podobných matic. Přitom matice M má velmi jednoduchý tvar, který Weyr později nazval *typickým tvarem*. Prvky typického tvaru matice jsou pouze vlastní čísla této matice, jedničky a nuly. Až na nepodstatné změny v uspořádání prvků se jedná o Jordanovu matici.

Resumé druhého Weyrova článku vyšlo opět v časopisu Bulletin des Sciences Mathématiques,[69] článek je zmíněn i v časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.[70]

Na konec této partie podotkněme, že z uvedených francouzských článků lze vyčíst pouhé základy Weyrovy teorie. Její přehledné shrnutí bude později formulováno jazykem současné lineární algebry ve 3. kapitole *Weyrova teorie charakteristických čísel*.

[69] Bulletin des Sciences Mathématiques 11(1887), Revue des publications académiques et périodiques, str. 162–163.
[70] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 17(1885), str. 109.

2.7 Teorie matic pro českého čtenáře

- *O binarných matricích* [We8], 1887

Zcela jiný charakter než oba francouzské články z roku 1885 má další z Weyrových prací s maticovou tematikou. Spis *O binarných matricích* se odlišuje rozsahem (43 stran), „hustotou“ nových výsledků (v podstatě absentují), podrobným odvozováním a dokazováním poznatků, cílovou skupinou čtenářů i jazykem použitým k výkladu. Text byl otištěn roku 1887 ve Věstníku Královské české společnosti nauk a zřejmě byl primárně určen pro seznámení širší české matematické obce s maticemi a k objasnění jejich vztahu s hyperkomplexními čísly.[71] Jedná se o první český text, v němž jsou od základů a elementárně představeny nejdůležitější poznatky teorie matic.

Určitým nedostatkem spisu (pro pochopení maticového aparátu však spíše výhodou) je skutečnost, že teorie je budována pouze pro jisté čtvercové matice. *Binarnými maticemi* totiž autor nazýval matice druhého řádu. Z hyperkomplexních čísel se tedy věnoval kvaternionům, přičemž pod pojmem kvaternion rozuměl kvaternion s komplexními koeficienty,[72] k odlišení kvaternionu s reálnými koeficienty pak používal přívlastku reálný. Pojednání začíná slovy:

V jedné ze svých úvah o matricích „Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton“ ... vytknul Sylvester výslovně totožnost theorie binarných matric s theorií kvaternionů; ale již Cayley ve své základní práci v tomto oboru „On the theory of Matrices“, ... byl k souvislosti obou theorií poukázal.

Theorie kvaternionů založena Hamiltonem vzhledem k zamýšleným applikacím na úvahách geometrických; avšak nebude zajisté nezajímavo přihlédnouti k ní se stanoviska ryze počtářského, zaujatého v theorii matric.

Následující, arci velice elementarné úvahy obsahují základy theorie binarných matric a tím i základy theorie kvaternionů. ([We8], str. 358)

Matici Eduard Weyr v této práci definoval jako čtvercové schéma sestávající ze čtyř prvků.

Matricí druhého řádu, aneb prostě matricí rozumíme v následujících úvahách soustavu čtyř realných neb komplexních veličin a, b, c, d seřaděných do čtvercového schematu

$$\left\{ \begin{matrix} a, & b \\ c, & d \end{matrix} \right\}. \tag{1}$$

([We8], str. 358)

V celé práci pak používal bez bližšího určení pouze slovo *matrice* k označení matice řádu dva; matice vyššího řádu ani matice obdélníkové se v textu nevyskytují.

[71] Kromě Eduarda Weyra se problematikou hyperkomplexních čísel v českých zemích ve druhé polovině 19. století zabývali August Seydler (1849–1891), Matyáš Lerch, František Josef Studnička a Jan Odstrčil (1837–1888).

[72] Kvaternion s komplexními koeficienty se většinou nazývá *bikvaternion*, přesněji také *hyperbolický bikvaternion*. Pojem bikvaternionu byl představen roku 1853 v knize *Lectures on Quaternions*, jejímž autorem je William Rowan Hamilton.

Ihned po definici poukázal na vzájemně jednoznačný vztah mezi maticemi a lineárními substitucemi. Této souvislosti potom využíval k některým dalším definicím, které se dnešnímu čtenáři jeví poněkud těžkopádné. Dokumentujme tuto skutečnost na dvou triviálních příkladech z prvního paragrafu nazvaného *Addice a subtrakce*:

Dvě matrice nazýváme rovnými a píšeme

$$\left\{\begin{matrix} a, & b \\ c, & d \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} a', & b' \\ c', & d' \end{matrix}\right\}$$

pakli applikovány na dvě libovolné hodnoty x, y *podávají tytéž hodnoty* ξ, η *t. j. pakli*

$$ax + by = a'x + b'y, \quad cx + dy = c'x + d'y; \quad \dots$$

([We8], str. 358–359)

Teprve poté je uvedena „naše definice", tj. rovnost prvků na odpovídajících pozicích obou matic. Horší čitelnost textu pro současného čtenáře je ještě více evidentní ze zavedení sčítání matic:

Součtem dvou matric M a M' t. j.

$$\left\{\begin{matrix} a, & b \\ c, & d \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} a', & b' \\ c', & d' \end{matrix}\right\}$$

rozumíme matrici, která applikována na x, y *podává hodnoty* $\xi + \xi'$, $\eta + \eta'$, *pakli dané dvě matrice transformují* x, y *na* ξ, η, *resp. na* ξ', η'.
([We8], str. 359)

Také v tomto případě však Eduard Weyr uvedl následně součet matic i dle našich zvyklostí.

Vedle sčítání matic zavedl také jejich rozdíl, součin a podíl a uvedl základní poznatky o těchto operacích. Definoval nulovou a jednotkovou matici, pro regulární matici inverzní matici (ve Weyrově terminologii *reciproká matrice*). Kromě již zmíněného 1. paragrafu je úvodní výklad obsahem i 2. paragrafu *Multiplikace*, 3. paragrafu *Divise* a 4. paragrafu *Reciproká matrice.* Zajímavé je, že pro determinant matice Weyr zavedl ještě termín *absolutní hodnota matrice.* Věta o násobení determinantů je tak v této terminologii zapsána v maticové řeči:

… absolutní hodnota součinu libovolného počtu matric rovná se součinu absolutních hodnot jednotlivých faktorů. ([We8], str. 365)

Formulace zvláště tohoto tvrzení pomocí matic byla v době zaměřené na studium determinantů velmi neobvyklá, vždyť i dnes větu vyslovujeme jazykem teorie determinantů.

Zvláštní pozornost věnoval Eduard Weyr skalární matici *čili skalaru.* Uvedl pravidla pro operace s nimi a zdůraznil uzavřenost těchto operací na množině skalárních matic. Skalární matici určenou hodnotou a nejprve označil (a) a poté napsal:

… že počítání se skalarnými mátricemi (a) se řídí těmiže pravidly jako počítání s obyčejnými (realnými neb komplexními) veličinami a. Z této příčiny

budeme značiti skalar (a) prostě literou a, majíce však na paměti rozdíl mezi skalarem a a obyčejnou veličinou a. ([We8], str. 366–367)

Zpětně tak odůvodnil svůj (z našeho pohledu nepřesný) zápis skalární matice z předchozích publikací, na který jsme poukázali dříve.

V následujícím, šestém paragrafu *Celistvá a lomená funkce matrice* zavedl Eduard Weyr mocninu matice s celým exponentem a uvedl některé vlastnosti pro násobení mocnin. Celistvou funkcí m-tého stupně matice M rozuměl matici

$$a_0 M^m + a_1 M^{m-1} + \ldots + a_m E,$$

kde $a_0 \neq 0$, $a_1, \ldots, a_m$ jsou čísla, a lomenou funkci matice zavedl jako podíl dvou celistvých funkcí této matice. Na tyto definice navázal sedmý paragraf *Základní rovnice dané matrice a redukce racionalných funkcí.* S využitím Cayleyovy-Hamiltonovy věty autor jednoduše dokázal, že matice M^2, resp. M^3 lze redukovat na lineární funkce matice M, a poté výsledek zobecnil pro libovolnou celistvou a racionální funkci φ. Jinými slovy, že lze psát $\varphi(M) = \alpha M + \beta E$, kde E je jednotková matice a α, β jsou vhodná čísla. Ta jsou závislá jen na kořenech matice a lze je vyjádřit dle již zmíněného „zákona“ (*seconde loi de mouvement algébrique*). V případě různých kořenů matice λ_1, λ_2 se jedná o vztahy

$$\alpha = \frac{\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad \beta = \frac{\lambda_1 \cdot \varphi(\lambda_2) - \lambda_2 \cdot \varphi(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

V případě $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ platí

$$\alpha = \varphi'(\lambda), \qquad \beta = \varphi(\lambda) + \lambda \cdot \varphi'(\lambda).$$

Druhý případ Weyr odvodil položením $\lambda_1 = \lambda_2 + \varepsilon$ a limitním přechodem pro ε blížící se nule. Odvození uskutečnil v osmé části *O kořenech matrice*, jejíž název přesně popisuje, čemu je pasáž věnována. Po definici vlastních čísel[73] matice je odvozena vlastnost, že má-li matice M vlastní čísla λ_1, λ_2, má celistvá funkce $\varphi(M)$ vlastní čísla $\varphi(\lambda_1)$, $\varphi(\lambda_2)$, resp. lomená funkce $\frac{\varphi(M)}{\varphi_1(M)}$ vlastní čísla $\frac{\varphi(\lambda_1)}{\varphi_1(\lambda_1)}$, $\frac{\varphi(\lambda_2)}{\varphi_1(\lambda_2)}$. Následuje text o výše uvedené závislosti skalárů α, β na vlastních číslech matice.

V devátém paragrafu *Obecná funkce matrice* autor uvedl následující výsledek: jestliže jsou absolutní hodnoty vlastních čísel λ_1, λ_2 matice M menší než je poloměr konvergence řady[74]

$$\varphi(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v, \qquad \text{resp. obecněji} \qquad \varphi(z) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v z^v,$$

potom je definována i matice

$$\varphi(M) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v M^v, \qquad \text{resp.} \qquad \varphi(M) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v M^v,$$

[73] Eduard Weyr v tomto pojednání používá k označení vlastního čísla pouze slovo *kořen.* V definici navíc připomněl, že Sylvester používal pro tento pojem termínu *latentní kořen.*

[74] Případ zahrnující i záporné mocniny platí pouze pro regulární matici.

a platí $\varphi(M) = \alpha M + \beta E$, kde se skaláry α, β určí pomocí řady $\varphi(z)$, konkrétněji opět dle Sylvesterova *seconde loi de mouvement algébrique.*

V desátém paragrafu *Typický tvar matrice* se Eduard Weyr zabýval kanonickým (*typickým*) tvarem matice. Uvedl, že každou matici M lze zapsat ve tvaru $M = Q^{-1}M_0Q$, kde Q je regulární matice a matice M_0 má tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda_1, & 0 \\ 0, & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{jsou-li vlastní čísla } \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ matice } M \text{ různá,}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda, & 0 \\ 0, & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \text{je-li } M \text{ skalární a } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \text{ a konečně}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda, & 0 \\ 1, & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \text{není-li } M \text{ skalární a } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda.$$

Matice M je tedy podobná maticí M_0, která má velmi jednoduchý, *typický* tvar.

V jedenáctém paragrafu dospěl Eduard Weyr pomocí typického tvaru matice k vyjádření maticové mocninné řady, tj. matice $\sum_{v=0}^{\infty} a_v M^v$, *čímž výsledky § 9. na novo potvrzeny.* ([We8], str. 380)

V následující části nazvané *O rovnici nejnižšího stupně* věnoval pozornost minimálnímu polynomu matice M. Došel k výsledku, že pro matici M s dvěma různými kořeny $\lambda_1,\ \lambda_2$ je roven $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$ a v případě $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ je roven buď $\lambda - \lambda_0$ (je-li M skalární matice), nebo $(\lambda-\lambda_0)^2$ (není-li M skalární matice).

Ve třináctém paragrafu *Řešení algebraické rovnice o skalarných koefficientech* hledal všechny matice M, které splňují vztah

$$M^n + a_1M^{n-1} + \ldots + a_nE = 0,$$

speciálně pak vztah $M^n = E$.

Eduard Weyr se i v tomto spisu věnoval komplanárním maticím. Připomeňme, že maticí komplanární s maticí M rozuměl každou matici tvaru $\alpha M + \beta E$, kde α, β jsou skaláry. Ukázal, že všechny matice komplanární s určitou maticí M jsou komplanární navzájem a že výsledkem sčítání a násobení komplanárních matic je opět matice komplanární s maticemi, s nimiž operace provádíme. S maticí M je rovněž komplanární matice X, která vyhovuje rovnici

$$X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_nE = M.$$

Nalezené skutečnosti shrnul do následující věty:

Matrice komplanarné s danou neskalarnou matricí

$$M = \begin{Bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{Bmatrix}$$

tvoří tedy system, z něhož nevystoupíme, applikujeme-li na jeho matrice základní operace arithmetické, mocnění, odmocňování, a t. d. ([We8], str. 386)

Upozornil rovněž na skutečnost, že v případě navzájem komplanárních matic je jejich násobení komutativní operací.

Náplň patnáctého a šestnáctého paragrafu (*Periody exponentialné funkce*, *Logarithmus matrice*) nejlépe vystihuje Weyrova poznámka pod čarou: *Tento a následující § uveřejnil jsem v podstatě pod názvem „Sur la théorie des quaternions“ v Comtes Rendus ze dne 26. května 1884.* ([We8], str. 387)

Kromě již publikovaných výsledků Eduard Weyr dopsal některé nové poznatky, např. že přirozený logaritmus nulové matice neexistuje nebo že přirozený logaritmus skalární matice je opět skalární maticí, konkrétněji je-li M skalární matice určená hodnotou λ, platí $\log M = (\log\lambda + 2k\pi\mathrm{i})E$, kde k je celé číslo. K problematice periody exponenciály s maticovým argumentem se autor ještě krátce vrátil na poslední straně svého pojednání.

