1 Vznik a vývoj teorie matic

Teorie matic je poměrně mladou matematickou disciplínou. Její vznik se datuje do druhé poloviny devatenáctého století, některé dnes běžně používané pojmy se konstituovaly až ve století dvacátém. Podněty, které vedly k jejímu zrodu, přicházely z více směrů, své kořeny mají v dávné minulosti. Pojem *matice* lze totiž nalézt již před dvěma tisíci lety ve staré Číně ve spojitosti s řešením soustav lineárních rovnic.

Abychom mohli výsledky českých matematiků z teorie matic správně umístit do kontextu doby a porovnat je s přístupy a idejemi, které pochází z jiných zemí, věnujme se nejprve vzniku a vývoji maticového počtu ve světě do třicátých let 20. století.

1.1 Řešení soustav lineárních rovnic ve staré Číně

Není překvapivé, že v prehistorii teorie matic hrají důležitou roli soustavy lineárních rovnic. Úlohy, které vedou na takovéto soustavy, byly řešeny již ve starém Egyptě a Mezopotámii před čtyřmi tisíci lety. Ve staré Číně byla před dvěma tisíci lety k řešení úloh vedoucích na soustavy lineárních rovnic s regulární maticí využívána metoda, kterou lze považovat za prvopočátek teorie matic.

Touto metodou byl tzv. algoritmus *fang čcheng*, který je popsán v učebním textu *Matematika v devíti kapitolách* (český přepis názvu je *Tiou čang suan šu*, mezinárodní *Jiu zhang suan shu*) z období dynastie Han. Čísla byla čínskými počtáři zaznamenávána pomocí tyčinek kladených na početní desku, výpočty byly prováděny změnou rozestavění příslušných tyčinek. Koeficienty jednotlivých rovnic byly zaneseny do sloupců zprava doleva, což odpovídá čínskému způsobu psaní. Například nehomogenní soustava pěti rovnic o pěti neznámých byla znázorněna tabulkou o pěti sloupcích a šesti řádcích.

Algoritmus *fang čcheng* je obdobný dnes velmi známé *Gaussově eliminační metodě*, v níž jsou však koeficienty jednotlivých rovnic psány do řádků. Zatímco v současnosti provádíme tzv. elementární úpravy řádků rozšířené matice soustavy shora dolů, ve staré Číně upravovali sloupce tabulky, kterou dnes nazýváme *matice* (slovo *fang* značí čtvercovou tabulku čísel), zprava doleva. Při provádění tohoto algoritmu objevili tehdejší počtáři záporná čísla, naučili se s nimi pracovat a ve výše zmíněném textu sepsali pravidla pro počítání s kladnými a zápornými čísly.[1]

V zachycení koeficientů soustav lineárních rovnic do obdélníkových schémat a v následných úpravách při metodě *fang čcheng* lze spatřovat nejstarší prvky maticové symboliky a maticové techniky.

Zájemcům o bližší informace o klasickém díle *Matematika v devíti kapitolách* doporučujeme český komentovaný překlad [Hc1] z roku 2008, který napsal Jiří Hudeček (nar. 1981) a ve kterém je uvedena řada dalších pramenů.

[1] Pro odlišení záporných čísel (*fu*) od kladných čísel (*čžen*, resp. *zheng*) byly používány tyčinky různých barev: černé pro záporná čísla, červené pro kladná čísla. Nebylo-li nutné tyto dvě skupiny čísel rozlišovat, byly tyčinky pravděpodobně neobarvené.

1.2 Determinanty, bilineární a kvadratické formy

Z výše uvedeného by se mohlo zdát, že cesta od metody *fang čcheng* ke vzniku teorie matic již nebyla příliš zdlouhavá a náročná. Opak je však pravdou, neboť teorie matic se nevyvinula přímo ze studia koeficientů soustav lineárních rovnic. Její spletitá pouť za vlastním zrodem a plným uznáním samostatnosti je spjata se vznikem a vývojem jiných disciplín, zejména s teorií determinantů, s teorií bilineárních a kvadratických forem a s teorií invariantů. Úzké propojení teorie matic s teorií determinantů však působilo do jisté míry i negativně, což uvidíme například na konkrétním příkladu nejednotného způsobu násobení matic.

S výrazy, které dnes nazýváme *determinanty*, se můžeme setkat v pracích řady matematiků, kteří k nim dospěli zejména při řešení soustav lineárních rovnic. Vyjádříme-li totiž neznámé například ze soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých pomocí koeficientů těchto rovnic, nutně se objeví výrazy představující determinanty druhého řádu. Tímto způsobem popsal v roce 1539 kořeny nehomogenní soustavy dvou rovnic o dvou neznámých Gerolamo Cardano (1501–1576).

V roce 1683 rozvinul japonský matematik Takakazu Šinsuke Seki Kōwa (1642–1708) v díle *Kai Fukudai no Hō* čínskou metodu *fang čcheng* a formuloval postup pro výpočet řešení soustavy rovnic z jejích koeficientů, které byly zaznamenány v tabulce na početní desce. Přiblížil se tak v určitém smyslu zavedení pojmu determinant.

Za objevitele determinantů je nejčastěji označován německý matematik, filozof a přírodovědec Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), který v roce 1693 při eliminaci n neznámých ze soustavy $n + 1$ nehomogenních lineárních rovnic dospěl k výrazu, kterému dnes říkáme *determinant*. Leibniz pomocí tohoto pojmu vyjádřil nutnou podmínku řešitelnosti zmíněné soustavy, tj. nulovost determinantu rozšířené matice uvažované soustavy. Byl zřejmě prvním matematikem, který užíval dvojí indexy. Například ve smyslu dnešního označení koeficientu a_{31} používal symbolu 3_1 nebo zcela jednoduše 31. Leibnizův pojem determinantu ani jeho dvojí indexy se neujaly; tyto ideje se totiž objevily víceméně pouze v jeho korespondenci a publikovány nebyly.

Za zrod teorie determinantů se obvykle považuje zveřejnění Cramerova pravidla v rozsáhlém díle *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* [Cr1] z roku 1750, jehož autorem je švýcarský matematik Gabriel Cramer (1704–1752). Ve zmíněné monografii o algebraických křivkách hledal mimo jiné obecnou rovnici kuželosečky procházející pěti danými body a došel k soustavě pěti lineárních rovnic o pěti neznámých. V závěru knihy se potom těmto soustavám věnoval obecně. Předložil zde obecnou metodu řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic, její kořeny popsal pomocí zlomků, v jejichž čitatelích a jmenovatelích se objevily výrazy v současnosti nazývané determinanty.

Na základě dochovaných rukopisů skotského matematika Colina Maclaurina (1698–1746), který studentům poskytoval i své dosud nepublikované texty, se oprávněně domníváme, že mu Cramerovo pravidlo bylo známo již koncem dvacátých let 18. století. Roku 1748, dva roky po Maclaurinově smrti, vyšel jeho významný a oblíbený spis *A treatise of algebra* [Ml1], v němž se vyskytuje pasáž obsahující explicitní vyjádření Cramerova pravidla pro soustavu dvou, resp. tří lineárních rovnic o dvou, resp. třech neznámých a rovněž poznámka o soustavě čtyř rovnic o čtyřech neznámých, a to v podobě, která je shodná s přepisem jeho rukopisu z roku 1729. Colin Maclaurin však pravidlo nepopsal tak přesně jako Cramer; nediskutoval mimo jiné situaci, kdy je matice soustavy singulární, a také nevyjádřil zcela přesně znaménka součinů, z nichž se skládá čitatel zlomku. Na tento nedostatek upozornil v roce 2001 A. A. Kosinski, který považoval za původce nepřesností skutečnost, že Maclaurin nepoužíval indexy.

The rule for forming the products is not difficult to state, especially for the denominator of the ratio, which is the same for all unknowns. The rule for signs, the heart of the matter, is almost impossible to state without an appropriate indexing of unknowns. ... in particular, no notice taken of the possibility that the denominator may vanish, rendering the formulas meaningless.

It would be incorrect to attach much blame to Maclaurin for this muddle. In the middle of the 18th century the solution by elimination of systems of linear equations did not present a problem to which a mathematician of Maclaurin's class would attach much attention. ([Ko1], str. 311)

Naopak exaktní popis, který podal Cramer, způsobil kladné přijetí jeho výsledku širokou matematickou komunitou a připojení přívlastku Cramerovo do názvu pravidla. Bližší informace k diskusi o objeviteli Cramerova pravidla může čtenář nalézt v knize Jindřicha Bečváře (nar. 1947) *Z historie lineární algebry* [Be6].

Studium výrazů, které se objevují v čitatelích a jmenovatelích zlomků vyjadřujících neznámé, znamenalo postupný rozvoj teorie determinantů, této problematice se již v 18. století věnovalo několik významných matematiků.

Například francouzský matematik Étienne Bézout (1730–1783) popsal rekurentní i obecný způsob vytváření determinantu. Jednotlivé členy získal permutováním indexů a jejich znaménka určil pomocí počtu transpozic. Obdobnými otázkami jako Bézout se zabýval také francouzský matematik, fyzik a astronom Pierre Simon Laplace (1749–1827); oba matematikové používali k označení determinantu slovo *resultant*. K pojmu *reciprokého determinantu* pak dospěl roku 1773 Joseph Louis Lagrange (1736–1813), matematik, fyzik a astronom italsko-francouzského původu.

Podstatný zlom ve studiu determinantů představoval přístup francouzského matematika Alexandra Théophila Vandermonda (1735–1796), který začal s determinanty pracovat jako se samostatnými matematickými objekty a zavedl první symboliku. Výsledky z této oblasti publikoval v práci *Mémoire sur l'élimination* [Va1] z roku 1772 (čteny však byly v pařížské akademii již na začátku roku 1771). Determinant zapisoval pomocí schématu

$$\frac{\;\mid\;\mid\;}{\;\mid\;\mid\;}.$$

Do horní části vepisoval řádkové indexy (které často značil písmeny řecké abecedy), do spodní části potom sloupcové indexy (písmena latinské abecedy).

Pomocí tohoto zkráceného zápisu definoval determinanty druhého až šestého řádu a popsal jejich rozvoje.

Je suppose encore le système suivant d'abréviations, & que l'on fasse

$$\frac{\alpha|\beta}{a|b} = \frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta}{a}$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma}{a|b|c} = \frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta|\gamma}{b|c} + \frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta|\gamma}{c|a} + \frac{\alpha}{c}\cdot\frac{\beta|\gamma}{a|b}$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d} = \frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{b|c|d} - \frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{c|d|a} + \frac{\alpha}{c}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{d|a|b} - \frac{\alpha}{d}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{a|b|c}$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{a|b|c|d|e} = \frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{b|c|d|e} + \frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{c|d|e|a} + \frac{\alpha}{c}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{d|e|a|b} + \frac{\alpha}{d}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{e|a|b|c} + \frac{\alpha}{e}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{a|b|c|d}$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|b|c|d|e|f} = \frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{b|c|d|e|f} - \frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{c|d|e|f|a} + \&c.$$

Le symbole $\frac{\;|\;|\;}{\;|\;|\;}$ *sert ici de caractéristique.*

Les seules choles à observer font l'ordre des signes, & la loi des permutations entre les lettres a, b, c, d, &c. qui me paroissent suffisamment indiqués ci-dessus. ([Mu3], díl I., str. 18)

Vidíme, že Vandermonde používal dvojí indexy, které však na rozdíl od Leibnize psal nad sebe. Vztah definující determinant druhého řádu odpovídá dnešnímu vyjádření

$$\frac{\alpha|\beta}{a|b} = \begin{vmatrix} r_{\alpha a} & r_{\alpha b} \\ r_{\beta a} & r_{\beta b} \end{vmatrix} = r_{\alpha a}r_{\beta b} - r_{\alpha b}r_{\beta a}.$$

V uvedené symbolice, která bohužel neumožnovala zápis konkrétního číselného determinantu, formuloval několik dnes běžně užívaných vlastností determinantů (tvrzení o transpozici sloupců, o nulovosti determinantu se shodnými řádky, rozvoj determinantu apod.) a rovněž Cramerovo pravidlo. Vandermonde je zcela oprávněně považován za zakladatele teorie determinantů,[2] bližší informace viz např. monografie Jindřicha Bečváře *Z historie lineární algebry* [Be6].

Ve všech pracích týkajících se soustav lineárních rovnic a determinantů se objevují postupy, které dnes označujeme jako elementární úpravy matic. Studium soustav lineárních rovnic a následný rozvoj teorie determinantů tak připravovaly vznik teorie matic. Další podněty přicházely při studiu bilineárních a kvadratických forem.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855), německý fyzik, astronom, jeden z největších a nejvšestrannějších matematiků všech dob, ve svém slavném díle *Disquisitiones arithmeticae* [Ga1] z roku 1801 vyšetřoval binární a ternární kvadratické formy. Koeficienty ternární kvadratické formy

$$f(x,x',x'') = axx + a'x'x' + a''x''x'' + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

uspořádal do obdélníkového schématu, v němž do prvního řádku vepsal koeficienty vyskytující se u druhých mocnin neznámých a do druhého řádku koeficienty u smíšených součinů.

[2] Tento názor zaujímal i Thomas Muir (1844–1934), nejuznávanější znalec a historik teorie determinantů.

Ita

$$axx + a'x'x' + a''x''x'' + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

erit forma ternaria rite ordinata, cuius indeterminata prima x, secunda x', tertia x", coëfficiens primus a etc., quartus b etc. Sed quoniam ad brevitatem multum conferet, si non semper necesse est, indeterminatas formae ternariae per literas peculiares denotare, eandem formam, quatenus ad indeterminatas non respicimus, etiam hoc modo

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

designabimus. ([Ga1], str. 300)

Vidíme tedy, že se nejednalo o reprezentaci ternární kvadratické formy symetrickou maticí v dnešním smyslu. K uvažované ternární kvadratické formě navíc Gauss přiřadil výraz

$$D = abb + a'b'b' + a''b''b'' - aa'a'' - 2bb'b'',$$

který nazval *determinant.* Dnes hovoříme o *diskriminantu formy* a definujeme jej jako záporně vzatý determinant matice

$$\begin{pmatrix} a, & b'', & b' \\ b'', & a', & b \\ b', & b, & a'' \end{pmatrix}$$

příslušné formy. Pro binární kvadratickou formu $axx+2bxy+cyy$ je tedy tímto „determinantem" číslo $b^2 - ac$.

Gauss dále definoval k formě f *adjungovanou (reciprokou) formu* F se schématem

$$\begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix},$$

jejíž koeficienty jsou (v dnešní řeči) záporně vzaté algebraické doplňky matice formy f, tj.

$$A = bb - a'a'', \quad A' = b'b' - aa'', \quad A'' = b''b'' - aa',$$

$$B = ab - b'b'', \quad B' = a'b' - bb'', \quad B'' = a''b'' - bb',$$

a dále uvedl, že adjungovaná forma k formě F je forma, jejíž koeficienty jsou koeficienty formy f vynásobené diskriminantem D, tj.

$$\begin{pmatrix} aD, & a'D, & a''D \\ bD, & b'D, & b''D \end{pmatrix}.$$

Zabýval se i substitucemi forem, které reprezentoval pomocí čtvercových schémat jejich koeficientů. Jelikož se však již jedná v podstatě o matice používané v souladu s dnešními zvyky, ukážeme některé Gaussovy poznatky z této sféry až v dalším textu. Na tomto místě ještě zmiňme, že Gauss znal pro determinanty druhého a třetího řádu větu o násobení determinantů a rovněž větu o reciprokém determinantu.

V roce 1812 prezentovali své výsledky týkající se determinantů francouzští matematikové Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) a Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Prvně jmenovaný matematik vyslovil a dokázal větu o násobení determinantů, která se někdy nazývá Binetova. Matematický svět však více ovlivnil příspěvek Cauchyho,[3] který byl v roce 1815 publikován pod názvem *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment* [Ca1] a ve kterém jsou uvedeny základní vlastnosti determinantů a položeny tak pevné základy teorie determinantů. Cauchy se zabýval tzv. symetrickými funkcemi n proměnných, jejichž hodnota se při permutaci neznámých nemění, a symetrickými alternujícími funkcemi n proměnných, jejichž hodnota při permutaci neznámých mění pouze znaménko v závislosti na počtu transpozic příslušné permutace a jejichž reprezentantem je tedy právě determinant. Zavedl rovněž novou symboliku a terminologii. Uvažoval n různých prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a pomocí součinu jejich vzájemných rozdílů vytvořil symetrickou alternující funkci, která byla determinantem. Reprezentoval ji symbolem $S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3} \ldots a_{n\cdot n})$ a nazval „determinant".[4] Byl tak prvním matematikem, který uvedený termín použil v dnešním smyslu, později se však vrátil k pojmenování *resultant.* Cauchy dále uspořádal n^2 prvků vyskytujících se v determinantu do čtvercového schématu, tj. v dnešním smyslu do matice.

... on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction symétrique alternée, qui, au lieu d'être représentée par

$$S(\pm a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots\ldots a_n^n),$$

sera représentée par

$$S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3} \ldots\ldots a_{n\cdot n}),$$

le signe S étant relatif aux premiers indices de chaque lettre. Telle est la forme la plus générale des fonctions que je désignerai dans la suite sous le nom de déterminans. Si l'on suppose succesivement

$$n = 1, \qquad n = 2, \qquad \&c\ldots\ldots,$$

on trouvera

$S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2}) = a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} - a_{2\cdot 1} a_{1\cdot 2},$

$S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3}) = a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3} + a_{2\cdot 1} a_{3\cdot 2} a_{1\cdot 3} + a_{3\cdot 1} a_{1\cdot 2} a_{2\cdot 3} - a_{1\cdot 1} a_{3\cdot 2} a_{2\cdot 3} - a_{3\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{1\cdot 3} - a_{2\cdot 1} a_{1\cdot 2} a_{3\cdot 3}$

&c......

[3] Český matematik František Josef Studnička (1836–1903) označil právě Cauchyho za zakladatele teorie determinantů (viz dále).

[4] Písmeno S supluje dnes používaný symbol $\sum$, přičemž Cauchy sčítal pomocí prvních indexů.

pour les déterminans du second, du troisième ordre, &c...... Les quantités affectées d'indices différens devant être généralement osidérées comme inégales, on voit que le déterminant du second ordre renfermera quatre quantités différentes, savoir,

$$\begin{matrix} a_{1\cdot 1}, & a_{1\cdot 2}, \\ a_{2\cdot 1}, & a_{2\cdot 2}, \end{matrix}$$

que le déterminant du troisième ordre en renfermera neuf, savoir,

$$\begin{matrix} a_{1\cdot 1}, & a_{1\cdot 2}, & a_{1\cdot 3}, \\ a_{2\cdot 1}, & a_{2\cdot 2}, & a_{2\cdot 3}, \\ a_{3\cdot 1}, & a_{3\cdot 2}, & a_{3\cdot 3}, \end{matrix}$$

&c......