Vztah mezi maticemi druhého řádu a hyperkomplexními čísly, konkrétněji kvaterniony, popsal v posledních třech paragrafech (*Zavedení čtyr základních matric*, *Hamiltonův system kvaternionů*, *Pokračování*). Vyšel z následujícího poznatku: jsou-li J_1, J_2, J_3, J_4 čtyři lineárně nezávislé matice druhého řádu, potom lze každou matici M druhého řádu psát ve tvaru

$$M = \rho_1 J_1 + \rho_2 J_2 + \rho_3 J_3 + \rho_4 J_4$$

a matice druhého řádu považovat za systém hyperkomplexních čísel se čtyřmi základními jednotkami. Neboli slovy autora platí:

Matrici $\sum \rho_k J_k$ můžeme pokládati za komplexní číslo složené z jednotek J_k pomocí obyčejných kvantit ρ_k. ([We8], str. 393)

Dále je zavedena očekávaným způsobem rovnost dvou hyperkomplexních čísel, jejich součet a rozdíl. Součin je zapsán vztahem

$$\sum_{(k)} \rho_k J_k \sum_{(k)} \rho'_h J_h = \sum_{(k,h)} \rho_k \rho'_h J_k J_h, \qquad k,\, h = 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Součin $J_k J_h$ lze opět vyjádřit jako lineární kombinaci základních jednotek. Položíme-li

$$J_k J_h = \sum_{(j)} \varepsilon_j^{(k,h)} J_j, \qquad j = 1,\, 2,\, 3,\, 4,$$

lze součin napsat opět ve tvaru patřícího do uvažovaného systému:

$$\sum_{(k)} \rho_k J_k \sum_{(h)} \rho'_h J_h = \sum_{(k,h)} \rho_k \rho'_h \sum_{(j)} \varepsilon_j^{(k,h)} J_j.$$

Koeficienty $\varepsilon_j^{(k,h)}$ uvedené v této rovnosti se dnes nazývají *strukturní konstanty* (bližší vysvětlení viz dále).

Eduard Weyr rovněž uvedl některé konkrétní volby základních matic, velmi jednoduchá je následující varianta:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro volbu

$$J_1 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

potom hledal zbývající tři matice tak, aby platilo

$$J_2 J_2 = J_3 J_3 = -J_1, \quad J_2 J_3 = -J_3 J_2 = J_4.$$

Analogicky lze tyto podmínky při záměně značení J_1, J_2, J_3, J_4 za symboly 1, i, j, k zapsat známými vztahy

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1, \quad \mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}.$$

Ukázal, že požadované vztahy splňují matice

$$J_2 = \mathrm{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \mathrm{j} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_4 = \mathrm{k} = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}.$$

Souvislost mezi maticemi druhého řádu a kvaterniony potom vyjádřil následující poznámkou:

Nyní jest patrné, že theorie matric jest totožná s theorií kvaternionů; stačí libovolnou matrici

$$M = \left\{ \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\}$$

uvést do tvaru $w + xi + yj + zk$, kde w, x, y, z jsou skalary, t. j. do tvaru kvaternionu, aby ona shoda byla patrna. ([We8], str. 397)

Dnes bychom řekli, že každou matici M druhého řádu lze zapsat jako lineární kombinaci čtyř matic, které tvoří bázi vektorového prostoru všech matic druhého řádu. Mezi množinou uspořádaných čtveřic čísel uvažovaného tělesa, která jsou koeficienty lineární kombinace, a množinou kvaternionů s koeficienty z tohoto tělesa existuje bijektivní zobrazení (izomorfismus).

V závěru práce Eduard Weyr uvedl některá konkrétní tvrzení o kvaternionech, která jsou analogická již zmíněným větám o maticích druhého řádu (součin dvou nenulových kvaternionů může být roven nule; za jistých podmínek reprezentuje řada $\sum_{-\infty}^{\infty} a_v q^v$ kvaternion apod.) a celou tuto problematiku shrnul v lakonickém konstatování:

Tímto spůsobem bychom mohli všecky předcházející výsledky, jichž jsme se o matricích dodělali, přenésti do theorie kvaternionů. ([We8], str. 400)

V roce 1890 vyšla ve Věstníku literárním v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky[75] recenze Weyrových publikací *O theorii forem bilinearných*

[75] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 19(1890), str. 318–328.

a *O binarných matricích*. Je podepsána řeckými písmeny $\sigma\alpha$. Práci *O binarných matricích* je věnováno přibližně pět stran obsahujících vesměs stručný výklad poznatků publikovaných v tomto pojednání. V úvodu recenzent poznamenal:

Pro naši literaturu má z jednotlivých těchto prací zvláštní důležitost uvedené shora pojednání o binarných matricích. (str. 318)

Svým názorem tak autor posudku přisoudil větší význam pro českou matematickou komunitu základnímu textu o maticích řádu dva než později vydané knize, v níž jsou předloženy významné výsledky teorie matic včetně dnes ceněné Weyrovy teorie charakteristických čísel. Z hlediska ohlasů ve světě – a také z pohledu dnešního – je pozdější z titulů mnohem významnější (viz dále). Zařadíme-li však práce do kontextu doby, není názor recenzenta tak překvapivý. Pro české matematiky, kteří se (kromě Eduarda Weyra a Ludvíka Krause) teorií matic nezabývali a zřejmě nebyli seznámeni s výsledky Sylvestera a Cayleyho, by skutečně mělo mít elementárním způsobem psané pojednání *O binarných matricích* větší přínos. V závěru recenze je české matematické komunitě doporučeno studium teorie matic odůvodněné její souvislosti s kvaterniony, kterým naopak u nás určitá pozornost věnována byla:

Z toho vysvitá důležitosť studia matic pro každého, kdo spatřuje v kvaternionech důležitou pomůcku pro studium problémů geometrických a kinetických, s tímto operačním kalkulem se zanáší. (str. 322)

Naděje, které byly recenzentem ve spis vkládány, naplněny nebyly. Ani jeden český matematik se pro studium matic nenadchl, Eduard Weyr tak ještě po dlouhou dobu svého nástupce v českých zemích nenašel.

Ani v zahraničí se spis velké reakce nedočkal, čemuž se nelze divit. Pro britské algebraiky pracující s maticemi byl příliš elementární, pro matematiky tvořící na evropském kontinentě stál vzhledem k tehdy přetrvávajícímu zaměření na teorii determinantů zřejmě na okraji zájmů. K těmto skutečnostem navíc musíme přičíst jazykovou bariéru. V 19. ročníku časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik[76] vyšlo jediné, strohé, německy psané souvětí konstatující, že tento Weyrův spis obsahuje základy teorie matic druhého řádu, a tím i s ní spojenou teorii kvaternionů. Autorem je František Josef Studnička. Práce je uvedena v bibliografii knihy *Lectures on matrices*, jež je jednou z prvních monografií věnovaných teorii matic a kterou publikoval roku 1934 Joseph Henry Maclagen Wedderburn.

2.8 Lineární asociativní algebry a algebra matic

- *Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices* [We9], 1887
- *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* [We10], 1887

Kromě spisu *O binarných matricích* publikoval Eduard Weyr roku 1887 také dva francouzsky psané články, jejichž společným tématem je studium lineárních

[76] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 19(1887), str. 694.

asociativních algeber.

Připomeňme, že lineární asociativní algebrou nad polem T (jehož prvky nazýváme skaláry) rozumíme množinu A se dvěma binárními operacemi, sčítáním „$+$“ a násobením „$*$“, definovanými pro prvky množiny A a dále s násobením „$\circ$“ prvků množiny A prvky tělesa T. Přitom je $(A, +, \circ)$ vektorovým prostorem nad polem T, dále je $(A, +, *)$ asociativním okruhem a obě násobení jsou svázána podmínkou

$$(\alpha \circ a) * b = \alpha \circ (a * b) = a * (\alpha \circ b)$$

pro každé $\alpha \in T$ a $a,\ b \in A$.

V dalším textu již nebudeme (stejně jako Eduard Weyr a jak je to i dnes zvykem) rozlišovat symbol pro násobení a násobení skalárem a ze zápisů symboly pro jejich označení často zcela vyloučíme. Bázi $\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$ vektorového prostoru A nazýváme též bází lineární asociativní algebry. Všechny prvky algebry A mají totiž tvar

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j,$$

kde $\alpha_j \in T$.

Weyrův třístránkový článek *Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices* byl publikován ve Věstníku Královské české společnosti nauk. Plynule navazuje na myšlenky, které byly uvedeny v závěru pojednání *O binarných matricích.* Máme tím na mysli zejména souvislost mezi maticemi a kvaterniony.

V úvodu Weyr připomněl tento vztah a také jeho obecnější případ:

On sait de quelle manière le système des quaternions de Hamilton peut être réalisé, en prenant pour les quatre unités des matrices (substitutions linéaires) de second ordre convenablement choisies. Plus généralement, si l'on prend m^2 matrices d'ordre m linéairement indépendantes pour des unités d'un système de quantités complexes, l'ensemble de ces quantités sera représenté par toutes les matrices d'ordre m; dans ce système la multiplication sera évidemment associative. ([We9], str. 616)

Uvedl tak svoji motivaci ke studiu problematiky, jež je v článku vyšetřována. Právě uvedené myšlenky ho totiž přirozeně nasměrovaly k položení následující otázky:

„*Un système des quantités complexe à n unités principales et à multiplication associative étant donné, peut on réaliser ce système en substituant aux n unités des matrices convenablement choisies?*“ ([We9], str. 616)

Svými idejemi a jejich zpracováním si Eduard Weyr na otázku odpověděl kladně. Podařilo se mu totiž reprezentovat lineární asociativní algebru v algebře matic. Uvažoval lineárně nezávislé jednotky $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ algebry A (dnes bychom mluvili o bázi lineární asociativní algebry) a její prvky vyjádřil ve tvaru

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n.$$

Jejich součet, rozdíl a součin jsou dány vztahy

$$\sum_{h=1}^{n} \xi_h e_h \pm \sum_{h=1}^{n} \xi'_h e_h = \sum_{h=1}^{n} (\xi_h \pm \xi'_h) e_h,$$

$$(\sum_{h=1}^{n} \xi_h e_h)(\sum_{k=1}^{n} \xi'_k e_k) = \sum_{h,\,k=1}^{n} (\xi_h \xi'_k) e_h e_k,$$

kde součiny jednotek $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ jsou definovány n^2 rovnicemi

$$e_h e_k = \alpha^h_{k1} e_1 + \alpha^h_{k2} e_2 + \ldots + \alpha^h_{kn} e_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha^h_{kj} e_j, \qquad h,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Právě uvedené vztahy jsou dnes nazývány *strukturními vzorci*. Tzv. *strukturní konstanty* α^h_{kj} musí být zavedeny takovým způsobem, aby nebyla narušena asociativnost algebry. Protože

$$(e_h e_k) e_l = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha^h_{kj} e_j \right) e_l = \sum_{j=1}^{n} \alpha^h_{kj} \sum_{i=1}^{n} \alpha^j_{li} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha^h_{kj} \alpha^j_{li} \right) e_i$$

a dále

$$e_h (e_k e_l) = e_h \sum_{j=1}^{n} \alpha^k_{lj} e_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha^k_{lj} e_h e_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha^k_{lj} \sum_{i=1}^{n} \alpha^h_{ji} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha^k_{lj} \alpha^h_{ji} \right) e_i,$$

je podmínkou asociativity rovnost

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha^h_{kj} \alpha^j_{li} = \sum_{j=1}^{n} \alpha^k_{lj} \alpha^h_{ji}.$$

Eduard Weyr hledal n matic $E_1,\, E_2,\, \ldots,\, E_n$ řádu n, které by dosadil do uvedených vztahů místo jednotek $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ takovým způsobem, aby všechny rovnosti zůstaly zachovány. Položil

$$E_h = \begin{pmatrix} \alpha^h_{11} & \alpha^h_{21} & \cdots & \alpha^h_{n1} \\ \alpha^h_{12} & \alpha^h_{22} & \cdots & \alpha^h_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^h_{1n} & \alpha^h_{2n} & \cdots & \alpha^h_{nn} \end{pmatrix}, \qquad h = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Vzhledem k dalším výpočtům raději upozorněme, že prvky matice E_h jsou v porovnání s obvyklým zápisem indexovány „transponovaně" (první dolní index značí sloupec matice, druhý dolní index značí řádek matice).

Matice $E_h E_k$ má na místě *il* prvek

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha^h_{ji} \alpha^k_{lj},$$

matice $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^{h} E_j$ má na místě il prvek

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^{h} \alpha_{li}^{j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{lj}^{k} \alpha_{ji}^{h}.$$

Obě matice tedy mají na uvedeném místě stejný prvek. Proto při Weyrově výše uvedené volbě n matic skutečně platí

$$E_h E_k = \alpha_{k1}^{h} E_1 + \alpha_{k2}^{h} E_2 + \ldots + \alpha_{kn}^{h} E_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^{h} E_j, \qquad h,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Matice $E_1,\, E_2,\, \ldots,\, E_n$ se násobí stejně jako jednotky $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ a existuje tedy zobrazení, které každému prvku $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ asociativní algebry A přiřazuje jeho obraz $\sum_{i=1}^{n} a_i E_i$, tj. prvek algebry čtvercových matic řádu n.

Uveďme však, že tyto poznatky nejsou zcela nové, podobné výsledky publikoval francouzský matematik Jules Henri Poincaré (1854–1912) v práci *Sur les nombres complexes* [Pi1] z roku 1884 a Charles Sanders Peirce[77] (1839–1914).

Krátkou poznámku o Weyrově práci napsal Eugen Netto v časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.[78]

Další reakce na Weyrovu publikaci nalezneme v přehledovém článku *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen* (1898), který napsal Eduard Study pro vícesvazkové německé dílo Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, a v jeho přepracované verzi *Nombres complèxes* (1908), kterou napsala autorská dvojice Cartan–Study pro francouzskou Encyclopédie des sciences mathématiques, dále v německy psané publikaci *Repertorium der höheren Mathematik* (1910), což je druhé, rozšířené vydání prvního svazku původně italského díla *Repertorio di matematiche superiori* Ernesta Pascala, či v obsáhlejším článku Thomase Hawkinse *Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory* [Hw1] (1972), který obsahuje rovněž ohlasy na Weyrovy práce *Sur la théorie des quaternions*, *Sur la théorie des matrices* a *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces.*

Druhý z Weyrových článků z roku 1887 věnovaný lineárním asociativním algebrám se nazývá *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales.* V článku se autor o teorii matic vůbec nezmínil, jeho obsah je však do řeči matic přeložitelný. Výsledky, které v této práci odvodil obecně pro lineární asociativní algebru dimenze n, můžeme vyslovit pro algebru matic, jež je příkladem lineární asociativní algebry. „Překlad“ do symboliky a terminologie matic nás však nemusí příliš zaměstnávat, protože jej provedl autor

[77] Charles Sanders Peirce byl synem amerického astronoma, matematika a filozofa Benjamina Peirceho (1809–1880), který vybudoval pojem *lineární asociativní algebra.* Stalo se tak v práci s příznačným názvem *Linear associative algebra. With notes and addenda, by C. S. Peirce, son of the author* [Pb1], která byla publikována sice až rok po autorově smrti, tj. roku 1881, ale již roku 1870 byla čtena v Americké akademii věd ve Washingtonu. Byl to právě Charles Sanders Peirce, jenž otcovu práci připravil k tisku a dále ji (jak je z názvu patrné) opatřil několika poznámkami.

[78] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 19(1887), str. 141.

sám. Pro matice řádu dva se tak stalo (jak jsme již viděli) v práci *O binarných matricích*, pro matice řádu n v knížce *O theorii forem bilinearných*, která bude představena později.

V uvedeném článku Eduard Weyr řešil závažný problém, kdy je pro daný prvek x algebry A řadou

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu,$$

kde α_ν jsou komplexní čísla, definován určitý prvek s algebry A.[79] Výsledkem jeho bádání je významná věta, že tento prvek je řadou definovaný právě tehdy, když kořeny minimálního polynomu prvku x leží uvnitř kruhu konvergence mocninné řady

$$\varphi(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu.$$

Uveďme na tomto místě originální Weyrovu formulaci tohoto tvrzení, abychom doložili skutečnost, že se jedná o větu vyslovenou ve tvaru ekvivalence:

Pour que (2) définisse une quantité complexe, il faut et il suffit que les racines $\mu_1, \dots, \mu_m$ se trouvent dans le cercle de convergence de la série $\varphi(\zeta)$. ([We10], str. 207)

Ihned na dalších řádcích je však napsána – a to navíc odlišným, méně výrazným fontem – tato poznámka:

A la vérité, ces racines peuvent même être sur la circonférence de ce cercle, si toutefois la série $\varphi(\zeta)$ et ses dérivées considérées plus bas convergent pour $\zeta = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, comme cela découle immédiatement de la démonstration qu'on va lire. ([We10], str. 207)

Existuje-li prvek s rovný uvažovanému nekonečnému součtu, lze jej vyjádřit jako lineární kombinaci prvků x, x^2, ..., x^m, kde $m+1$ je stupeň minimálního polynomu prvku x. Tedy platí rovnost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu = \bar{\alpha}_m x^m + \bar{\alpha}_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \bar{\alpha}_1 x.$$

Problematiku přitom Eduard Weyr studoval nejprve pro speciální případ, kdy má rovnice

$$\lambda^{m+1} + \gamma_1 \lambda^m + \ldots + \gamma_m \lambda = 0$$

[79] Weyrův způsob zavedení konvergence uvažované řady je ukázán na str. 92 této monografie v rámci rozboru Weyrovy mladší práce [We12]. Přesněji řečeno, pojem je na uvedeném místě definován pro méně obecný případ, kdy prvek x je čtvercovou maticí M, což však nemá na zavedení pojmu významný vliv (porovnání obou přístupů viz str. 95).

pouze jednoduché kořeny 0, λ_1, λ_2, ..., λ_m. Za této podmínky lze koeficienty lineární kombinace vypočítat[80] pomocí tzv. Lagrangeovy formule a je tedy

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu = x \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi(\lambda_k)}{\lambda_k\ P'(\lambda_k)} \cdot \frac{P(x)}{x-\lambda_k},$$

kde $P(x)$ značí součin $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ \ldots\ (x-\lambda_m)$, $P'(x)$ jeho derivaci a konečně

$$\varphi(\lambda_k) = \bar{\alpha}_m \lambda_k^m + \bar{\alpha}_{m-1}\lambda_k^{m-1} + \ldots + \bar{\alpha}_1 \lambda_k.$$

Dále studoval případ, kdy má uvedená rovnice vícenásobné kořeny. Jestliže uvažovaná řada konverguje, dospěl k vyjádření jejího součtu pomocí jisté lineární kombinace a ukázal, jak je možno nalézt její koeficienty.

V závěru článku uvažoval lineární asociativní algebru, jež má jednotkový prvek a zároveň pro prvek x existuje prvek inverzní. Za dodržení těchto podmínek studoval obecnější řadu

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu$$

a opět nalezl nutnou a postačující podmínku její konvergence. Při odvozování přitom využil dvojice řad

$$\varphi(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu \quad \text{a} \quad \psi(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{-\nu} \zeta^{-\nu}$$

a jejich poloměrů konvergence.

Podrobnější popis Weyrovy práce s maticovou mocninnou řadou (tj. pro případ, kdy lineární asociativní algebrou bude algebra matic) nalezne čtenář v dalším textu při rozboru práce *O theorii forem bilinearných.* Uvědomme si však již nyní, že tyto výsledky mohou být v řeči teorie matic vyloženy mírně pozměněným způsobem, neboť v prostoru všech čtvercových matic řádu n existuje jednotkový prvek (jednotková matice příslušného řádu), což umožňuje zjednodušení některých zápisů.

Výsledky Weyrova článku *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* byly shrnuty na dvou stranách v časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.[81] Autorem tohoto referátu je významný německý matematik Adolf Hurwitz (1859–1919), který v té době působil v Königsbergu (Královec).

Věta o konvergenci mocninné řady je považována za jeden z nejvýznamnějších výsledků Eduarda Weyra. Tento výsledek pro mocninné řady s maticovým

[80] Prvky $x^2, \ldots, x^{m-1}$ rovněž náleží algebře, a tudíž je lze vyjádřit vztahy

$$x^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{2\nu} e_\nu, \quad x^3 = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{3\nu} e_\nu, \quad \ldots, \quad x^{m-1} = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{(m-1)\nu} e_\nu.$$

Z této soustavy lineárních rovnic pak lze hledané hodnoty nalézt eliminací základních jednotek.

[81] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 19(1887), str. 367–368.

argumentem je však častěji spojován se jménem Kurta Hensela[82] (1861–1941), který se narodil v Königsbergu, avšak od dětství žil, studoval a působil v Německu (Berlín, Bonn, Marburg). V předchozím již bylo zmíněno poněkud rozporuplné znění části věty týkající se vlastních čísel ležících na obvodu kruhu konvergence. Navíc ve Weyrově práci chybí důkaz této části. Věta byla Henselem představena a dokázána v plném znění v článku *Über Potenzreihen von Matrizen* [Hn2] v roce 1926. V úvodu práce Hensel napsal:

Diese Frage hat nun eine sehr schöne und einfache, jedoch nicht vollständige Beantwortung durch einen Satz von E. Weyr gefunden (...); sein Beweis ist aber ziemlich kompliziert und gibt, wie mir scheint, nicht die volle Einsicht in die Natur dieser einfachen Frage.

Ich möchte daher in diesen Zeilen eine neue und vollständige Beantwortung dieser Frage geben, die aus den Resultaten meiner Abhandlung „Über Körper von Matrizen“ (...) unmittelbar hervorgeht. ([Hn2], str. 107)

Po uvedení svých výsledků ještě na poslední stránce textu zdůraznil:

Nur den ersten Teil dieses allgemeinen Satzes hat E. Weyr in der oben erwähnten Abhandlung aufgestellt und bewiesen. ([Hn2], str. 110)

Obdobný názor vyjádřila i autorská dvojice Herbert Westren Turnbull a Alexander Craig Aitken v monografii *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices* z roku 1932:

The theorem on the convergence of a matrix power series is due to Ed. Weyr, ... The full statement for multiple latent roots is to be found in a paper by K. Hensel, ... ([TA1], str. 81)

Stejného názoru byl i Cyrus Colton MacDuffee, který v roce 1933 ve své monografii *The Theory of Matrices* po uvedení věty o konvergenci maticové mocninné řady[83] napsal:

This theorem and proof are due to K. Hensel. E. Weyr had previously proved the theorem for the case where no characteristic root lies on the circle of convergence. ([Mc1], str. 98)

---

[82] Mezi jeho učiteli nalezneme mnoho známých jmen. Uveďme alespoň Leopolda Kroneckera, Karla Theodora Wilhelma Weierstrasse, Gustava Roberta Kirchhoffa (1824–1887) či Rudolfa Otta Sigismunda Lipschitze (1832–1903). Kurt Hensel byl nejvíce ovlivněn Kroneckerem, u něhož napsal v Berlíně svoji disertační práci *Arithmetische Untersuchungen über Diskriminanten und ihre ausserwesentlichen Teiler* (1884). V dlouhém období 1895 až 1930 vydal rovněž pět svazků Kroneckerových sebraných spisů.

Pro zajímavost zmiňme v krátkosti některé základní údaje o významné Henselově rodině. Mezi předky (o čtyři generace zpět) Kurta Hensela patří filozof Moses Mendelssohn (1729–1786), který byl dědečkem světoznámého hudebního skladatele Felixe Mendelssohna (1809–1847). Fanny Mendelssohn (1805–1847, později Fanny Hensel), sestra Felixe Mendelssohna a babička Kurta Hensela, byla rovněž uznávanou skladatelkou a pianistkou. Ottilie Ernestine, další vnučka Mosese Mendelssohna, si vzala za muže německého matematika Ernsta Eduarda Kummera (1810–1893) a jejich dcera se stala ženou německého matematika Hermanna Amanduse Schwarze (1843–1921).

[83] Jedná se o následující řádky:

Theorem 49. The power series $P(A)$ converges if and only if every characteristic root of A lies inside or on the circle of convergence of $P(\lambda)$, and for every ν-fold characteristic root λ_i which lies on the circle of convergence, the $(\nu-1)$-th derivative $P^{(\nu-1)}(\lambda_i)$ converges. ([Mc1], str. 98)

Rovněž američtí matematikové Nelson Dunford (1906–1986) a Jacob Theodore Schwartz (1930–2009) v 1. dílu[84] světoznámé monografie *Linear operators* [DS1] z roku 1958 přisoudili výsledek Henselovi:

A special case of Theorem 1.9 is due to Weyr [...], and in full generality it was proved by Hensel [...]. ([DS1], I. díl, 2. vydání, str. 607)

Weyrův článek *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* je zmíněn i v pracích, které byly publikovány dříve než právě uvedené texty. Jejich autoři však prvenství v publikování tvrzení nikomu nepřisoudili. Příkladem je Eduard Study, který již na přelomu 19. a 20. století v německé encyklopedii matematických věd (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften) napsal:

Ed. Weyr hat die Bedingung dafür angegeben, dass eine Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ *convergiert in der die Coefficienten* a_ν *Gewöhnliche complexe Grössen sind,* x *aber eine Grösse eines beliebigen Systems bedeutet. Er findet, dass die Wurzeln* r_κ *der charakteristischen Gleichung* (46) *dem Convergenzgebiete der gewöhnlichen Potenzreihe* $\sum a_\nu x^\nu$ *angehören müssen.* ([Su1], str. 182)

Další reakce na tento Weyrův článek lze nalézt v práci *Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage* [Sl3],[85] (1922), kterou napsal maďarsko-německý matematik Ludwig Schlesinger (1864–1933). Weyrova publikace je referována rovněž v článku *The equivalence of definitions of a matric function* [Ri1], který roku 1955 publikoval Robert F. Rinehart (?–1985). Detailnější představu o náplni práce poskytne následující citace:

As a result there have been proposed in the literature since 1880 eight distinct definitions of a matric function, by Weyr, Sylvester and Buchheim, Giorgi, Cartan, Fantappiè, Cipolla, Schwerdtfeger and Richter. Attention has been given in only a few cases to the equivalence, or non-equivalence, with other definitions, or to what combinatorial propereties of scalar functions were preserved. The casual reader in the field thus gains the impression that a considerable number of essentially distinct extensions of scalar functions to matrices has been achieved.
The principal purposes of this paper are to show that:
(a) All of the definitions except those of Weyr and Cipolla are essentially equivalent.
(b) Weyr's definition is less general than these six, but coincides with them when it is applicable.
(c) ...