En général, le déterminant du $n\cdot^{\grave{e}me}$ ordre, ou

$$S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3} \ldots\ldots a_{n\cdot n}),$$

renfermera un nombre égal à n^2 de quantités différentes; qui seront respectivement

$$(I) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} a_{1\cdot 1}, & a_{1\cdot 2}, & a_{1\cdot 3} & \ldots & a_{1\cdot n}, \\ a_{2\cdot 1}, & a_{2\cdot 2}, & a_{2\cdot 3} & \ldots & a_{2\cdot n}, \\ a_{3\cdot 1}, & a_{3\cdot 2}, & a_{3\cdot 3} & \ldots & a_{3\cdot n}, \\ \&c \ldots\ldots & & & & \\ a_{n\cdot 1}, & a_{n\cdot 2}, & a_{n\cdot 3} & \ldots & a_{n\cdot n}. \end{array} \right.$$

([Ca1], str. 52–53)

Cauchy rovněž zavedl nové termíny (*prvky determinantu*, *řádek*, *sloupec*, *prvky hlavní diagonály* atd.). Stejně jako Binet znal větu o násobení determinantů a formuloval Cramerovo pravidlo. V učebnici *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. Première partie: Analyse algébrique* [Ca2] z roku 1821 použil obdélníkové schéma uspořádané z koeficientů nehomogenní soustavy n lineárních rovnic o n neznámých, tj. rozšířenou matici soustavy.

Německý matematik Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) vydal v roce 1841 tři latinsky psané statě o determinantech. Byly napsány stručně, souhrnně, čitelně a srozumitelně, a proto byly hojně využívány ke studiu. Jejich vydání podstatně přispělo ke zvýšení zájmu o teorii determinantů. V první polovině 19. století se ještě studiem determinantů mnoho matematiků nezabývalo, v polovině 19. století se však teorie determinantů stala jednou z klíčových matematických disciplín, determinanty úspěšně pronikaly do řady matematických oborů. Ve druhé polovině 19. století bylo publikováno v této oblasti mnoho prací, mnohé z nich však již nepřinášely podstatně nové výsledky. Významnější z nich věnovaly pozornost některým speciálním typům determinantů (funkcionálním determinantům v matematické analýze, ortogonálním determinantům v teorii kvadratických forem a v geometrii, Hankelovým determinantům v teorii invariantů a algebraických rovnic atd.) a různým zobecněním (především nekonečným determinantům, kubickým a n-rozměrným determinantům, tzv. permanentům, determinoidům apod.).

Ve druhé polovině 19. století se však o své uznání v matematickém světě zvolna hlásila nová matematická disciplína – teorie matic.

1.3 Lineární transformace a substituce

Velmi podstatné impulsy k situování koeficientů do čtvercových či obdélníkových schémat přicházely z oblasti studia lineárních transformací a substitucí.

Transformacemi kartézských souřadnic, kterým odpovídají ortogonální matice, se zabýval např. švýcarský matematik, fyzik a astronom Leonhard Euler (1707–1783). Tuto problematiku u něho nalezneme například v práci o magických čtvercích z roku 1771 nazvané *Problema algebraicum ab affectiones prorsus singulares memorabile* [Eu1].

Carl Friedrich Gauss ve výše zmíněné knize *Disquisitiones arithmeticae* z roku 1801 použil k vyjádření lineární substituce

$$\begin{aligned} x &= \alpha y + \beta y' + \gamma y'' \\ x' &= \alpha' y + \beta' y' + \gamma' y'' \\ x'' &= \alpha'' y + \beta'' y' + \gamma'' y'' \end{aligned}$$

čtvercové schéma

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

a přiřadil jí výraz

$$k = \alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' + \gamma\alpha'\beta'' - \gamma\beta'\alpha'' - \alpha\gamma'\beta'' - \beta\alpha'\gamma'',$$

tj. determinant příslušné matice. Uvedl, že mezi (v dnešní řeči) diskriminantem D formy f a diskriminantem E formy g, jež vznikla z formy f uvedenou substitucí, platí vztah $E = kkD$.

Gauss rovněž reprezentoval reciprokou substituci (k substituci výše uvedené) schématem

$$\begin{matrix} \beta'\gamma'' - \beta''\gamma', & \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha', & \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' \\ \beta''\gamma - \beta\gamma'', & \gamma''\alpha - \gamma\alpha'', & \alpha''\beta - \alpha\beta'' \\ \beta\gamma' - \beta'\gamma, & \gamma\alpha' - \gamma'\alpha, & \alpha\beta' - \alpha'\beta \end{matrix} .$$

Substituci vzniklou složením původní a reciproké substituce zapsal pomocí schématu

$$\begin{matrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{matrix} .$$

Zamyslíme-li se nad uvedenými vztahy, usoudíme, že se čtvercovými schématy ještě nebylo manipulováno tak, jak jsme v současnosti zvyklí. Ponecháme-li Gaussovo značení pro reciprokou substituci (v dnešním výkladu by se jednalo o transponovanou reciprokou matici nebo též matici složenou z algebraických doplňků prvků, v níž se algebraický doplněk prvku vyskytuje na stejné pozici jako příslušný prvek), musíme k získání výsledného systému skládat schémata pro nás neobvyklým způsobem. Například prvek na druhém řádku a v prvním sloupci výsledného schématu získáme (v dnešní řeči) vynásobením prvního řádku původní matice s druhým řádkem reciproké matice.

Násobení matic v dnešním smyslu se však v témže díle vyskytuje. Gauss se totiž rovněž zabýval skládáním obecných substitucí, jehož výsledek opět reprezentoval čtvercovým schématem. Na základě níže uvedených ukázek je zřejmé, že zápis skládání substitucí pomocí maticové symboliky ještě nebyl důsledně přijat ani v této Gaussově práci. Při skládání lineárních forem totiž reprezentaci schémata koeficientů nepoužil:

Si forma F formam F' implicat, haec vero formam F" , forma F etiam formam F" implicabit.

Sint indeterminatae formarum F, F', F" respective x, y; x', y'; x", y" transeatque F in F' ponendo

$$x = \alpha x' + \beta y', \qquad y = \gamma x' + \delta y'$$

F' in F" ponendo

$$x' = \alpha' x'' + \beta' y'', \qquad y' = \gamma' x'' + \delta' y''$$

patetque, F in F" transmutatum iri ponendo

$$x = \alpha(\alpha' x'' + \beta' y'') + \beta(\gamma' x'' + \delta' y''), \quad y = \gamma(\alpha' x'' + \beta' y'') + \delta(\gamma' x'' + \delta' y'')$$

sive

$$x = (\alpha\alpha' + \beta\gamma')x'' + (\alpha\beta' + \beta\delta')y'', \quad y = (\gamma\alpha' + \delta\gamma')x'' + (\gamma\beta' + \delta\delta')y''$$

([GaW], díl I., str. 126)

Naopak v jiné části textu dvě substituce reprezentoval odpovídajícími schématy a totéž učinil i s výslednou substitucí:

Si forma ternaria f formam ternariam f' implicat, atque haec formam f": implicabit etiam f ipsam f". Facillime enim perspicietur, si transeat

$$\begin{array}{ccc} f \text{ in } f' \text{ persubstitutionem} & & f' \text{ in } f'' \text{ persubstitutionem} \\ \alpha,\ \ \beta,\ \ \gamma & | & \delta,\ \ \varepsilon,\ \ \zeta \\ \alpha',\ \ \beta',\ \ \gamma' & | & \delta',\ \ \varepsilon',\ \ \zeta' \\ \alpha'',\ \ \beta'',\ \ \gamma'' & | & \delta'',\ \ \varepsilon'',\ \ \zeta'' \end{array}$$

f transmutatum iri per substitutionem

$$\begin{array}{lll} \alpha\delta + \beta\delta' + \gamma\delta'', & \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon' + \gamma\varepsilon'', & \alpha\zeta + \beta\zeta' + \gamma\zeta'' \\ \alpha'\delta + \beta'\delta' + \gamma'\delta'', & \alpha'\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \gamma'\varepsilon'', & \alpha'\zeta + \beta'\zeta' + \gamma'\zeta'' \\ \alpha''\delta + \beta''\delta' + \gamma''\delta'', & \alpha''\varepsilon + \beta''\varepsilon' + \gamma''\varepsilon'', & \alpha''\zeta + \beta''\zeta' + \gamma''\zeta'' \end{array} .$$

([GaW], díl I., str. 304–305)

Porovnáním prvků na všech pozicích zjistíme, že se jedná o maticové násobení v dnešním smyslu.

I přes znalost tohoto maticového vyjádření kompozice dvou substitucí nenalézáme v Gaussově práci maticový zápis transformace kvadratické formy lineární substitucí s příslušným schématem (maticí). Důvod je prostý. Jak již bylo řečeno, autor kvadratickou formu nezapisoval pomocí čtvercové symetrické matice.

Tuto reprezentaci nalezl Gaussův žák, německý matematik Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823–1852). V článku *Neue Theoreme der höheren Arithmetik* [Ei1] z roku 1847 zapsal matici formy f již v dnešním smyslu (*das Formensystem der Form*). Často se však držel značení svého učitele, jehož vliv je čitelný i z následujícího úryvku.