The power series definition of a matric function probably occured to a number of mathematicians prior to Sylvester's paper. However, E. Weyr [...], in 1887, appears to have been the first one to give a convergence criterion for

[84] Ve druhém díle je Weyrův článek *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* uveden v seznamu literatury.

[85] Jedná se o třetí vydání práce s originálním názvem *Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln*, která vyšla roku 1900.

a matric power series. The power series definition is a natural extension of polynomial functions of a matrix. ([Ri1], str. 396, 398)

Ohlasy na Weyrův francouzský článek nalezneme i v pracích třetího tisíciletí. Íránští matematikové Mehdi Dehghan a Masoud Hajarian (nar. 1984) v článku *Determination of a matrix function using the divided difference method of Newton and the interpolation technique of Hermite* [DH1] z roku 2009 několikrát citovali Rinehartův článek [Ri1] a obdobně jako on uvedli přehled různých definic maticových funkcí, mezi nimiž představili i přístup Eduarda Weyra. Jeho článek [We10] ale v seznamu literatury neuvedli.

Učinil tak však Scott Duke Kominers v krátké poznámce *Finding matrices that satisfy functional equations* [Kn1] z téhož roku 2009. V ní ocenil užitečnost Weyrových výsledků při hledání matic splňujících různé druhy funkcionálních rovnic.

2.9 Matice (a bilineární formy)

- *O theorii forem bilinearných* [We12], 1889
- *Zur Theorie der bilinearen Formen* [We13], 1890
- *O theorii forem bilinearných* [We17], 1901

Ke kompletaci Weyrových publikací o maticích ještě chybí spis *O theorii forem bilinearných* z roku 1889, resp. jeho německy psaná, pozměněná verze *Zur Theorie der bilinearen Formen* z roku následujícího, v nichž jsou mimo jiné podrobně vyloženy výsledky uveřejněné v krátkých, francouzsky psaných článcích z roku 1885 nazvaných *Sur la théorie des matrices* a *Repartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces.* Daná problematika se týká tzv. *Weyrovy teorie charakteristických čísel.* Další drobnou Weyrovu práci nazvanou *O theorii forem bilinearných* můžeme nalézt ve sborníku 3. sjezdu českých přírodozpytců a lékařů konaného roku 1901 v Praze. Jedná se o krátký text zachycující Weyrův příspěvek, který na sjezdu pronesl.

Vraťme se však nejprve k české, více než stostránkové práci *O theorii forem bilinearných.* Její rukopis byl zaslán k posouzení Královské české společnosti nauk, aspiroval na její jubilejní cenu. Aby byly posudky objektivní, byl odeslán anonymně (pod heslem „Plzeň“). Nicméně z jeho obsahu, návaznosti na jiné práce apod. muselo být členům komise zřejmé, kdo je autorem.[86]

Posudky vypracovali František Josef Studnička a Josef Šolín. Studnička napsal:

… rukopis mathematický, …, v němž se na základě některých již známých, namnoze však nových, původních výzkumů podává stručná nauka o jmenovaných formách čili tvarech.

[86] Vzhledem k „anonymitě“ tak můžeme ve spisu nalézt větu, v níž se Eduard Weyr odvolává jmenovitě sám na sebe, aniž by prozradil svou identitu:
Tím dokázány výroky obsažené v práci Ed. Weyra „Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces“, … ([We12], str. 60–61)

Obsahem svým řadí se spis tento k nejmodernějším vymoženostem vědy mathematické a jest hoden vším právem plného uznání, jakéhož se mu zajisté dostane, až bude uveřejněn.

V celku zasluhuje spis tento plnou měrou, aby cenou jubilejní byl poctěn. ([We12], str. 3)

Z Šolínova posudku vybíráme následující krátké pasáže:

Práce tato, ..., vztahuje se k onomu velezajímavému oddílu vyšší algebry, jenž „operuje operacemi“...

Není pochybnosti, že práce tato, uváděje v theorii matic novou pomůcku, jest plodem samostatného badání spisovatelova; má skutečnou cenu vědeckou a hoví slušnou měrou i ostatním výminkám statutu a regulativu. Proto po mínění nížepsaného práce tato zasluhuje, aby poctěna byla honorářem z jubil. fondu pro vědeckou literaturu českou. ([We12], str. 3, 4)

Návrhy Studničky a Šolína na udělení ceny Weyrovu spisu byly vyslyšeny a byl sepsán „nález“ podepsaný předsedou Královské české společnosti nauk Wácslavem Wladivojem Tomkem[87] (1818–1905) a hlavním tajemníkem společnosti Josefem Kalouskem[88] (1838–1915):

Královská Česká Společnost Náuk ve schůzi dne 8. května 1889 vyslechši posudky zde níže položené, usnesla se jednomyslně, přítomný spis pana professora Eduarda Weyra poctíti honorářem z jubilejního fondu pro vědeckou literaturu českou, a vydati jej nákladem téhož fondu. ([We12], str. 3)

Publikace je autorem uvedena sebevědomými – musíme však uznat, že ne nadnesenými – slovy:

Předním účelem tohoto spisu jest uvedení nové pomůcky do theorie bilinearných forem, t. theorie soustav, hlavně normalných soustav příslušných dané matici.

O plodnosti těchto úvah nechť čtenář sám rozhodne; zde jen tolik podotýkám, že nová methoda stačila m. j. na úplné řešení základního problemu současné transformace dvou bilinearných forem pro případ Weierstrassem řešený ...

Poslední kapitola podává upotřebení v theorii linearných differencialných rovnic; v ní odvozen a do jisté míry doplněn hlavní theorem Fuchsovy proslulé práce ... ([We12], str. 5, 6)

Čtenáře možná překvapilo, že knížku s názvem *O theorii forem bilinearných* řadíme mezi práce z teorie matic. Jeho pochyby snad budou rozptýleny následující citací úvodních řádků první kapitoly, jejíž název *O počítání s maticemi* také mnohé napovídá:

---

[87] Wácslav Wladivoj Tomek (Ritter von), též Václav Vladivoj (rytíř) Tomek, byl český historik, politik a pedagog. Po rozdělení University Karlo-Ferdinandovy na univerzitu německou a českou v roce 1882 se stal prvním rektorem české univerzity. Nejvýznamnější jeho publikací je dvanáctisvazkové dílo *Dějepis města Prahy.*

[88] Josef Kalousek byl český historik věnující se českému státnímu právu, docent českých dějin na české univerzitě v Praze, první životopisec Františka Palackého (1798–1876). Byl rovněž historiografem Královské české společnosti nauk.

1. Bilinearnou formu

$$\sum_{(h,\,k)} a_{hk} x_h y_k, \qquad (h,\ k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

lze stanoviti soustavou nn koefficientů a_{hk} seřaděných do čtvercového schematu tím spůsobem, že prvek čili element označený symbolem a_{hk} položen do $h^{té}$ řádky a do k^{ho} sloupce; takovou soustavu nn prvků zoveme dle Cayley-e maticí n^{ho} řádu (matrix, matrice) a označujeme symbolem $||a_{hk}||$ anebo stručněji jedinou literou A píšíce

$$A = ||a_{hk}||.$$

([We12], str. 7)

Otázka, jaký důvod vedl autora ke zvolení názvu *O theorii forem bilinearných*, nebude zřejmě nikdy zodpovězena. Možná byla autorova volba snahou o zvětšení zájmu o práci, neboť pojem bilineární forma byl (na rozdíl od pojmu matice) českým matematikům dobře znám a titul spisu tak dával na vědomí, která část matematiky je v něm obsažena. Veškerá problematika však byla vyložena v nové symbolice a terminologii. Celý text je psán řečí matic, termín bilineární forma se v něm takřka nevyskytuje. Kromě již uvedené první definice jej nalezneme pouze na několika místech v jediné (konkrétně jedenácté) kapitole. Nesoulad obsahu práce s jejím názvem komentoval i uznávaný matematik a historik teorie determinantů a matic Thomas Muir v práci *Contributions to the History of Determinants 1900–1920* [Mu4] z roku 1930:

The title of the paper might thus well have been The theory of matrices with an application to bilinear forms and an application to linear differential equations. ([Mu4], str. 3–4)

První řádky spisu *O theorii forem bilinearných* jsme uvedli také kvůli zavedení termínu *matice*, který je zde autorem poprvé použit. V předchozích publikacích Eduard Weyr používal termínů *matrice*, resp. *matrix*, na jejichž totožnost s novým termínem *matice* zde poukázal.[89] V recenzi knihy *O theorii forem bilinearných* publikované roku 1890 v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky[90] se píše:

První z uvedených spisů opírá se o jistý druh operačního kalkulu, o t. zv. theorii matric, čili jak se nyní s upřílišněným purismem říká, matic;… (str. 318)

Slovo *matrice* pochází z německého *Matrize*, které je však samo adaptací francouzského *matrice*. Toto francouzské slovo pochází z latinského *mātrīx* (kde znak ¯ značí délku ve výslovnosti), jež znamená „(zvířecí) matka, děloha“ a je odvozené od slova *māter* znamenající „matka“. Rovněž český termín *matice* má

[89] V této souvislosti je také zajímavé, že na 97. straně knížky odkazuje Eduard Weyr na svoji studii *O binarných matricích* názvem *O binarných maticích*. Jedná se pouze o tiskovou chybu?

[90] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 19(1890), str. 318–328.

svůj etymologický původ ve slově *matka*. Jeho první význam ve smyslu „matka šroubu“ se používal pod vlivem německého „Schraubenmutter“.[91]

Vzhledem k tomu, že kolem roku 1890 nedošlo v českém jazyce k žádné změně odůvodňující vynechání písmene „r“ ve slově matrice, a také na základě výše uvedené citace z recenze Weyrova spisu se domníváme, že používání nového termínu matice bylo způsobeno puristickou snahou české matematické obce používat slovo domácí místo slova původu německého, a následkem této změny bylo i výhodné odlišení obou pojmů. Svou roli jistě sehrála i podobnost obou slov, která je však z etymologického hlediska zcela náhodná, neboť původ české přípony „-ice “ není totožný s původem cizí přípony „-ice“.[92]

V první kapitole této práce jsme podrobněji popsali, jak se světoví matematici přibližně na přelomu 19. a 20. století pomalu odkláněli od řeči teorie determinantů a teorie bilineárních a kvadratických forem a začali dávat přednost symbolice a terminologii teorie matic. Eduard Weyr patřil k prvním matematikům, kteří se snažili o propojení teorie matic a teorie bilineárních forem. Důkazem je mimo jiné právě rozebíraný spis.

Weyrova práce *O theorii forem bilinearných* je rozdělená do třinácti kapitol. V první z nich je zavedena rovnost matic, sčítání, odčítání a násobení matic, zapsány jsou základní vlastnosti těchto operací. Je zde definována nulová, jednotková, skalární a inverzní (*reciproká*) matice a uvedeny některé jejich vlastnosti. Druhá kapitola *O skládání soustav* pojednává především o lineární nezávislosti n-tic (*linearně neodvislých systemů*).

Třetí kapitola je nazvána *O nullitě matic*. V ní Eduard Weyr nejdříve připomněl pojem nulita matice a v té souvislosti zmínil Sylvestera, zcela analogicky učinil totéž i s pojmem hodnost matice a jménem Kroneckera.[93] Oba pojmy zavedl pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů. Nicméně pojem hodnost matice charakterizoval i pomocí maximálního počtu lineárně nezávislých řádků, resp. sloupců matice.

Je-li r největší počet linearně neodvislých systemů, jež lze vybrati z (x'), …, $(x^{(\alpha)})$, *pak jest r hodností napsaného schematu a naopak; podobně platí výrok, že hodnost r napsaného schematu jest maximalní počet linearně neodvislých sloupců jeho.* ([We12], str. 20)

[91] Uvedené etymologické informace jsou převzaty z publikace Rejzek J., *Český etymologický slovník*, Leda, Praha, 2001, str. 368, 1. vydání. Na téže straně čtenář nalezne i etymologii slova matka.

Původ slov matrice, matice, matka viz též:
Machek V., *Etymologický slovník jazyka českého*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1968, 2. opravené a doplněné vydání.
Holub J., Lyer S., *Stručný etymologický slovník jazyka českého se zvláštním zřetelem k slovům kulturním a cizím*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1967, 1. vydání.

[92] Naše domněnky jsou podepřeny názory pana prof. RNDr. Václava Blažka, CSc., z Ústavu jazykovědy Filozofické fakulty Masarykovy univerzity v Brně a dále pana doc. PhDr. Jiřího Rejzka, Ph.D., z Katedry českého jazyka Filozofické fakulty Univerzity Karlovy v Praze, které byly poskytnuty v korespondenci.

[93] Eduard Weyr napsal: *Kronecker praví, že matice A jest hodnosti …* ([We12], str. 20)

Pokud však chtěl připomenout prvního matematika, který pracoval s hodností matice, měl správně zmínit Georga Ferdinanda Frobenia – viz 1. kapitola.

Tímto vyjádřením na konci osmdesátých let 19. století Eduard Weyr opět předběhl světovou matematiku. Problematika hodnosti matice byla totiž jednou z oblastí, v níž se většina matematiků nejdéle držela řeči determinantů, což navíc komplikovalo i formulování jasné a stručné podmínky pro řešitelnost soustav lineárních rovnic.[94] Právě studium soustav lineárních rovnic je další náplní spisu. Autor zformuloval větu, že pro homogenní soustavu n lineárních rovnic o n neznámých je počet lineárně nezávislých řešení roven nulitě matice soustavy.[95] Uvedl rovněž svůj odhad nulity součinu libovolného počtu matic,[96] tj. že nulita součinu matic je větší nebo rovna nulitě každé matice a zároveň menší nebo rovna součtu nulit jednotlivých matic. Navíc zapsal dva speciální případy, kdy lze nulitu součinu stanovit přesně. V prvním případě uvažujeme dva nesoudělné polynomy φ a ψ. Potom nulita součinu matic $\varphi(M)$ a $\psi(M)$ je rovna součtu nulit těchto matic, tj.

$$\operatorname{nul}(\varphi(M).\psi(M)) = \operatorname{nul}(\varphi(M)) + \operatorname{nul}(\psi(M)).$$

Vztah přitom platí i pro libovolný konečný počet polynomů. Druhý případ je velice triviálně odvoditelný. Pokud matici M s nulitou α násobíme maticemi regulárními (tj. maticemi, jejichž nulita je rovna nule), platí pro nulitu součinu ϖ současně $\alpha \geq \varpi \geq \alpha$, a tedy $\varpi = \alpha$.

Ve čtvrté kapitole *O kořenech matice a jich charakteristických číslech* autor představil charakteristickou rovnici pro matici řádu n ve tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

a rovněž ve tvaru

$$f(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ldots + c_n = 0.$$

Navíc vyjádřil jednotlivé koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jako součty všech minorů řádu $n-k$ vzniklých vypuštěním k řádků a k sloupců o stejných indexech. Tyto subdeterminanty dnes nazýváme hlavními. Poté definoval vlastní čísla matice, která nazval *kořeny matice* (a stejně jako ve spisu *O binarných matricích* připomněl Sylvesterův termín *latentní kořeny matice*). Dále dokázal, že jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vlastní čísla matice M a je-li φ polynom, potom $\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \ldots, \varphi(\lambda_n)$ jsou vlastní čísla matice $\varphi(M)$, a pokračoval odvozením důležitého výsledku z oblasti podobnosti matic. Ukázal, že matice M a $P = Q^{-1}MQ$, kde Q je regulární matice, mají stejná vlastní čísla.

[94] Více viz 1. kapitola.

[95] Připomeňme, že výsledek byl pomocí nenulovosti subdeterminantů (tj. v podstatě pomocí hodnosti matice) představen Heinrichem Richardem Baltzerem roku 1857 v monografii *Theorie und Anwendung der Determinanten* – viz 1. kapitola.

[96] V textu Eduard Weyr zmínil Sylvesterův dolní odhad, o horním odhadu tvrdil, že neví, zda jej Sylvester rovněž odvodil (*... jelikož jsem se nemohl dopíditi práce ..., kterou Sylvester ... uvádí.*) ([We12], str. 25)

V závěru kapitoly Eduard Weyr definoval důležitý pojem *charakteristická čísla* příslušná k vlastnímu číslu λ matice M, která zavedl již ve své práci *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* z roku 1885. Definoval je zde nejprve pro matici M o s-násobném vlastním číslu 0 a zopakoval jejich důležité vlastnosti (tvoří nerostoucí posloupnost; jejich součet je roven násobnosti vlastního čísla 0). Teprve poté uvedl zobecnění, které odvodil elementárním způsobem z prvního případu. Má-li totiž matice M s-násobné vlastní číslo λ, potom matice $M - \lambda E$ má vlastní číslo 0, a to opět s-násobné (z následující ukázky je zřejmé Weyrovo značení, které se mírně odchyluje od našeho, resp. dnes často používaného, přesto však vysvětlení jednotlivých symbolů není třeba, neboť je evidentní z textu):[97]

... tvoříme-li posloupné mocnosti M, M^2, M^3, ..., konečně dojdeme jisté mocnosti M^ϱ, která má nulitu α a že pak vyšší mocnosti mají tutéž nullitu α. Značí-li

$$\alpha_1, \quad \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho = \alpha$$

nullity matic M, M^2, M^3, ..., M^ϱ, platí arci

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \ldots \geq \alpha_\varrho > 0.$$

Má-li matice M α-násobný kořen μ_ϱ, tu má matice $M - \mu_\varrho$ α-násobný kořen 0 *(...). Jsouli pak*

$$\alpha_1, \quad \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho = \alpha$$

nullity matic $M - \mu_\alpha, (M - \mu_\alpha)^2, (M - \mu_\alpha)^3, \ldots, (M - \mu_\alpha)^\varrho$, zovu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ charakteristická čísla náležející ku kořeni μ_α matice M. ([We12], str. 34)

Jak uvidíme v 6. kapitole, tento „přechod“ od obecného vlastního čísla k nulovému a naopak je běžně používán současnou algebraickou komunitou v nejmodernějších monografiích a článcích.

Následující kapitola Weyrovy útlé knihy je nazvána *O základní rovnici matice*. Tímto termínem je myšlena rovnice, kterou autor dříve označoval termínem rovnice nejnižšího stupně. Figuruje v ní tedy minimální polynom. Pasáž je věnována také Cayleyově-Hamiltonově větě, a tedy i vztahům mezi minimálním a charakteristickým polynomem. V této souvislosti je opět zmíněn Sylvesterův termín *matrice dérogatoire*.

V šesté,[98] poměrně obsáhlé kapitole *O normalných soustavách příslušných dané matici* autor zavedl pojem obsažený v jejím názvu. Pro jednoduchost nejdříve definoval normální soustavu příslušnou dané matici M v případě, kdy má matice M nulitu α a $(\alpha + \beta + \gamma)$-násobné vlastní číslo 0, M^2 nulitu $\alpha + \beta$ a M^3 nulitu $\alpha + \beta + \gamma$. Hledal všech $\alpha + \beta + \gamma$ nezávislých řešení

$$u_1, \, u_2, \, \ldots, \, u_{\alpha+\beta+\gamma}$$

[97] Citace je doslovná, je uvedena včetně chybných dolních pravých indexů u vlastního čísla μ v závěru úryvku (místo $M - \mu_\alpha$, $(M - \mu_\alpha)^2$ atd. má správně být $M - \mu_\varrho$, $(M - \mu_\varrho)^2$ atd.) a rovněž včetně tiskové chyby ve slově „jsou-li“.

[98] V textu knihy je tisková chyba, šestá kapitola je označena římskou číslicí V. Číslování obsahu je v pořádku.

rovnice $M^3u = o$. Dospěl k hledaným nezávislým řešením

$$z_1, z_2, \dots, z_\gamma, y_1, y_2, \dots, y_\beta, x_1, x_2, \dots, x_\alpha,$$

kde

$$y_1, y_2, \dots, y_\beta, x_1, x_2, \dots, x_\alpha,$$

jsou nezávislými řešeními rovnice $M^2u = o$ a

$$x_1, x_2, \dots, x_\alpha$$

jsou nezávislými řešeními rovnice $Mu = o$ a vektory jsou svázány vztahy

$$Mz_i = y_i, \qquad My_j = x_j,$$

kde $i = 1, 2, \dots, \gamma$ a $j = 1, 2, \dots, \beta$. Uvedených $\alpha + \beta + \gamma$ řešení nazval *normalnými soustavami příslušnými matici M.* Potom tento pojem definoval pro obecnější případ, tj. pro každou matici M o s-násobném nulovém vlastním číslu s charakteristickými čísly $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$. Na konci kapitoly potom pojem normálních soustav matice M mírně modifikoval tím, že jej zavedl pro čtvercovou matici s vlastními čísly $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$, jejichž násobnosti jsou po řadě $s_1, s_2, \dots, s_u$. Pomohl si přitom opět maticemi $M - \lambda_1 E$, $M - \lambda_2 E, \dots$, $M - \lambda_u E$ o nulových vlastních číslech s násobnostmi $s_1, s_2, \dots, s_u$.

V následující kapitole *O podobných maticích* definoval pojem podobnosti matic. Vedle tvrzení ze čtvrté kapitoly o totožnosti vlastních čísel navzájem podobných matic uvedl a dokázal, že tato vlastní čísla mají i stejná charakteristická čísla. Na dalších stránkách dokázal i obrácenou větu.[99] Dále uvedl jednoduchý způsob nalezení normálních soustav v matice M, která je podobná matici M', jejíž normální soustavy u známe. Stačí položit $v = Qu$, kde Q je regulární matice, pro kterou $M' = Q^{-1}MQ$. Autor také napsal, jak pro podobné matice M a M' nalézt všechny matice Q vyhovující právě napsanému vztahu.

Rovněž název následující kapitoly *O stanovení všech matic o daných kořenech a charakteristických číslech; typický tvar* čtenáři zřetelně sděluje, jakou problematiku může na příslušných stránkách nalézt. V této části autor ukázal, jak nalézt čtvercovou matici M o daných vlastních a charakteristických číslech, a k nalezené matici M potom další matice hledaných vlastností (tj. matice podobné s maticí M) určil pomocí vztahu $Q^{-1}MQ$. Metoda, kterou při hledání matice M Eduard Weyr použil, vedla ke kanonickému tvaru, který jsme pro matice řádu dva již představili v pasáži věnované spisu *O binarných matricích.* Jedná se o tzv. *typický tvar matice.*

Eduard Weyr nejprve uvažoval jediné vlastní číslo λ_1 matice M násobnosti s_1 o charakteristických číslech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{t_1}$ a hledal čtvercovou matici H řádu s_1, která má rovněž s_1-násobné vlastní číslo λ_1 o uvedených charakteristických číslech.

[99] Připomeňme, že tvrzení, že matice jsou podobné právě tehdy, když mají stejná vlastní čísla a jim příslušná charakteristická čísla, se vyskytuje již ve Weyrově článku *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* z roku 1885.

Postupně konstruoval matice $G_{t_1-1}-\lambda_1 E$, $G_{t_1-2}-\lambda_1 E$, … – smysl tohoto označení se ukázal až v závěru konstrukce. Nejprve uvažoval čtvercovou matici řádu $(\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1})$

$$G_{t_1-2}-\lambda_1 E = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{G_{t_1-1}-\lambda_1 E\quad}}^{\alpha_{t_1}} \quad \overbrace{\hphantom{0\ \cdots\ 0}}^{\alpha_{t_1-1}} \\ \left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{G_{t_1-1}-\lambda_1 E}{C_{t_1-1}} & \vdots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\end{array}}\right\}\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1},$$

kde počet posledních nulových sloupců je α_{t_1-1}, $G_{t_1-1}-\lambda_1 E$ je nulová matice řádu α_{t_1} a C_{t_1-1} je matice typu $\alpha_{t_1-1}\times\alpha_{t_1}$, jejíž prvních α_{t_1} řádků tvoří jednotkovou matici a na zbývajících $\alpha_{t_1-1}-\alpha_{t_1}$ řádcích jsou nuly, tj. matice tvaru

$$C_{t_1-1} = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \ldots\quad 0}}^{\alpha_{t_1}} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{array}}\right\}\alpha_{t_1-1}.$$

Uvědomme si, že vždy platí $\alpha_{t_1-1}\geq\alpha_{t_1}$ a že v případě $\alpha_{t_1-1}=\alpha_{t_1}$ neobsahuje matice C_{t_1-1} žádný nulový řádek.

Dále sestrojil čtvercovou matici řádu $(\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\alpha_{t_1-2})$

$$G_{t_1-3}-\lambda_1 E = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{G_{t_1-2}-\lambda_1 E\quad}}^{\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}} \quad \overbrace{\hphantom{0\ \cdots\ 0}}^{\alpha_{t_1-2}} \\ \left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{G_{t_1-2}-\lambda_1 E}{C_{t_1-2}} & \vdots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\end{array}}\right\}\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\alpha_{t_1-2},$$

kde počet posledních nulových sloupců je α_{t_1-2} a matice C_{t_1-2} je maticí typu $\alpha_{t_1-2}\times(\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1})$, jejíž prvních α_{t_1} sloupců je nulových a zbývajících α_{t_1-1} sloupců je tvořeno jednotkovou maticí řádu α_{t_1-1}, pod kterou jsou na $\alpha_{t_1-2}-\alpha_{t_1-1}$ řádcích nuly, tj.

$$C_{t_1-2} = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad 0}}^{\alpha_{t_1}} \quad \overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad 0\quad 0}}^{\alpha_{t_1-1}} \\ \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{array}}\right\}\alpha_{t_1-2}\ .$$

Takto postupoval dále až obdržel matici

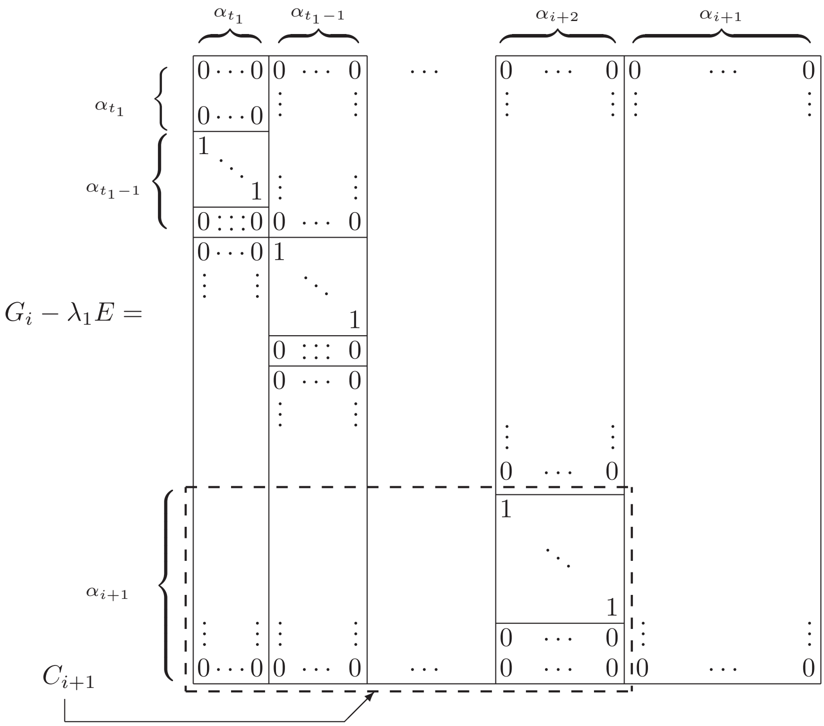
$$G_1 - \lambda_1 E = \left(\begin{array}{c|ccc} \overbrace{\begin{matrix} G_2 - \lambda_1 E \\ \hline C_2 \end{matrix}}^{\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\ldots+\alpha_3} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{\alpha_2} \end{array}\right) \Bigg\}\ \alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\ldots+\alpha_2,$$

kde matice C_2 typu $\alpha_2 \times (\alpha_{t_1} + \alpha_{t_1-1} + \ldots + \alpha_3)$ má prvních $\alpha_{t_1} + \alpha_{t_1-1} + \ldots + \alpha_4$ sloupců nulových a posledních α_3 sloupců obsahujících jednotkovou matici řádu α_3, až konečně

$$H - \lambda_1 E = \left(\begin{array}{c|ccc} \overbrace{\begin{matrix} G_1 - \lambda_1 E \\ \hline C_1 \end{matrix}}^{\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\ldots+\alpha_3+\alpha_2} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{\alpha_1} \end{array}\right) \Bigg\}\ \alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\ldots+\alpha_1,$$

kde matice C_1 typu $\alpha_1 \times (\alpha_{t_1} + \alpha_{t_1-1} + \ldots + \alpha_2)$ má prvních $\alpha_{t_1} + \alpha_{t_1-1} + \ldots + \alpha_3$ sloupců nulových a posledních α_2 sloupců obsahujících jednotkovou matici řádu α_2.