... ist eine ternäre quadratische Form oder schlechthin eine ternäre Form ein Ausdruck von folgender Gestalt:

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx' = f,$$

in welchem die Coëfficienten a, a', a", b, b', b" gegebene, die Grössen x, x', x'' *unbestimmte oder variable ganze Zahlen vorstellen. Die Form*

$$Ax^2 + A'x'^2 + A''x''^2 + 2Bx'x'' + 2B'xx'' + 2B''xx' = F,$$

in welcher

$$\begin{array}{lll} A = b^2 - a'a'', & A' = b'^2 - aa'', & A'' = b''^2 - aa', \\ B = ab - b'b'', & B' = a'b' - bb'', & B'' = a''b'' - bb' \end{array}$$

ist, nennt Gauss die zugeordnete Form der Form f. Die Determinante der Form f ist die Coëfficientenverbindung

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' = D;$$

sie ist zugleich die negative Determinante des linearen Systems

$$\begin{pmatrix} a, & b'', & b' \\ b'', & a', & b \\ b', & b, & a'' \end{pmatrix},$$

welches ich das Formensystem der Form f nenne; das umgekehrte System des Formensystems mit der Determinante des letztern, d. h. mit $-D$*, multiplicirt, liefert das Formensystem der zugeordneten Form; die Determinante der zugeordneten Form ist* $= D^2$*, und die zugeordnete von der zugeordneten* $= Df$*, d. h. sie geht aus f hervor, wenn man alle sechs Coëfficienten mit D multiplicirt. Wenn f durch eine lineare Substitution*

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha' & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix} = S,$$

deren Coëfficienten ganze Zahlen und deren Determinante $= +1$ *ist, in eine andere ternäre Form f' übergeht ...* ([EiW], díl I., str. 483–484)

Eisenstein si dobře uvědomoval výhodu používání čtvercových schémat k zápisu lineárních substitucí, s nimiž pracoval (již od roku 1844) převážně v souvislosti se studiem binárních a ternárních kvadratických a kubických forem. Substituce nazýval různými termíny (*lineare System*, *Substitution* nebo také *Substitutions-System*) a chápal je již jako samostatné objekty. Často je psal do kulatých závorek a značil čísly nebo písmeny. Maticovou symboliku využíval i pro zápis skládání a invertování substitucí.

1.4 Počátky pojmu a termínu „matice“

Na vznik a vývoj teorie matic měla zásadní vliv dvojice britských matematiků – Arthur Cayley (1821–1895) a James Joseph Sylvester (1814–1897). Vedle své matematické dráhy zastávali oba jistou dobu funkci advokátů, kterou vykonávali dokonce na témže soudním dvoře v Londýně. Seznámili se roku 1850, přes odlišné temperamenty a víru se stali přáteli.

Roku 1841 zavedl Cayley v práci *On a theorem in the geometry of position* [Cy1] dnes používané značení determinantu dvěma svislými čarami umístěnými po stranách čtvercového schématu a uvedl rekurentní vyjádření determinantu pomocí rozvoje podle prvního sloupce. O dva roky později užíval také symbolu dvou dvojitých svislých čar na každé straně schématu, kterým dnes značíme matici. Ve větě o násobení determinantů násobil řádky jedné matice s řádky druhé matice. O další dva roky později násobil matice „po sloupcích“. Roku 1855 publikoval práci *Remarques sur la notation des fonctions algébriques* [Cy2], v níž naopak používal značení z roku 1841 (tj. jednoduché svislé čáry) k označení matice, zavedl termín *matrix*, matice využil k vyjádření lineární závislosti dvou skupin veličin, k reprezentaci lineárních forem a k jejich skládání. Matice přitom násobil tak, jak je násobíme dnes. Poukázal na význam tohoto pojmu, psal již o *teorii matic* a vyjádřil své stanovisko, že by měla předcházet teorii determinantů.

... Il faut faire attention, dans la composition des matrices, de combier les lignes de la matrice à gauche avec les colonnes de la matrice à droide; pour former les lignes de la matrice composée. Il y aurait bien des choses à dire sur cette théorie de matrices, laquelle doit, il me semble, précéder la théorie de Déterminants. ([CyP], díl II., str. 187)

Pojem (obdélníkové) matice a termín *matrix* byl zaveden Sylvesterem roku 1850 v článku *Additions to the articles "On a new class of theorems", and "On Pascal's theorem"* [Sy2].[5] Hlavním tématem této práce byly subdeterminanty

[5] V roce 1997 publikoval Richard William Farebrother článek *A. C. Aitken and the consolidation of matrix theory* [Fh1], ve kterém se zmínil o původu slova „matrix“:

In the sixteenth and seventeenth centuries the word matrix was used to refer to the uterus or womb of a female creature. This usage is most familiar from Tyndale's translation of the Bible into the English language and in the subsequent edition authorized by King James I; for example, see the Book of Exodus, Chapter 13, verse 15 and Chapter 34, verse 19.

In the eighteenth century this usage was extended to geology, pottery, and foundry work. In a jejich nulovost, resp. nenulovost. K pojmu hodnosti, která byla později právě pomocí nulovosti subdeterminantů definována, však Sylvester nedospěl.

For this purpose we must commence, not with a square, but with an oblong arrangement of terms consisting, suppose, of m lines and n columns. This will not in itself represent a determinant, but is, as it were, a Matrix out of which we may form various systems of determinants by fixing upon a number p, and selecting at will p lines and p columns, the squares corresponding to which may be termed determinants of the pth order. ([SyP], díl I., str. 150)

James Joseph Sylvester zapsal determinant pomocí čtvercového schématu již v roce 1840. Tehdy však ještě nepoužil žádných symbolů pro ohraničení tohoto seskupení koeficientů. Rovněž v jeho pozdějších pracích byla terminologie i symbolika ještě značně rozkolísaná. Například determinant značil jak způsobem, který použil Cayley v roce 1841, tak dvouřádkovým schématem evokujícím značení Vandermondeovo. V roce 1853 publikoval jako součást článku *On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure* [Sy6] slovníček pojmů, v němž matici definoval jako čtvercové či obdélníkové uspořádání prvků do řádků a sloupců. Z následujícího citátu (i z předchozí ukázky) je vidět, že výchozím pojmem byla pro britského matematika matice a že determinant byl tvořen až z dané matice. Zmíněný přístup byl v té době zcela ojedinělý.

Matrix. – A square or rectangular arrangement of terms in lines and columns.

Minor Determinant. – Any determinant retained represented by a square group of terms arbitrarily chosen out of a matrix is a minor determinant thereto. The simple terms of the matrix are the last minors, and of course if the matrix is a square, it will itself in its totality represent a single complete determinant. ([SyP], díl I., str. 583, 585)

V předchozích odstavcích jsme uvedli poměrně podrobně vývoj maticové symboliky, představili jsme různé způsoby násobení matic (používané dokonce týmž autorem) a obeznámili čtenáře s postupným ustalováním pojmu a termínu matice. Dokumentovali jsme tím pomalé utváření základních prostředků sloužících teorii matic. V počátcích byl její vývoj výrazně ovlivňován teorií determinantů, jejíž pozice byla velmi pevná. Většina matematiků, kteří se v té

---

geology the word matrix refers to the mass of rock in which a fossil or gemstone is embedded, and in pottery and foundrywork it refers to the mold in which the utensil is to be cast.

The modern mathematical use of the word was introduced by Sylvester in 1850 … ([Fh1], str. 4).

James Joseph Sylvester, autor spisu *The Laws of Verse*, se i v odborných matematických textech často vyjadřoval pomocí neobvyklých, poetických přirovnání. V jednom z nich, v článku *On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions* [Sy3], použil v souvislosti s pojmem matice, resp. přímo při odvolávání se na vlastní první definici matice také slovo „womb":

I have in previous papers defined a „Matrix" as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent; … ([Sy3], str. 247) době zabývali tématikou dnes řazenou k lineární algebře, soustředila totiž svůj zájem právě na teorii determinantů.

Nadvládu determinantů lze doložit například nejednotným násobením matic, neboť z hlediska teorie determinantů je ve větě o násobení determinantů (vzhledem k rovnosti determinantů navzájem transponovaných matic) zcela lhostejné, zda násobíme matice „po řádcích“, „po sloupcích“, nebo mezi sebou násobíme řádky jedné matice se sloupci matice druhé. Problém nejednotného násobení matic se táhne jako Ariadnina nit mnoha matematickými monografiemi, učebnicemi a články až do dvacátých let 20. století. Některé texty obsahující dnes již nepoužívané způsoby násobení matic byly publikovány ještě ve třicátých letech.

Postupné přijímání maticové řeči a symboliky začalo ve větší míře až na přelomu 19. a 20. století.

1.5 Vznik teorie matic

Vznik teorie matic je obvykle datován rokem 1858, kdy byl v časopisu Philosophical Transactions of the Royal Society of London publikován článek Arthura Cayleyho *A memoir on the theory of matrices* [Cy3].

Jako podnět pro zavedení pojmu matice označil A. Cayley zkrácený zápis soustavy lineárních rovnic. Hned v úvodu práce napsal, že pod pojmem matice bude uvažovat, nebude-li blíže určeno, čtvercové schéma nějakých prvků. Matice vnímal jako samostatné objekty, značil je novým způsobem: první řádek ohraničil kulatými závorkami, na něž navazují svislé rovné čáry podél zbývajících řádků.

The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, e. g.

$$\left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)$$

is said to be a matrix. The notation of such a matrix arises naturally from an abbreviated notation for a set of linear equations, viz. the equations

$$\begin{array}{rcl} X & = & ax + by + cz, \\ Y & = & a'x + b'y + c'z, \\ Z & = & a''x + b''y + c''z, \end{array}$$

may be more simply represented by

$$(X, Y, Z) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)\!\!\left(\begin{array}{ccc} x, & y, & z \end{array}\right),$$

and the consideration of such a system of equations leads to most of the fundamental notions in the theory of matrices. It will be seen that matrices (attending

only to those of the same order) comport themselves as single quantities; they can be added, multiplied or compounded together, ...
([Cy3], str. 17, nebo [CyP], díl II., str. 475–476)

Takřka celý text je věnován čtvercovým maticím, obdélníkové (dělené na *široké* a *hluboké*) jsou zmíněny až na posledních třech stránkách. Autor se navíc často omezoval na matice druhého a třetího řádu a stejné restrikce použil i v důkazech.

... The theory of rectangular matrices appears much less important than that of square matrices, and I have not entered into it further than by showing how some of the notions applicable to these may be extended to rectangular matrices.
... the matrices written down at full length will in general be of the order 3, but it is to be understood that the definitions, reasonings, and conclusions apply to matrices of any degree whatever.
([Cy3], str. 18, nebo [CyP], díl II., str. 476)

V práci jsou zavedeny základní maticové operace a ukázány jejich vlastnosti (sčítání motivované sčítáním lineárních substitucí, násobení matice skalárem, distributivní zákon násobení skalárem vzhledem ke sčítání, násobení matic motivované skládáním lineárních substitucí – jednalo se tedy o násobení matic dle dnešních zvyklostí). Představeny jsou nulová a jednotková matice, uvedeno tvrzení o existenci netriviálních dělitelů nuly v okruhu čtvercových matic daného řádu, definována mocnina matice, a to včetně nulového a záporného exponentu (inverzní matice, existuje-li, je vyjádřena pomocí determinantu a reciproké matice), popsány některé další speciální typy matic (symetrická, antisymetrická), zavedena transponovaná matice, studovány jsou jejich vlastnosti a hledány komutující matice a rovněž matice L, M, pro které platí $LM = -ML$ (tzv. *skew convertible*).

Cayley dále uvažoval takové *skew convertible* matice L, M druhého řádu, pro které je $L^2 = -1, M^2 = -1$ (kde 1 značí jednotkovou matici), a dále matici $N = LM = -ML$. Potom je

$$N^2 = -1, \quad L = MN = -NM, \quad M = NL = -LN.$$

Cayley poznamenal, že tak získal těleso kvaternionů.

Zvolíme-li vhodně matice L, M (čímž je dána i matice N) vyhovující daným vztahům

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

lze každému kvaternionu $a + bi + cj + dk$ přiřadit lineární kombinaci

$$aE + bL + cM + dN,$$

kde E je jednotková matice. Dostaneme tak matici

$$L = \begin{pmatrix} a + d\,\mathrm{i} & b + c\,\mathrm{i} \\ -b + c\,\mathrm{i} & a - d\,\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Popsané zobrazení je izomorfismus mezi tělesem kvaternionů a tělesem komplexních matic druhého řádu výše uvedeného tvaru.

Nejvýznamnějším přínosem Cayleyho článku byla formulace tvrzení, že každá matice je kořenem svého charakteristického polynomu. Dnes je známo pod názvem Cayleyova-Hamiltonova věta, Arthur Cayley ji nazýval *general theorem*, resp. *remarkable theorem*, zapsal ji ve velmi zajímavém tvaru

$$Det.(\widetilde{1} \cdot M - \widetilde{M} \cdot 1) = 0,$$

v němž bychom na první pohled zmíněnou větu těžko identifikovali. Vztah se však objasní, uvážíme-li, že Cayley značil jednotkovou matici 1 a v uvedené rovnici je již za λ dosazena matice M (vlnka označuje veličinu chápanou jako skalár). Větu autor dokázal pouze pro matice druhého řádu a poznamenal, že necítí potřebu větu dokazovat v obecném případě. Použití věty demonstroval na několika příkladech. Například k dané matici M druhého řádu hledal matice M^2 a M^3 nebo matici L, pro kterou platí $L^2 = M$.

Uveďme však, že význam tohoto jedenadvacetistránkového článku je často přeceňován. Ve skutečnosti neměl pro rozvoj teorie matic tak velký vliv; k označení právě této práce za počátek teorie matic zřejmě přispěl jak její název, v němž je použito slovní spojení *theory of matrices*, tak její propagace Sylvesterem, který byl v té době uznávanou autoritou. V článku *Lectures on the principles of universal algebra* [Sy15] z roku 1884 například napsal:

This step was, as far as I know, first made by Cayley in his memoir on Matrices, in the Phil. Trans. 1858, wherein he may be said to have laid the foundation-stone of the science of multiple quantity. That memoir indeed (it seems to me) may with truth be affirmed to have ushered in the reign of Algebra the 2nd; ... ([Sy15], str. 209)

Analýza názorů matematiků a historiků matematiky na otázku zakladatele teorie matic je přehledně zpracována v monografii Jindřicha Bečváře *Z historie lineární algebry* [Be6]. Význam Cayleyho memoáru je diskutován např. v článcích Thomase Hawkinse *The theory of matrices in the 19th century* [Hw2], *Cauchy and the spectral theory of matrices* [Hw3], *Another look at Cayley and the theory of matrices* [Hw4] a *Weierstrass and the theory of matrices* [Hw5]. Znovu zdůrazněme, že velkým přínosem Cayleyho článku bylo zveřejnění Cayleyovy-Hamiltonovy věty.

Problematika Cayleyovy-Hamiltonovy věty poutala pozornost i jiných matematiků. Již roku 1853 bylo v knize *Lectures on Quaternions* [Ha1] publikováno analogické tvrzení pro kvaterniony. Autorem této monografie je irský matematik, fyzik a astronom William Rowan Hamilton[6] (1805–1865), který tento fakt znal již roku 1846. Právě tato skutečnost dala matematickému výsledku současné jméno. Důkaz věty podalo více matematiků, poměrně často se však jedná

[6] William Rowan Hamilton je objevitelem kvaternionů. Jejich studiu věnoval značnou část života, publikoval o nich řadu prací. Za všechny jmenujme alespoň dvě rozsáhlé monografie: již zmíněnou *Lectures on Quaternions* a *Elements of Quaternions* [Ha2] publikovanou roku 1866. Pro zajímavost uveďme, že zásadní vztah pro násobení jednotek $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ vyjádřený rovností $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$ napadl W. R. Hamiltona při procházce v Dublinu – ihned jej nožem vyryl do kamene mostu Brougham Bridge.

o důkazy, které nejsou z dnešního pohledu zcela korektní; připomeňme alespoň jména Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886, důkaz roku 1867) či Georg Ferdinand Frobenius (1849–1917, 1878). Důkaz anglického matematika Arthura Buchheima (1859–1888), který vyšel v krátkém příspěvku roku 1883/1884 v časopisu Messenger of Mathematics, se v mírně pozměněné verzi objevuje dodnes v učebnicích lineární algebry. Jisté je, že roku 1884 důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty znali[7] čeští matematikové Ludvík Kraus (1857–1885) a Eduard Weyr (1852–1903). V témže roce byl v časopisu Nature otištěn Sylvesterův příspěvek, v němž se o tvrzení píše jako o Cayleyově-Hamiltonově větě.

V závěru této podkapitoly popišme, do jaké atmosféry se teorie matic zrodila a čím byly její první kroky ovlivněny. Zdůrazněme znovu překvapivou skutečnost, že vznik teorie determinantů předchází zrodu teorii matic o více než jedno století. Morris Kline (1908–1992) v publikaci *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* [Kl1] v roce 1972 napsal:

One could say that the subject of matrices was well developed before it was created. Determinants, ..., were studied from the middle of the eighteenth century onward. A determinant contains an array of numbers and usually one is concerned with the value of that array, given by the definition of the determinant. However, it was apparent from the immense amount of work on determinants that the array itself could be studied and manipulated for many purposes whether or not the value of the determinant came into question. It remained then to recognize that the array as such should be given an identity independent of the determinant. The array itself is called a matrix.

... the idea of a matrix precedes that of a determinant but historically the order was the reverse and this is why the basic properties of matrices were already clear by the time that matrices were introduced. ([Kl1], str. 804–805)

I po vzniku teorie matic však většina matematiků vyjadřovala své výsledky z oblastí, které bychom dnes jednoznačně řadili k této teorii, v řeči bilineárních a kvadratických forem, neboť právě jim a teorii determinantů byla stále věnována značná pozornost. Teorie matic byla do jisté míry přijata britskými a americkými matematiky, na evropském kontinentu se jí však matematikové příliš nevěnovali. Nejvýraznější výjimkou byl český matematik Eduard Weyr.[8]

Druhá polovina 19. století je rovněž epochou, ve které se mnoho matematiků usilovně zabývalo otázkami rozšiřování číselných oborů. Studium této problematiky dávalo cenné podněty k rozvoji teorie hyperkomplexních čísel, z níž se ve 20. století zrodila teorie algeber. Matematikové se dále soustředili na vektorový počet, permutace, substituce a transformace, uvědomovali si, že aritmetické operace a jejich vlastnosti mohou být abstrahovány od číselných oborů do mnohem obecnějších sfér. V tomto období se vytvářela řada nových pojmů: *grupa*, *okruh*, *obor integrity*, *těleso* či *vektorový prostor*. Rodila se moderní strukturální algebra.

---

[7] Viz 2. kapitola.

[8] Bližší informace o komplikovaném prolínání zmíněných teorií nalezne čtenář v závěru této kapitoly, Weyrovy výsledky pak ve dvou kapitolách následujících.

1.6 Teorie matic v období 1858–1900

Mnohé maticové úvahy druhé poloviny 19. století se kromě snah o důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty stočily k otázce bloků matic, jejich determinantů, tj. subdeterminantů, a k otázce hodnosti (resp. nulity) matice.

Roku 1858 publikoval Arthur Cayley vedle slavného memoáru o maticích také práci *A memoir on the automorphic linear transformation of a bipartite quadric function* [Cy4], v níž vyjádřil bilineární formu pomocí matice a studoval její přeměnu určenou jistou lineární transformací. S využitím dnešní terminologie bychom tento problém popsali takto: je-li A matice bilineární formy na prostoru V vzhledem ke dvojici bází G, G' a matice B, resp. C jsou matice přechodu od báze G k bázi H, resp. od báze G' k bázi H', potom matice $B^T AC$ je maticí uvažované formy vzhledem k bázím H a H'.

V pátém svazku *English Cyclopaedia* z roku 1860 vysvětlil Cayley ve svém příspěvku *Mathematics, recent terminology in* [Cy6] několik pojmů a termínů, např. *matice*, *determinant*, *rezultant*, *invariant*, *kovariant*, *lineární transformace* či *grupa*. Po roce 1860 se však maticím věnoval spíše sporadicky. Z jeho publikovaných výsledků zmiňme alespoň tvrzení, že n-tá mocnina matice druhého řádu se dá zapsat jako lineární kombinace uvažované matice a jednotkové matice, z více specializovaných oblastí studia připomeňme problematiku reálných symetrických matic s dvojnásobným nulovým vlastním číslem.