Vidíme, že Weyrův postup hledání matice H není příliš průhledný; konkrétní příklad ani náznak tvaru výsledné složené matice H autor neuvedl.



Uvědomme si (viz obrázek), že při vložení matice C_{i+1} do matice $G_i - \lambda_1 E$ posledních α_{i+2} nenulových sloupců matice C_{i+1} přesně „zapadne" pod posledních α_{i+2} nulových sloupců matice $G_{i+1} - \lambda_1 E$. Prvních $\alpha_{t_1} + \alpha_{t_1 - 1} + \ldots + \alpha_{i+2}$ sloupců matice $G_i - \lambda_1 E$ je tedy nenulových. Protože jsou zřejmě i lineárně nezávislé, je nulita matice $G_i - \lambda_1 E$ rovna α_{i+1}.

Nulita matice

$$H - \lambda_1 E = G_0 - \lambda_1 E = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{G_1 - \lambda_1 E}{C_1} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{\alpha_1} \end{array} \right)$$

je tedy α_1, proto mezi řádky matic $G_1 - \lambda_1 E$ a C_1 je (v součtu) právě $s_1 - \alpha_1$ lineárně nezávislých vektorů. Z výše uvedeného obrázku lze vyvodit, že

$$(H - \lambda_1 E)^2 = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{(G_1 - \lambda_1 E)^2}{C_1 (G_1 - \lambda_1 E)} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{\alpha_1} \end{array} \right).$$

Levá část této matice je tedy součinem matic $G_1 - \lambda_1 E$, resp. matice C_1 s maticí $G_1 - \lambda_1 E$ a tomuto součinu odpovídá vytváření lineárních kombinací řádků matice $G_1 - \lambda_1 E$, přičemž koeficienty těchto lineárních kombinací jsou prvky matic $G_1 - \lambda_1 E$, resp. C_1. Jelikož mezi řádky matic $G_1 - \lambda_1 E$ a C_1 je právě $s_1 - \alpha_1$ lineárně nezávislých vektorů, vytvářejí tyto vektory regulární matici řádu $s_1 - \alpha_1$. Lze dokázat, že za podmínky zmíněné regularity je mezi výslednými vektory levé části matice $(H - \lambda_1 E)^2$ právě tolik lineárně nezávislých vektorů, kolik jich je v $G_1 - \lambda_1 E$, přičemž tato matice má nulitu α_2. Proto

$$\text{nul}\,(H - \lambda_1 E)^2 = \alpha_1 + \text{nul}\,(G_1 - \lambda_1 E) = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Dále

$$(H - \lambda_1 E)^3 = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{(G_1 - \lambda_1 E)^3}{C_1 (G_1 - \lambda_1 E)^2} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{\alpha_1} \end{array} \right),$$

a proto levá část této matice obsahuje právě tolik lineárně nezávislých vektorů, kolik jich obsahuje matice $(G_1 - \lambda_1 E)^2$ atd.

Postupně dostáváme

$$\begin{array}{lcl}
\text{nul}\,(H - \lambda_1 E) & = & \alpha_1, \\
\text{nul}\,(H - \lambda_1 E)^2 & = & \alpha_1 + \text{nul}\,(G_1 - \lambda_1 E) = \alpha_1 + \alpha_2, \\
\text{nul}\,(H - \lambda_1 E)^3 & = & \alpha_1 + \text{nul}\,(G_1 - \lambda_1 E)^2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \text{nul}\,(G_2 - \lambda_1 E) = \\
 & = & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\
\multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
\text{nul}\,(H - \lambda_1 E)^{t_1} & = & \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{t_1}.
\end{array}$$

Matice H tedy má vlastní číslo λ_1 požadované násobnosti a k němu přísluší daná charakteristická čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{t_1}$.

Ukažme Weyrův způsob konstrukce matice H na konkrétním příkladu. Uvažujme čtvercovou matici A řádu 12 s dvěma různými vlastními čísly $\lambda_1 = 2$, resp. $\lambda_2 = -3$ s násobnostmi $s_1 = 7$, resp. $s_2 = 5$. Weyrovy charakteristiky příslušné k těmto vlastním číslům jsou (3, 2, 1, 1), resp. (3, 2). V prvém kroku hledejme matici H řádu 7, která má sedminásobné vlastní číslo 2 a Weyrovu charakteristiku (3, 2, 1, 1) (tedy $t_1 = 4$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 1$). Postupně dostáváme

$$G_2 - 2E = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \cline{1-1} 1 & 0 \end{array}\right),$$

$$G_1 - 2E = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-1} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-2} \multicolumn{1}{c}{0} & 1 & 0 & 0 \\ \multicolumn{1}{c}{0} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$H - 2E = \left(\begin{array}{c|c|cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-1} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-2} \multicolumn{1}{c}{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{1}{c}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-4} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

a proto

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Druhý krok bude následovat po další teoretické partii.

Eduard Weyr rovněž podotkl, že není nutné při konstrukci matice o daných spektrálních vlastnostech nutně používat jedničky:

Tvoříme-li H dle právě vytknutého návodu, klademe-li však do vzorců ... na místo 1 *libovolné hodnoty různé od nully, potrvají všechny závěrky ...*
([We12], str. 59)

Dále Eduard Weyr hledal čtvercovou matici K řádu $(s_1 + s_2)$, která má vlastní čísla λ_1 a λ_2 o násobnostech po řadě s_1 a s_2 a příslušných charakteristických číslech $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{t_1})$ a $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{t_2})$. Použil k tomu výše sestrojenou matici H a obdobný rekurentní postup jako u jediného vlastního čísla. Postupně sestrojil čtvercové matice

$$H_{t_2-1}-\lambda_2E=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\qquad\qquad\quad}^{s_1} & \overbrace{\qquad\qquad}^{\beta_{t_2}}\end{array}\\ \left(\begin{array}{c|c}\dfrac{H-\lambda_2E}{D_{t_2}} & \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{matrix}\end{array}\right)\end{array}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} s_1+\beta_{t_2},$$

$$H_{t_2-2}-\lambda_2E=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\qquad\qquad\quad}^{s_1+\beta_{t_2}} & \overbrace{\qquad\qquad}^{\beta_{t_2-1}}\end{array}\\ \left(\begin{array}{c|c}\dfrac{H_{t_2-1}-\lambda_2E}{D_{t_2-1}} & \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{matrix}\end{array}\right)\end{array}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} s_1+\beta_{t_2}+\beta_{t_2-1},$$

atd. až

$$H_1-\lambda_2E=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\qquad\qquad\quad}^{s_1+\beta_{t_2}+\beta_{t_2-1}+\ldots+\beta_3} & \overbrace{\qquad\qquad}^{\beta_2}\end{array}\\ \left(\begin{array}{c|c}\dfrac{H_2-\lambda_2E}{D_2} & \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{matrix}\end{array}\right)\end{array}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} s_1+\beta_{t_2}+\beta_{t_2-1}+\ldots+\beta_2,$$

$$K-\lambda_2E=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\qquad\qquad\quad}^{s_1+\beta_{t_2}+\beta_{t_2-1}+\ldots+\beta_2} & \overbrace{\qquad\qquad}^{\beta_1}\end{array}\\ \left(\begin{array}{c|c}\dfrac{H_1-\lambda_2E}{D_1} & \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{matrix}\end{array}\right)\end{array}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} s_1+\beta_{t_2}+\beta_{t_2-1}+\ldots+\beta_1,$$

kde D_{t_2} je libovolná, pro jednoduchost například nulová matice typu $\beta_{t_2}\times s_1$,

$$D_{t_2-1}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\qquad\quad}^{s_1} & \overbrace{\qquad\qquad}^{\beta_{t_2}}\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccccc}0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\ \cdots\\0\\0\\ \cdots\\0\end{matrix}}\right\}\beta_{t_2-1},$$

$$
D_{t_2-2} = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccccccc}
\multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{0\;\;0\;\;0}}^{s_1+\beta_{t_2}}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{0\;\;0\;\;0\;\;0}}^{\beta_{t_2-1}}} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots} & \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots} & \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} \beta_{t_2-2}
$$

atd.

Eduard Weyr dále napsal, že pomocí matice K lze obdobným způsobem nalézt čtvercovou matici L, jejíž řád je $s_1+s_2+s_3$ a jež má vlastní čísla λ_1, λ_2, λ_3 s charakteristickými čísly $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{t_1})$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{t_2})$ a $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{t_3})$ atd. až nakonec čtvercovou matici M řádu $s_1+s_2+\ldots+s_u = n$, která má všech u požadovaných vlastních čísel s příslušnými charakteristickými čísly. Opět poznamenal, že lze místo jedniček použít jiných nenulových hodnot. Avšak pouze v případě, že použijeme variantu s jedničkami, nazýváme vzniklou matici *typickým tvarem* dané matice nebo jednoduše *typickou maticí* náležející k dané matici.

Dopočítejme typický tvar M matice A, jež má výše požadované vlastnosti ($u = 2$, $t_2 = 2$, $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$):

$$
H_1 + 3E = \left(\begin{array}{ccccccc|cc}
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),
$$

$$
M + 3E = \left(\begin{array}{ccccccc|cc|ccc}
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{1-7}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{1-9}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),
$$

neboli

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pro každou čtvercovou matici N existuje její *typický tvar* M a platí mezi nimi opět vztah $N = Q^{-1}MQ$. K určení transformační matice lze přitom využít Weyrovy normální soustavy příslušné k matici N.

V závěru kapitoly jsou ještě uvedeny dva speciální případy *typické matice*: má-li matice N řádu n navzájem různá vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, je jejím *typickým tvarem* diagonální matice, jejíž diagonální prvky jsou právě tato vlastní čísla; má-li matice N řádu n vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ s násobnostmi $s_1, s_2, \ldots, s_u$ a navíc

$$\text{nul}\,(M - \lambda_1 E) = s_1,\ \text{nul}\,(M - \lambda_2 E) = s_2, \ldots\ \text{nul}\,(M - \lambda_u E) = s_u,$$

(tj. Weyrova charakteristika každého vlastního čísla obsahuje jediné charakteristické číslo) je její *typický tvar* opět diagonální maticí, jejíž diagonála obsahuje postupně s_1 prvků λ_1, s_2 prvků λ_2 atd. až nakonec s_u prvků λ_u.

Dnes se „typický“ tvar matice nejčastěji nazývá *Weyrův kanonický tvar* a je tvořen mírně pozměněným způsobem (jeho prvky jsou totožné, jsou však uspořádány v jiném pořadí). Tento modifikovaný, moderní tvar čtenář nalezne ve 3. kapitole nazvané *Weyrova teorie charakteristických čísel*, kde jsou hlavní výsledky uvedeny přehledně řečí dnešní teorie matic. Zmíněnou partii tak doporučujeme pro studium uvažovaného kanonického tvaru matice v podobě, která je pro dnešního čtenáře lépe přístupná než původní Weyrovo pojetí.

V deváté kapitole *Řešení rovnic o skalarných koefficientech; periodické matice* nalezl autor k danému polynomu f všechny matice, pro které $f(M) = 0$. Dále hledal matice M, pro které je f polynomem minimálním. Také řešil konkrétní případ $f(M) = M^k - E$, neboli rovnici $M^k = E$, kde k je dané přirozené číslo a E je jednotková matice. (Matice splňující vztah $M^k = E$ jsou tzv. periodické matice.) Otázku ještě více specifikoval, když řešil pro matice M různého řádu rovnici $M^2 = E$, kterou studoval již Arthur Cayley. Dalším výsledkem je nalezení matice M, která současně vyhovuje dvěma rovnicím

$$f(M) = 0 \qquad \text{a} \qquad f_1(M) = 0.$$

Jsou-li f a f_1 nesoudělné polynomy, potom taková matice M neexistuje. V opačném případě jsou všechny hledané matice M řešeními rovnice $f_2(M) = 0$, kde f_2 je největší společný dělitel uvažovaných polynomů.

Obsah desáté kapitoly *Stanovení všech matic záměnných s danou maticí* nejlépe charakterizují autorova slova:

Nechť se stanoví všecky matice Q záměnné (convertible, vertauschbar) s danou maticí M t. j. hovící rovnici

$$MQ = QM.$$

([We12], str. 70)

V názvu jedenácté kapitoly *Problem současné transformace dvou bilinearných forem a jiná upotřebení* použil Eduard Weyr teprve podruhé ve své práci termín bilineární forma. Stalo se tak po takřka sedmdesáti stranách od první definice uvedené na počátku celého textu. A v dalších kapitolách se s tímto termínem již nesetkáváme. Na straně 75 je definována matice bilineární formy a uveden vzájemně jednoznačný vztah mezi čtvercovými maticemi a bilineárními formami. Na téže straně je také zavedena matice *konjugovaná čili transponovaná.*[100] V této kapitole autor ukázal, že pomocí charakteristických čísel lze vyřešit i problém, který lze v maticové řeči formulovat takto: jak nalézt nutnou a postačující podmínku pro existenci regulárních matic H, K, pro které je

$$P' = HPK, \qquad Q' = HQK$$

pro dané matice P, Q, P', Q' řádu n, a metodu k určení transformačních matic H, K. Tento problém již vyřešili Karl Theodor Wilhelm Weierstrass roku 1868 v práci *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* a Leopold Kronecker v pracích *Ueber Schaaren quadratischer Formen* z roku 1868 a *Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen* z roku 1874. V případě Weierstrasse šlo o vyřešení problému při existenci čísel p, q, pro která je matice $pP + qQ$ regulární. Leopold Kronecker podal výsledek pro zbývající případ, tj. kdy $\det(pP+qQ) = 0$ pro každé p, q. Eduard Weyr se ve spisu omezil na problém řešený Weierstrassem,[101] který studoval zvlášť pro regulární matici P (a tedy i regulární P') a zvlášť pro případ, kdy jsou matice P, P', Q, Q' singulární. Pro regulární matici P je hledanou podmínkou podobnost matic QP^{-1} a $Q'P'^{-1}$, pro druhou možnost potom podobnost matic QR^{-1} a $Q'R'^{-1}$, kde $R = pP + qQ$ a $R' = pP' + qQ'$. K nalezení transformačních matic opět využil normální soustavy jisté matice.

Dále se autor věnoval kvadratickým formám. Dokázal, že kvadratickou formu n proměnných hodnosti r lze lineární transformací převést na kvadratickou formu r proměnných, nikoli však na formu méně proměnných. Dospěl rovněž

[100] Terminologie zvolená Weyrem v roce 1889 pro dnešní transponovanou matici je poměrně zajímavá, neboť od označení transponovaná se někteří čeští nástupci Eduarda Weyra později odvrátili (viz např. práce Otakara Borůvky v 5. kapitole), dnes je však opět používáme.

[101] Na tuto skutečnost poukázal Eduard Weyr již v úvodu spisu – viz výše uvedená citace z 5. strany knížky. Na téže straně v poznámce pod čarou také napsal:

V případě, který v této práci nebyl vzat v úvahu, podal řešení Kronecker, ibid. 1868 a 1874.

k následujícímu výsledku: je-li M čtvercová matice řádu n a y, y', z, z' vektory, pro které platí

$$My^T = y'^T \quad \text{a} \quad M^T z^T = z'^T,$$

potom je splněna rovnost $yz'^T = zy'^T$. (K důkazu postačí dosadit do výsledné rovnosti vektory y' a z'.) Odtud triviálně plyne, že pro symetrickou čtvercovou matici A, která splňuje vztahy

$$Ay^T = y'^T \quad \text{a} \quad Az^T = z'^T,$$

platí opět rovnost $yz'^T = zy'^T$. Tohoto poznatku poté využil k důkazu známé věty, že reálná symetrická matice má reálné kořeny. Důkaz tvrzení však představil již roku 1829 Cauchy.[102] Text pokračuje v obdobném duchu, tj. dokazováním známých a již dokázaných vět. Konkrétně se jedná například o tvrzení, že pro s-násobný kořen λ symetrické matice M má matice $M - \lambda E$ nulitu s. Věta byla představena Weierstrassem roku 1858 v práci *Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen* [Ws1].

Před vyslovením a důkazem další věty definoval Eduard Weyr ortogonální matici. V následující citaci si opět všimněme Weyrovy terminologie; připomínáme, že matici konjugovanou dnes nazýváme transponovanou a Weyrovou maticí reciprokou rozumíme matici inverzní. Modulem je míněna absolutní hodnota.

Matice $M = ||a_{hk}||$ se zove orthogonalnou, jestliže její konjugovaná a reciproká matice jsou sobě rovny, ...

Nechtěje se pouštěti do theorie těchto matic, vytknu důkazy jen dvou vět sem náležejících.

První věta pochází od Brioschi-ho a zní v podstatě takto: Moduly kořenů orthogonalné matice o realných elementech se rovnají jednici. ([We12], str. 84)

Jedná se o větu italského matematika Francesca Brioschiho (1824–1897) z práce *Note sur un théorème relatif aux déterminants gauches* [Bs1] z roku 1854.

Druhým z tvrzení o ortogonálních maticích, jež Eduard Weyr v knížce dokázal, je věta Georga Ferdinanda Frobenia ze slavné práce *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* z roku 1878, která je analogií předchozího Weierstrassova tvrzení: jestliže M je reálná ortogonální matice a λ její s-násobný kořen, potom má matice $M - \lambda E$ nulitu s.

Na závěr je sporem dokázán zákon setrvačnosti (*věta o inertii*) kvadratických forem, který publikoval roku 1852 James Joseph Sylvester v článku *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares.*[103] Sylvesterův článek však důkaz této věty neobsahuje. Provedli jej již němečtí matematikové Carl Friedrich Gauss a Carl Gustav Jacob Jacobi – první jmenovaný během svých přednášek v akademickém roce 1846/47, druhý potom v roce 1850.

[102] Bližší informace viz 1. kapitola. V ní je uveden i název Hermitovy práce obsahující důkaz obecnějšího tvrzení pro hermitovské matice.

[103] Přesnou citaci Sylvesterovy formulace zákona setrvačnosti čtenář nalezne v 1. kapitole.

Velmi zajímavá je dvanáctá kapitola *O skalarnych funkcích matice.* Na výsledky v ní obsažené jsme odkazovali již v podkapitole věnované Weyrovým poznatkům o lineárních asociativních algebrách. Je v ní totiž „přeložena" do řeči matic (pro matice řádu n) část teorie lineárních asociativních algeber představená v článku *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* z roku 1887. Na začátku kapitoly je dokázáno, že každou celistvou (a následkem toho i lomenou) funkci matice M stupně alespoň m, kde m značí stupeň minimálního polynomu matice M, lze redukovat na funkci stupně menšího než m. Poté je přistoupeno k řešení stěžejního problému:

Budiž dána obecněji nekonečná řada

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu, \tag{1}$$

a položme si otázku, za jakých výminek tato řada definuje určitou matici. ([We12], str. 89)

Je-li $\lambda^m + \gamma_1 \lambda^{m-1} + \ldots + \gamma_m$ minimální polynom matice M, je

$$M^m + \gamma_1 M^{m-1} + \ldots + \gamma_m = 0,$$

neboli zkráceně $\varphi(M) = 0$, potom s využitím dokázaného výsledku o redukci stupně celistvé funkce matice platí pro každá přirozená čísla s, s'

$$\sum_{\nu=0}^{s} \alpha_\nu M^\nu = \alpha_1^s M^{m-1} + \alpha_2^s M^{m-2} + \ldots + \alpha_m^s E,$$

$$\sum_{\nu=s+1}^{s+s'} \alpha_\nu M^\nu = \beta_1^{s,\,s'} M^{m-1} + \beta_2^{s,\,s'} M^{m-2} + \ldots + \beta_m^{s,\,s'} E.$$

Řadou (1) je definována matice právě tehdy,[104] když pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo p takové, že pro všechna $s > p$ a s' libovolné je $\beta_h^{s,\,s'} < \varepsilon$, $h = 1, 2, \ldots, m$.

Eduard Weyr dospěl při studiu této otázky k následujícímu závěru (při čtení citace výsledku si všimněme logických staveb jednotlivých vět):

Položme

$$f(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu,$$

značíce literou ζ obyčejnou komplexní hodnotu, která se nalézá uvnitř konvergenčního kruhu napsané mocninové řady. Buďte dále $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ kořeny matice M, t. j. kořeny rovnice

$$\varphi(\mu) = 0. \tag{3}$$

[104] Podotkněme, že tento způsob zavedení konvergence řady matic není jediný. Zřejmě očekávanější definice konvergence „po složkách" viz např. str. 114 české verze *Numerické metody lineární algebry* (přeložil Miroslav Fiedler; nar. 1926) obsáhlé učebnice *Vyčislitel'nye metody linejnoj algebry* [Fj1], kterou napsali Vera Nikolajevna Fadďejeva (1906–1983) a Dmitrij Konstantinovič Fadďejev (1907–1989).

Aby řada (1) definovala určitou matici, jest nutné a stačí, aby kořeny matice M se nalezaly vesměs uvnitř konvergenční kružnice řady $f(\zeta)$.

Vlastně bychom měli říci, že nutno a stačí, aby kořeny matice M se nalezaly uvnitř oné kružnice aneb na jejím obvodu, v posledním případě však s tou výhradou, že pro ony kořeny řada $f(\zeta)$ a její derivace dole uvažované konvergují, jakož z následující úvahy přímo vychází. ([We12], str. 90)

V druhém odstavci citace autor bohužel nesprávně použil větu ve tvaru ekvivalence (*jest nutno a stačí*). Ihned poté však tuto větu popírá (*... aneb na jejím obvodu*), čímž opravil svou chybu z předcházejícího souvětí. Zřejmě právě použití zmíněné chybné ekvivalence způsobilo, že výsledek je většinou připisován německému matematikovi Kurtu Henselovi, který větu o konvergenci maticové mocninné řady dokázal v článku *Über Potenzreihen von Matrizen.* Stalo se tak v roce 1926, tj. až po třiceti sedmi letech. Jak již bylo uvedeno, Kurt Hensel osobně připisuje Eduardu Weyrovi pouze výsledek o vlastních číslech matice ležících uvnitř konvergenční kružnice.

V případě, že řada (1) definuje matici, vyjádřil ji Weyr jako lineární kombinaci matic M^{m-1}, M^{m-2}, $\ldots$, M^2, M, E. Jestliže má minimální polynom matice pouze jednoduché kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, jedná se o lineární kombinaci

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu = \bar{\alpha}_1 M^{m-1} + \bar{\alpha}_2 M^{m-2} + \ldots + \bar{\alpha}_m E,$$

kde

$$\bar{\alpha}_h = \lim_{s\to\infty} \alpha_h^s, \qquad h = 1, 2, \ldots, m.$$

Analogicky také platí m rovnic

$$f(\lambda_k) = \bar{\alpha}_1 \lambda_k^{m-1} + \bar{\alpha}_2 \lambda_k^{m-2} + \ldots + \bar{\alpha}_m, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

z nichž autor vypočetl hodnoty $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m$ pomocí Lagrangeovy interpolační formule. Dospěl tak k vyjádření

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu = \sum_{k=1}^{m} \frac{f(\lambda_k)}{P'(\lambda_k)} P_k,$$

kde $P(\lambda)$ značí součin $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_m)$, $P'(\lambda)$ jeho derivaci a P_k součin $(M - \lambda_1 E)(M - \lambda_2 E)\ldots(M - \lambda_m E)$, ve kterém není obsažen činitel $(M - \lambda_k E)$.

Obdobné úvahy provedl Weyr i pro obecnější případ, kdy má minimální polynom matice M s-násobné vlastní číslo 0, s_1-násobné vlastní číslo λ_1, s_2-násobné vlastní číslo λ_2 až s_u-násobné vlastní číslo λ_u. V tomto případě vyčíslil koeficienty $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, $\ldots$, $\bar{\alpha}_{m-s}$ z celkem $s + s_1 + \ldots + s_u = m$ podmínek

$$F(\lambda_k) = f(\lambda_k), \quad F'(\lambda_k) = f'(\lambda_k), \ \ldots, \ F^{(s_k-1)}(\lambda_k) = f^{(s_k-1)}(\lambda_k),$$

kde $k = 1, 2, \ldots, u$ a

$$F(\lambda) = \bar{\alpha}_1 \lambda^{m-1} + \ldots + \bar{\alpha}_{m-s} \lambda^s + \alpha_{s-1} \lambda^{s-1} + \ldots + \alpha_0.$$

Dále zobecnil uvedené výsledky pro (v dnešní řeči) Laurentovu řadu

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu,$$

kde M je regulární matice. Nechť

$$f_1(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \xi^\nu, \qquad f_2(\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{-\nu} \xi^{-\nu}$$

jsou dvě mocninné řady, kde ξ je komplexní proměnná. Nechť první řada konverguje, je-li $|\xi| < R$, druhá pro $|\xi^{-1}| < R_1^{-1}$ a dále nechť $R > R_1$. Potom řada

$$f(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu \xi^\nu$$

konverguje pro ξ uvnitř mezikruží o poloměrech R a R_1. Aby řada $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu$ definovala určitou matici, musí totéž platit i pro řady

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu \qquad \text{a} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{-\nu} M^{-\nu},$$

což je ekvivalentní podmínce, že pro vlastní čísla matic M a M^{-1} platí $|\lambda_k| < R$ a $|\lambda_k^{-1}| < R_1^{-1}$ neboli $R_1 < |\lambda_k| < R$. Tedy všechna vlastní čísla matice M leží v konvergenčním oboru řady $f(\xi)$, pomocí níž lze definovanou matici opět vyčíslit.