Některé výsledky z teorie matic publikoval i anglický matematik, spisovatel a fotograf Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898), který je známý spíše pod pseudonymem Lewis Carroll jako autor knih *Alenka v říši divů* a *Alenka za zrcadlem.* V díle *Elementary treatise on determinants with their application to simultaneous linear equations and algebraical geometry* [Do1] z roku 1867 definoval *blok matice* a pro čtvercové bloky jejich *minor* (tj. subdeterminant).

If mn quantities be so placed as to form m rows and n columns: they are said to form a Block; and the mn quantities are called the Elements of such a Block. ...

... If, in a given Block, any rows, and as many columns, be selected: the square Block formed of their common Elements is called a Minor of the given Block. ([Do1], str. 6–7)

Zajímavá byla Dodgsonova symbolika, neboť k zápisu prvků determinantu používal dvojice indexů oddělených zpětným lomítkem (např. $1\backslash 2$) a matice ohraničoval z obou stran svorkami, a také skutečnost, že k vyjádření základních vlastností determinantů využíval bloky matic.

Francouzský matematik Edmond Nicolas Laguerre, kterého jsme již zmínili v souvislosti s důkazem Cayleyovy-Hamiltonovy věty, nazýval matice *lineární systémy* a zapisoval je bez jakýchkoli závorek. V práci *Sur le calcul des systèmes linéaires* [Lr1] z roku 1867 definoval sčítání a násobení matic, skalární, transponované, reciproké, symetrické a antisymetrické matice a zformuloval některé jejich vlastnosti. Zmíněné násobení zavedl již dnešním způsobem.

Multiplication. – Soient deux systèmes de même ordre A et B: si on les compose suivant la règle ordinaire, on obtiendra un troisième système que je *définirai comme étant le produit de A par B; si l'on désigne ce système par C, le mode relation ainsi défini sera exprimé par la relation*

$$C = AB.$$

Ainsi, si l'on prend

$$A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \qquad et \qquad B = \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix},$$

on obtiendra

$$C = \begin{matrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{matrix}.$$

L'ordre dans lequel on effectue une multiplication n'est pas, comme on le sait, indifférent, et il faudra toujours bien distinguer l'ordre dans lequel on doit prendre les facteurs. ([LrO], díl I., str. 222)

Později zapisoval maticově i transformaci rovnice plochy třetího stupně.

Roku 1882 vyšel (posmrtně) pětistránkový článek *A fragment on matrices* [Cl1] anglického matematika Williama Kingdona Clifforda (1845–1879), v němž lze při troše dobré vůle nalézt první jiskřičku k budování pojmu hodnost matice. V této stati jsou formulace signalizující pochopení různé „míry singularity“ matice. Clifford rozdělil singulární matice třetího řádu na matice *indeterminate in the first degree* (v dnešní řeči matice s hodností dva) a matice *indeterminate in the second degree* (matice s hodností jedna). Zmíněná klasifikace je provedena na základě nulovosti a nenulovosti subdeterminantů.

... An indeterminate matrix (or more definitely, a matrix indeterminate in the first degree) is a matrix the determinant of which vanishes, but for which the first minors do not all of them vanish ... A matrix indeterminate in the second degree is a matrix for which all the first minors vanish, or what is the same thing, one for which the second and third rows are mere multiples of the first row. ([ClP], str. 337)

Německý matematik Georg Ferdinand Frobenius, žák Kummera, Kroneckera a Weierstrasse, dlouho odmítal vyjadřovat své myšlenky z teorie matic v její řeči. Až do roku 1896 preferoval formulaci výsledků v řeči bilineárních a kvadratických forem či determinantů. Takto se zachoval také v roce 1879, kdy v článcích *Über homogene totale Differentialgleichungen* [Fr3] a *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* [Fr4] zavedl pojem hodnost. V prvním textu definoval *hodnost determinantu*, v druhém pak *hodnost obdélníkového schématu*. Jedná se (z dnešního pohledu) o definici hodnosti čtvercové, resp. obdélníkové matice.

Wenn in einer Determinante alle Unterdeterminanten $(m+1)$*ten Grades verschwinden, die mten Grades aber nicht sämmtlich Null sind, so nenne ich m den Rang der Determinante.* ([FrA], díl I., str. 435)

Gegeben sei ein endliches System $\mathbb{A}$ *von Grössen* $a_{\alpha\beta}$ $(\alpha = 1, \dots m;$ $\beta = 1, \dots n)$*, die nach Zeilen und Colonnen geordnet sind. Wenn in demselben* *alle Determinanten $(l+1)$ten Grades verschwinden, die lten Grades aber nicht sämmtlich Null sind, so heisst l den Rang des Systems.* ([FrA], díl I., str. 484)

Pro čtvercové matice lze pojem hodnosti nahradit pojmem *nulita.* Jedná se o rozdíl řádu matice a její hodnosti.

Definici nulity publikoval roku 1882 James Joseph Sylvester v krátké dvoustránkové práci *On the properties of a split matrix* [Sy9]. Zveřejnil dále odhad nulity součinu matic: je větší nebo rovna nulitě každé z matic a menší nebo rovna jejich součtu.

... the nullity of a matrix of the order ω being regarded as unity, when its determinant simply is zero, as 2 when each first minor simply is zero, as 3 when each second minor is zero ... as $(\omega - 1)$ when each quadratic minor is zero and as ω (or absolute) when every elements is zero. ... If any number of matrices of the same order be multiplied together, the nullity of their product is not less than the nullity of any single factor and not greater than the sum of the nullities of all the several factors. ([SyP], díl III., str. 646)

Problematice nulity se věnoval i v dalších letech;[9] uvedené nerovnosti jsou někdy nazývány Sylvesterovy vzorce.

Práce zabývající se hodností, resp. nulitou matic publikoval rovněž německý matematik Leopold Kronecker (1823–1891) a také Eduard Weyr.[10]

Pojem hodnost matice máme dnes neodmyslitelně spjat s otázkou řešitelnosti soustavy lineárních rovnic, resp. s tzv. *Frobeniovou větou.* Z následujících řádků bude evidentní, že přívlastek Frobeniova není zcela adekvátní. Věta je nazývána též Kroneckerova, Kroneckerova-Capelliova apod.

Studium soustav lineárních rovnic bylo „zpomaleno“ Cramerovým pravidlem, které svou oblíbeností a rozšířením způsobilo odklon od zkoumání obecné nehomogenní soustavy rovnic se singulární, resp. obdélníkovou maticí. Pro složitější soustavy však bylo Cramerovo pravidlo zdlouhavé, v některých případech dokonce těžko použitelné. Efektivnější metodu řešení představil Gauss roku 1810 v práci *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis* [Ga2], v níž při výpočtu dráhy planetky Pallas sestavil soustavu dvanácti rovnic o šesti neznámých, provedl eliminaci neznámých a získal ekvivalentní soustavu „v trojúhelníkovém tvaru“. Dnes tento algoritmus nazýváme *Gaussovou eliminační metodou.* Ob-

[9] Například v práci *On involutants and other allied species of invariants to matrix systems* [Sy11] z roku 1884 definoval nulitu mnohem čitelněji než při jejím zavedení o dva roky dříve:

... the nullity is said to be i when every minor of the order $(\omega - i + 1)$ and consequently of each superior order, is zero. ([SyP], díl IV., str. 133)

V téže práci znovu uvedl také zmíněný odhad (*the law of nullity*), o kterém se vyjádřil takto:

The law of nullity which I am about to enunciate is one of paramount importance in the theory of matrices.

The law is that the nullity of the product of two (and therefore of any number of) matrices cannot be less than the nullity of any factor nor greater than the sum of the nullities of the several factors which make up the product. ([SyP], díl IV., str. 133–134)

Problematiku nulity matice studoval Sylvester i ve svém článku *Sur l'équation en matrices* $px = xq$ [Sy13] z roku 1884.

[10] Bližší informace o Weyrových úvahách z této oblasti nalezne čtenář v 2. kapitole.

dobný postup pro soustavu s regulární maticí však byl znám již ve staré Číně dva tisíce let před Gaussem, jak bylo výše uvedeno.

Již jsme viděli, že pojem hodnosti byl zaveden až koncem sedmdesátých let 19. století, a to pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů. I nutnou a postačující podmínku řešitelnosti dané soustavy lineárních rovnic se někteří matematikové snažili vyjádřit pomocí těchto vlastností. Například ve slavné monografii německého matematika Heinricha Richarda Baltzera (1818–1887) z roku 1857 nazvané *Theorie und Anwendung der Determinanten* [Bz1] je pro homogenní soustavu se čtvercovou maticí řádu n uvedeno, že má-li matice soustavy nenulový subdeterminant řádu k a všechny subdeterminanty vyšších řádu jsou rovny nule, pak má řešení soustavy dimenzi $n - k$.

Irský matematik Henry John Stanley Smith (1826–1883) definoval roku 1861 v práci *On systems of linear indeterminate equations and congruences* [Sm2] pro soustavu lineárních rovnic pojmy *matice soustavy* (*unaugmented array*) a *rozšířená matice soustavy* (*augmented array*).

Charles Lutwidge Dodgson v již zmíněné knize *Elementary treatise on determinants with their application to simultaneous linear equations and algebraical geometry* z roku 1867 označil tytéž pojmy pro soustavu n rovnic o m neznámých termíny *V-Block*, resp. *B-Block*, subdeterminanty těchto matic nejvyššího možného řádu *principal Minors*. Matici, v níž jsou všechny *principal Minors* rovny nule, nazval *evanescent*. Pomocí těchto pojmů pak ve třetí kapitole přehledně zformuloval a dokázal devatenáct tvrzení o řešitelnosti a tvaru množiny všech řešení jednotlivých typů soustav. Ve čtvrté, třístránkové kapitole nazvané *Tests for consistency of equations* pak uvedl shrnutí předcházející kapitoly. Nutnou a postačující podmínku pro řešitelnost nehomogenní soustavy lineárních rovnic zapsal ve tvaru:

> *If there be given n Equations, not all homogenous, containing Variables: a test for their being consistent is that either, first, there is one of them such that, when it is taken along with each of the remaining Equations successively, each pair of Equations, so formed, has its B-Block evanescent; or, secondly there are m of them, where m is one of the number 2.....n, which contain at least m Variables, and have their V-Block not evanescent, and are such that, when they are taken along with each of the remaining Equations successively, each set of Equations, so formed, has its B-Block evanescent.* ([Do1], str. 61)

Dodgson se tak stal zřejmě nejvýraznější osobností pracující na otázce řešitelnosti soustav lineárních rovnic a věta Frobeniova by měla nést spíše jeho jméno. O stručnosti a srozumitelnosti jeho vyjádření však nelze hovořit.

Obdobný přístup k otázce řešitelnosti soustav lineárních rovnic použili mnozí další (Eugene Rouché (1832–1910), Georges Fontené (1848–1923) atd.). Výslednou větu formulovali rozsáhle pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů matice a rozšířené matice soustavy. Řeč determinantů přetrvávala v této problematice i v osmdesátých a devadesátých letech 19. století. Vyskytly se však i maticové úpravy ve stylu Gaussova eliminačního algoritmu. Vyjádření hodnosti matice pomocí nezávislosti řádků (sloupců) se stalo více méně záležitostí až 20. století.[11]

Největší posun ve způsobu vyjádření nutné a postačující podmínky řešitelnosti soustav lineárních rovnic bez aparátu teorie determinantů lze najít v pracích dvou italských matematiků. Alfredo Capelli (1855–1910) a Giovanni Garbieri (1847–1931) již využili v učebnici *Corso di analisi algebrica, I. Teorie introduttorie* [CG1] z roku 1886 relativně nový pojem hodnost. Ve své knize například prezentovali transformaci soustavy n lineárních rovnic o n neznámých s hodností k na ekvivalentní soustavu k rovnic o n neznámých „trojúhelníkového tvaru". V jejich textu lze nalézt náznak spojitosti mezi lineární závislostí řádků matice a řešitelností soustav lineárních rovnic. I jejich další (již samostatně psané) práce z přelomu osmdesátých a devadesátých let představují krůčky ke změně způsobu vyjadřování.

Moderní formulace podmínky řešitelnosti soustavy lineárních rovnic se vyskytla v Capelliově učebnici pro studenty neapolské univerzity nazvané *Lezioni di algebra complementare, date nell'anno accademico 1888–1889* [Cp1]. V roce 1892 na ni Capelli navázal článkem *Sopra la compatibilità o incompatibilità di più equazioni di primo grado fra più incognite* [Cp2], v němž je zmíněná podmínka zapsána stručně a jasně, a to pomocí hodnosti matice (*caratteristica della matrice*).

Dato un sistema qualunque di m equazioni di 1° *grado con n incognite*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & \alpha_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & \alpha_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & \alpha_m \end{array}$$

affinchè esso sia compatibile con valori finiti delle incognite è necessario e sufficiente che le due matrici

$$(A)\quad \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array} \qquad e \qquad (B)\quad \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \alpha_m \end{array}$$

abbiano la stessa caratteristica. ([Cp2], str. 55)

O množině všech řešení řešitelné soustavy, která má matici o hodnosti h, autor napsal:

... si potranno assegnare ad arbitrio i valori di $n - h$ *incognite (che però non si possono sempre scegliere a piacere) dopodichè i valori delle h rimanenti incognite resteranno perfettamente determinati.* ([Cp2], str. 55)

Jméno Leopolda Kroneckera se někdy v názvu nutné a postačující podmínky řešitelnosti soustavy lineárních rovnic vyskytuje vzhledem k jeho výsledkům souvisejícím se studiem bilineárních a kvadratických forem z šedesátých

[11] Jednou z výjimek je práce Eduarda Weyra *O theorii forem bilinearných* [We12] z roku 1889, která je rozebrána v 2. kapitole.

let a vzhledem k jeho berlínským přednáškám o soustavách lineárních rovnic především z osmdesátých let 19. století.

Georg Ferdinand Frobenius se teorií soustav lineárních rovnic rovněž zabýval. Jeho vyjádření řešitelnosti soustavy jsou však většinou (z dnešního pohledu) značně nesrozumitelná. Stručnou podmínku řešitelnosti vyjádřil, a to v maticové řeči, až začátkem 20. století, kdy již byli někteří matematikové v této problematice mnohem dále. Konkrétněji se problematice řešení soustav zabýval v pracích *Ueber das Pfaffsche problem* [Fr1] z roku 1875 a *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* [Fr4] z roku 1879. Tvrzení, které bylo později označeno jako Frobeniova věta, se v jeho práci objevilo až roku 1905, konkrétně v článku *Zur Theorie der linearen Gleichungen* [Fr9] v následujícím znění:

Ist nun r' der Rang der Matrix R
(17.) $a_{\alpha 0}, a_{\alpha 1}, \dots a_{\alpha n} \qquad \alpha = 1, 2, 3, \dots$
und r der Matrix B
(18.) $a_{\alpha 1}, \dots a_{\alpha n}$,
... Die Gleichungen (16.) haben also eine Lösung, wenn $r' = r$ ist, aber keine, wenn $r' = r + 1$ ist. ([FrA], díl III., str. 353)

Tuto partii věnovanou teorii matic v prvních desetiletích po jejím vzniku ukončeme přehledem některých názorů historika matematiky Thomase Hawkinse, které stručně a výstižně shrnují nejvýznamnější přínosy jednotlivých matematiků.

When one contemplates the history of matrix theory, the name that immediately comes to mind is that of Arthur Cayley. ... I will begin by indicating several reasons why Cayley's memoir of 1858 does not have the historical significance that the Cayley-as-Founder view suggests.

In the first place, Cayley's celebrated memoir went generally unnoticed, especially outside of England, until the 1880's. ...

Secondly, the ideas Cayley expressed in 1858 were not particularly original. The idea of representing a linear substitution (i.e., a linear transformation) by the square array of its defining coefficients is already found in Gauss's treatment of the arithmetical theory of quadratic forms as presented in his Disquisitiones arithmeticae of 1801. There we also find the idea of composing two linear substitutions to form a third and the idea of representing substitutions by single letters for convenience.

Futhermore Gauss's notational practices were carried one step further by Eisenstein in his efforts to develop further the general theory of forms envisioned by Gauss. Eisenstein observed that if linear substitutions (in any number of variables) are considered as entities and denoted by letters, then they can be added and multiplied much as ordinary numbers, except, as he stressed, the order of multiplication does matter: ...

... during the period when Cayley's 1858 memoir lay unread, two other mathematicians, Laguerre in France and Frobenius in Switzerland, further developed the consequences of the symbolical algebra of linear substitutions in a fashion similar to that taken by Cayley but without a knowledge of Cayley's

memoir. Laguerre's work ... suffered the same fate as Cayley's 1858 memoir. Frobenius' work ... was ... more substantial than those by Laguerre and Cayley, ...

There is another reason why the Cayley-as-Founder view of the history of matrix theory is misleading. By focusing, as it does, upon the form of the theory, i.e., the matrix symbolism, it tends to ignore its content: the concepts and theorems that make it a bona fide theory. ... ([Hw2], str. 561–563)

1.7 Kanonické tvary

Pro mnohé čtenáře je jistě překvapivé, že se pojmy *charakteristická rovnice*, *charakteristický* a *minimální polynom*, *vlastní čísla*, *vlastní vektory* či *kanonické tvary* vyskytovaly již delší dobu před vznikem teorie matic. Objevovaly se v řadě výsledků teorie binárních a ternárních kvadratických forem. Počátky této problematiky a její rozvoj jsou úzce spjaty s geometrií a nebeskou mechanikou.

Již francouzský matematik a filozof René Descartes (1596–1650) uvažoval o převádění rovnic kuželoseček a kvadrik na tzv. *kanonické tvary*, které neobsahují smíšené součiny neznámých. Z geometrického hlediska se jedná o otázku transformace kvadratické formy pomocí vhodné rotace v rovině (prostoru) tak, aby osy kuželosečky (kvadriky) byly rovnoběžné s osami souřadnicového systému. Proto je také věta o existenci ortogonální transformace někdy nazývána *větou o hlavních osách*. Termín hlavní osy (*principal axes*) zavedl v šedesátých letech 18. století Leonhard Euler, který se problematikou převedení binární a kvadratické formy na diagonální tvar pomocí změny souřadnicového systému rovněž intenzivně zabýval, např. již v práci *Introductio in analysin infinitorum* [Eu2] z roku 1748. Obdobné otázky studovali i Joseph Louis Lagrange, Carl Friedrich Gauss, Carl Gustav Jacob Jacobi a mnozí další.