Dosažené výsledky potom Weyr aplikoval na *binarné matice*. Je-li M maticí řádu dva mající dvě různá vlastní čísla λ_1, λ_2 a je-li mocninnou řadou definovaná matice $f(M)$, potom je dána vztahem

$$f(M) = \frac{f(\lambda_1)}{P'(\lambda_1)} P_1 + \frac{f(\lambda_2)}{P'(\lambda_2)} P_2 = \frac{f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}(M - \lambda_2 E) + \frac{f(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}(M - \lambda_1 E) =$$

$$= \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} M + \frac{\lambda_1 f(\lambda_2) - \lambda_2 f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} E.$$

Pro dvojnásobné vlastní číslo λ platí

$$f(M) = f'(\lambda) M + (f(\lambda) - \lambda f'(\lambda)) E.$$

Odvozené vztahy použil pro exponenciální funkci a došel tak k formulím, z nichž jedna (pro případ dvou různých vlastních čísel) byla uvedena již roku 1884 v článku *Sur la théorie des quaternions*. Připomeňme, že v této práci byla zapsána na základě Sylvesterova *seconde loi de mouvement algébrique*.

V závěrečných odstavcích kapitoly se z pohledu studované problematiky Weyr blíže věnoval exponenciální funkci a logaritmu s maticovým argumentem. Uvažoval přitom nejen matice řádu dva, ale rovněž matice řádu n.

Povšimněme si nyní pozměněných formulací obecnějších výsledků zapsaných ve francouzském článku *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* z roku 1887, které se týkají obecné lineární algebry, a vět platných pro algebru matic řádu n obsažených v právě rozebrané kapitole o dva roky mladší knihy *O theorii forem bilinearných*.

Uvědomme si především, že ve francouzském textu hledal Eduard Weyr součet řady

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu,$$

kde sumarizace začíná indexem $\nu = 1$, zatímco v české knižní verzi studoval sumu

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu,$$

tj. začal sčítat již od $\nu = 0$. V prvním případě nemohl uvažovat člen $\alpha_0 x^0$, neboť jednotkový prvek x^0 nemusí v obecné lineární algebře existovat, zatímco ve druhém případě je M^0 jednotková matice.

Tato změna se samozřejmě projevila v dalším výkladu. Konkrétněji porovnejme například zápis rovnice minimálního stupně, které vyhovuje prvek x lineární asociativní algebry, a obdobný zápis týkající se matice M:

Soit

$$x^{m+1} + \gamma_1 x^m + \ldots + \gamma_m x = o, \qquad (m \leq n), \tag{1}$$

l'équation de degré minimum satisfaite par x, ... ([We10], str. 206)

Základní rovnice matice M nechť jest

$$M^m + \gamma_1 M^{m-1} + \ldots + \gamma_m = 0 \tag{2}$$

čili

$$\varphi(M) = 0.$$

([We12], str. 89)

Nutně se tedy musí lišit i zápisy vyjadřující součty řad. Koeficienty lineární kombinace rovné součtu příslušné mocninné řady jsou pomocí Lagrangeovy formule vyjádřeny takto:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu = x \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi(\lambda_k)}{\lambda_k\, P'(\lambda_k)} \cdot \frac{P(x)}{x - \lambda_k} \qquad \text{ve francouzském článku [We10],}$$

$$\text{resp.} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu = \sum_{k=1}^{m} \frac{f(\lambda_k)}{P'(\lambda_k)} P_k \qquad \text{v českém spisu [We12].}$$

Zlomek $\frac{P(x)}{x-\lambda_k}$ odpovídá výrazu P_k, zlomek $\frac{\varphi(\lambda_k)}{\lambda_k}$ vynásobený prvkem x (před znakem sumy) je analogií výrazu $f(\lambda_k)$.[105]

[105] Všechny symboly použité v obou verzích Lagrangeovy formule byly výše představeny a je tedy možno si provést jejich důkladnější porovnání.

Poslední, třináctá kapitola nazvaná *Upotřebení v theorii linearných differencialných rovnic* se věnuje využití typického tvaru matice k řešení problematiky, kterou vytyčil německý matematik Immanuel Lazarus Fuchs roku 1859 v práci *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten* [Fu1]. Eduard Weyr odvodil Fuchsovy výsledky o fundamentálním řešení lineární diferenciální rovnice m-tého řádu

$$y^{(m)} = p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \ldots + p_m y,$$

kde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ jsou funkce komplexní proměnné x, pomocí teorie představené v předchozích kapitolách. Navíc je doplnil jistými novými poznatky.

Některé myšlenky obsažené ve spisu *O theorii forem bilinearných* dnes řadíme mezi nejvýznamnější výsledky Eduarda Weyra. Naskýtá se otázka, zda byly v české matematické komunitě pochopeny již v době vzniku jeho textu. Na následujících řádcích uvedeme některé pasáže z již zmíněné recenze dvou Weyrových prací (*O theorii forem bilinearných*, *O binarných matricích*) uveřejněné roku 1890 v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky[106] a signované $\sigma\alpha$, jejíž slova jsou nejpříhodnější volbou k dokumentaci skutečnosti, že Weyrovy texty již tehdy upoutaly pozornost svojí odbornou úrovní. Musíme však opět konstatovat, že ani poté nebyla teorie matic v českých zemích přijata. V závěru citace jsou slova popisující stav české matematické odborné literatury před přelomem století a naznačující podmínky, ve kterých česká matematické komunita (včetně Eduarda Weyra) tvořila, a problémy, s nimiž se museli matematikové u nás vyrovnat.[107]

Theorie matic vznikla v zemi, v níž se odedávna kalkul s operacemi zvláštní zálibě těší, byvši založena ... od Cayleye ... U nás zanáší se theorií tou již delší dobu prof. Ed. Weyr; již roku 1884 vydal první, tuším, u věci té pojednání O základní větě v theorii matric ... Dalšími studiemi o předmětu tom, hlavně v Comptes rendus uveřejněnými, zjednal nového lesku jmenu svému, v kruzích mathematického světa co nejchvalněji známému. (str. 318)

Důkaz osnován jest na úvahách o soustavách n veličin, a této zcela původní pomůcky užívá autor hojně i na dále, zejména razí sobě zavedením t. zv. normalných soustav dráhu k problému tak obtížnému, jaký řešen v kap. XI.

Není snadno, v stručnosti vyložiti myšlenkový chod k řešení tomu vedoucí; ... (str. 323–324)

Autor řeší nyní na základě vymožeností v dřívějších kap. obsažených jediným téměř škrtnutím péra problém, jehož řešení se byl Weierstrass (v pojednání „Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen“ r. 1868) pomocí hlubokých analytických úvah dodělal. (str. 327)

Nechceme-li překročiti meze svého referátu, musíme mlčením pominouti další zajímavá upotřebení theorie matic v oboru vyšší algebry, jež autor podává. (str. 328)

---

[106] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 19(1890), str. 318–328.

[107] Připomeňme, že se jedná o recenzi, v níž byl zdůrazněn nový termín „matice“ (*... o t. zv. theorii matric, čili jak se nyní s upřílišněným purismem říká, matic*). V této souvislosti uveďme, že se autor podřídil Weyrově odborné autoritě a v recenzi používá převážně pojem matice.

Ref. zúmyslna se obmezil na prosté naznačení obsahu oznámeného spisu, věda, že zde jako všude, kde při složení vědeckého díla bystrost ducha ku klopotné píli se pojí, u výsledku „dílo samo mistra chválí“. Ke konci nemůže však ref. potlačiti přání, jež při čtení oznámeného spisu několikrát se přihlásilo. Kdo nestojí na samých výších algebry, mnohdy bude při studiu téhož spisu ohlížeti se po pomůcce — a bude nucen sáhnouti ku spisům cizojazyčným. Toho by tuším nebylo, kdyby již dokončeno bylo dílo … jež se stane zajisté pevným a trvanlivým základem pro podobné studie monografické v naší chudé literatuře … Základové vyšší algebry od Ed. Weyra a V. Řehořovského. Doufejme, že podmínky vědecké produkce se u nás zlepšily alespoň tou měrou, by vydání podobných spisů nebylo zdržováno tím, že ukládá autorům osobní oběti mnohdy nedostižné. (str. 328)

Vedle této recenze lze komentáře ke knize nalézt i v dalších textech, které byly napsány relativně brzy po vytištění Weyrova spisu. Za všechny zmiňme referativní časopis Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik[108] s obsaženou poznámkou od Františka Josefa Studničky či text od autora podepsaného zkratkou S., který je obsažen v kritických listech Athenaeum.[109]

Německy psaná verze *Zur Theorie der bilinearen Formen* knížky *O theorii forem bilinearných* byla publikována roku 1890 ve dvou sešitech časopisu Monatshefte für Mathematik und Physik. Nejedná se o doslovný překlad, ale o mírně upravený text, jehož některé části jsou oproti českému znění rozvinuty a některé naopak zkráceny nebo dokonce vynechány. Neodpovídají si například připojené poznámky pod čarou, číslování odstavců v rámci kapitol apod. Překvapující je změněné značení matic. Od dvojice čar po obou stranách schématu autor přešel k ohraničení pomocí velkých složených závorek. Vrátil se tak ke značení, jež používal v první práci věnované teorii matic. Naopak jsou ponechány názvy kapitol, ale jedna z nich v německé verzi chybí. Bohužel se jedná o kapitolu dvanáctou, v níž Eduard Weyr představil svůj významný poznatek o konvergenci mocninné řady s maticovým argumentem. Můžeme se jen domnívat, zda k tomuto vynechání autor přistoupil vzhledem k publikování obecnějších výsledků v samostatném článku *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* v roce 1887.

Referát o německé verzi Weyrovy práce napsal pro časopis Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik[110] Friedrich Wilhelm Franz Meyer, který v té době působil na akademii v městě Clausthal-Zellerfeld. Jedná se však pouze o konstatování, že práce *Zur Theorie der bilinearen Formen* je přepis české verze, o níž byla již zpráva v tomtéž časopisu podána; text je referován také ve věstníku Bulletin des sciences mathématiques.[111]

V roce 1901 se v Praze konal 3. sjezd českých přírodozpytců a lékařů. Dne 26. května 1901 na něm vystoupil Eduard Weyr s přednáškou *O theorii forem bilinearných*, která byla později publikována ve sjezdovém věstníku. V příspěvku ukazuje, že jeho pojem normální soustavy příslušné dané matici (resp. bilineární

[108] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 21(1889), str. 123–124.
[109] Athenaeum 8(1890–91), str. 51–52.
[110] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 22(1890), str. 141.
[111] Bulletin des sciences mathématiques 15(1891), str. 97.

formě) lze využít v otázce současné transformace dvou bilineárních forem P, Q také pro případ, který ve stejnojmenném spisu neřešil, tj. pro případ, v němž se $\det(pP + qQ)$ rovná nule pro každé p, q. Připomeňme, že se jedná o problém již vyřešený Leopoldem Kroneckerem.

Weyrova teorie nalezla výjimečnou odezvu po celém světě více než sto let od svého zveřejnění a zájem přetrvává i ve třetím tisíciletí. Reakcím na Weyrovu teorii v zahraničí je věnována samostatná, konkrétně 6. kapitola knihy.

2.10 Matice v dalších Weyrových textech

- *O problému projektivity v jednoduchých útvarech geometrických* [We11], 1889
- *Výklady o mathematice I., II.* [We14], [We15], 1891, 1892
- *O soustavách orthogonálných ploch* [We16], 1896
- *Počet differenciálný* [We18], 1902

Jestliže nahlédneme do Weyrova dvojdílného vysokoškolského textu *Výklady o mathematice*[112] z let 1891 a 1892, matice v něm nenalezneme. Z lineární algebry jsou zde obsaženy pouze partie o determinantech a soustavách lineárních rovnic.

Kvadratickým formách (a také determinantům) jsou věnovány některé pasáže ve Weyrově[113] knize *Počet differenciálný* z roku 1902.

Matice však nalezneme v některých Weyrových geometrických pracích. Jmenujme například více než dvacetistránkový text *O problému projektivity v jednoduchých útvarech geometrických* z roku 1889 či článek *O soustavách orthogonálných ploch* z roku 1896. Náplň druhé ze zmíněných prací uvádějí tato autorova slova:

Některé výsledky, týkající se tří soustav ploch na vzájem kolmých, lze odvoditi za pomocí theorie matic způsobem přehledným a stručným; to ukázati jest účelem následující krátké stati. ([We16], str. 42)

Poněkud překvapivá je skutečnost, jakým způsobem je v tomto článku zavedena matice. Formulaci *Označíme-li symbolem* a_{hk} *matici, t. j. souhrn členů determinantu* $|a_{hk}|$, ... ([We16], str. 43) dnes považujeme za vágní a nedostatečně exaktní.

[112] Jedná se o litografie, které na základě Weyrových přednášek z let 1890 až 1892 vydal jeho asistent a středoškolský profesor matematiky a deskriptivní geometrie na malostranské reálce Antonín Vaňourek (1866–1932), druhé opravené vydání druhého dílu z roku 1898 potom Emanuel Hlavatý (1872–1947), později profesor na reálce v Pardubicích.

[113] Původnost této Weyrovy učebnice napadl v roce 1902 Jan Vilém Pexider (1874–1914). Uvedl, že se jedná víceméně o překlad některých partií knih, které napsali francouzští matematikové Jules Tannery (1848–1910) a Joseph Alfred Serret (1819–1885) a italský matematik Angelo Genocchi (1817–1889). Pexider se rovněž negativně vyjádřil o odbornosti, přesnosti a tiskové úpravě textu. Více viz článek Jindřicha Bečváře a Luďka Zajíčka (nar. 1947) *Weyrův spor s Pexiderem* [Be4] v monografii *Eduard Weyr (1852–1903)*, str. 143–162.