Velmi důležitou roli hrála vlastní čísla při studiu pohybu nebeských těles. Základy nebeské mechaniky a další výzkum pohybu planet byly postaveny na zákonech německého matematika a astronoma Johanna Keplera (1571–1630) a na myšlenkách anglického všestranného vědce Isaaca Newtona (1643–1727). Během 18. století se při zpřesňování výpočtů pohybů planet již uvažoval nejen vliv gravitace Slunce, ale i ostatních těles sluneční soustavy. Jejich působení je přímo úměrné hmotnosti a nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti od uvažovaného tělesa a způsobuje odchylky od ideálních elips. Studium těchto dlouhodobých odchýlení bylo ve druhé polovině 18. století častým námětem pro práci matematiků a úzce souviselo s problematikou stability sluneční soustavy. Vzájemné vztahy kosmických těles byly zapisovány pomocí soustav lineárních diferenciálních rovnic s reálnými koeficienty, matice A těchto soustav byly symetrické a důležitou roli hrály jejich tzv. *charakteristické rovnice* tvaru $\det(A - \lambda E) = 0$, kde E je jednotková matice. V nebeské mechanice byla charakteristická rovnice nazývána *sekulární*, neboť se týkala dlouhodobých (staletých, sekulárních) poruch planetárních pohybů. Zkoumána byla sekulární rovnice takového stupně, který odpovídal počtu v té době známých planet.[12] Další pojmy spojené s touto

[12] V pořadí sedmá planeta Uran byla objevena roku 1781, osmá planeta Neptun roku 1846.

rovnicí (*charakteristický polynom*, *vlastní čísla* či *vlastní vektory*) byly rovněž studovány již v 18. století.

Mezi nejvýraznější matematiky publikující své výsledky z nebeské mechaniky patřil Joseph Louis Lagrange. Mnoho myšlenek o libracích Měsíce, satelitech Jupitera a pohybech planet sepsal roku 1788 v práci *Méchanique analitique* [Lg1]. Dospěl k závěru, že odchylky drah kosmických těles jsou periodické, a tedy i dlouhodobě ustálené a sluneční soustava nevyžaduje žádného (např. Božího) zásahu.

V podstatě stejné otázky řešil i Pierre Simon Laplace. Oba matematikové se také zabývali problémem reálnosti a násobnosti vlastních čísel reálné symetrické matice. Tvrzení o jejich reálnosti bylo formulováno opět zcela bez maticového přístupu, a to pouze na základě filozoficko-fyzikálního zdůvodnění, které bylo podepřeno jednak již zmíněnou absencí zásahu Boha a dále stabilitou sluneční soustavy. Komplexní vlastní čísla by signalizovala rozpad solárního systému. Laplaceovou pětidílnou monografií *Traité de Mécanique Céleste* [La1] z let 1799 až 1825 se svým způsobem uzavřela jistá epocha nebeské mechaniky, nastalo období, kdy panovalo přesvědčení, že ze znalosti současného stavu vesmíru lze usuzovat na jeho budoucí i minulé uspořádání (tzv. *mechanický determinismus*).

Tématu vlastních čísel a vlastních vektorů se intenzivně věnovali i Carl Gustav Jacob Jacobi a Augustin-Louis Cauchy. Cauchyho přístup však byl jiný, neboť využil svých znalostí z teorie determinantů, které se usilovně věnoval ve svém předchozím bádání. Roku 1829 se v práci *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes* [Ca3] snažil převést kvadratickou formu n proměnných

$$A_{xx}x^2 + A_{yy}y^2 + A_{zz}z^2 + \cdots + 2A_{xy}xy + 2A_{xz}xz + \ldots$$

na součet čtverců

$$s_1\xi^2 + s_2\eta^2 + s_3\zeta^2 + \ldots$$

Předpokládal transformaci, kterou dnes nazýváme ortogonální. Vyjádřil ji podmínkou

$$x^2 + y^2 + z^2 + \cdots = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \cdots = 1.$$

Dále zaznamenal schéma

$$\left\{\begin{array}{llll} A_{xx} - s, & A_{xy}, & A_{xz}, & \ldots \\ A_{xy}, & A_{yy} - s, & A_{yz}, & \ldots \\ A_{xz}, & A_{yz}, & A_{zz} - s, & \ldots \\ etc. \ \ldots & & & \end{array}\right.$$

a formuloval větu, že výše uvedené koeficienty $s_1, s_2, \ldots$ jsou kořeny charakteristické rovnice, kterou dostaneme, položíme-li (v dnešní řeči) determinant uvedené matice $A - sE$ roven nule. Cauchy pomocí determinantů také dokázal velmi důležité tvrzení, že v případě reálné symetrické matice jsou čísla $s_1, s_2, \ldots$

reálná a že k vyjádření obecné kvadratické formy součtem čtverců lze dospět právě pomocí ortogonální transformace.

Obecnější tvrzení o reálnosti vlastních čísel hermitovské matice dokázal roku 1855 francouzský matematik Charles Hermite (1822–1901) v práci *Remarque sur un théorème de M. Cauchy* [Hm1].

James Joseph Sylvester publikoval roku 1852 stať *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares* [Sy5], v níž vyjádřil zákon setrvačnosti kvadratických forem. Důkaz zákona, který je dnes pojmenován po svém autorovi, však jeho práce neobsahuje.

I may take this occasion to remark, that by whatever linear substitutions, orthogonal or otherwise, a given polynomial be reduced to the form $\sum A_1\zeta^2$, *the number of positive and negative coefficients is invariable: this is easily proved.* ([SyP], díl I., str. 380)

Německý matematik Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) zveřejnil roku 1858 článek o problému současného převedení dvou kvadratických forem na kanonický tvar. Deset let poté, tj. roku 1868, vystavěl v práci *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* [Ws2] svou slavnou teorii elementárních dělitelů,[13] v níž vedle zavedení pojmu elementární dělitel formuloval nutné a postačující podmínky pro podobnost matic, pro diagonalizovatelnost matice a v podstatě dospěl k tzv. *Jordanovu kanonickému tvaru.* Stejně jako v článku z roku 1858 zde řešil otázku převodu dvou kvadratických forem P, Q na součet čtverců, a to i v případě vícenásobných kořenů. Kanonické tvary svazku $pP + qQ$ hledal pouze v případě, kdy existují čísla p, q, pro která $\det(pP + qQ) \neq 0$.

Jak bylo na evropském kontinentě v té době zvykem, Weierstrass své výsledky nevyslovil v řeči matic, ale jazykem bilineárních a kvadratických forem.

Zmíněný převod svazku forem pro situaci, kdy $\det(pP + qQ) = 0$ pro každé p, q, popsal německý matematik Leopold Kronecker, který na Weierstrassovy výsledky často navazoval (a citoval je). Z jeho prací, které se společnou transformací dvou forem zabývají, jmenujme alespoň *Ueber bilineare Formen* [Kr1] z roku 1866, *Ueber Schaaren quadratischer Formen* [Kr2] z roku 1868 či *Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen* [Kr3] z roku 1874.

S kanonickými tvary matic je neodmyslitelně spjato jméno významného francouzského matematika Jordana. Nositel tohoto jména, Camille Marie Ennemond Jordan (1838–1922), publikoval roku 1870 rozsáhlou a významnou monografii *Traité des substitutions et des équations algébriques* [Jo1], v níž rozvíjel teorii grup a vyložil tzv. Galoisovu teorii. Zabýval se i lineárními substitucemi,

[13] Ideje této teorie lze nalézt již v pracích *On the intersection, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminante coordinates* [Sy1] z roku 1850 a *An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order* [Sy4] z roku 1851, které napsal James Joseph Sylvester, a ve stati *Report on the theory of numbers* [Sm1] z roku 1861, jejímž autorem je Henry John Stanley Smith.

zavedl kanonický tvar, jemuž odpovídá matice sestavená z buněk s vlastními čísly na diagonále. Při snaze o nalezení všech lineárních substitucí se stejným kanonickým tvarem dospěl k závěru, že takové dvě substituce A, B splňují vztah $B = P^{-1}AP$, kde P je vhodná substituce. Jeho myšlenky však nebyly vyjádřeny tak jasně jako ideje Weierstrassovy, které byly publikovány o dva roky dříve. Přesto se dnes užívají termíny *Jordanův kanonický tvar*, *Jordanova buňka* a *Jordanova matice.*

Další výraznou osobností zabývající se kanonickými tvary byl Georg Frobenius. Hlavním tématem jeho práce *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* [Fr2] z roku 1878 jsou charakteristická rovnice, minimální polynom, podobnost, elementární dělitelé a příbuzná problematika. Autor zde v souvislosti s bilineárními formami definoval několik pojmů, které jsou dnes zcela běžně používané pro matice.

Následující ukázka dokumentuje, jakým způsobem Frobenius zavedl a zapsal skládání dvou forem $A = \sum a_{ij}x_iy_j$ a $B = \sum b_{ij}x_iy_j$. Takto zavedená operace je analogií násobení matic $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$.

Sind A und B zwei bilineare Formen der Variabeln $x_1, \ldots x_n; y_1, \ldots y_n$, so ist auch

$$P = \sum_1^n \frac{\partial A}{\partial y_x}\frac{\partial B}{\partial x_x}$$

eine bilineare Form derselben Variabeln. Dieselbe nenne ich aus den Formen A und B (in dieser Reihenfolge) zusammengesetzt. Es werden im Folgenden nur solche Operationen mit bilinearen Formen vorgenommen, bei welchen sie bilineare Formen bleiben. Ich werde z. B. eine Form mit einer Constanten ... multipliciren, zwei Formen addiren, ... Ich werde aber nicht zwei Formen mit einander multipliciren. Aus disem Grunde kann kein Missverständniss entstehen, wenn ich die aus A und B zusammengesetzte Form P mit

$$AB = \sum \frac{\partial A}{\partial y_x}\frac{\partial B}{\partial x_x}$$

bezeichne, und sie das Product der Formen A und B, diese die Factoren von P nenne. ([Fr2], str. 2)

Frobenius zavedl obecný pojem ekvivalence na množině bilineárních forem a hledal vhodné reprezentanty jednotlivých tříd navzájem ekvivalentních forem. Dále se zabýval některými speciálními případy ekvivalence. Vyšel z rovnice $PAQ = B$ a diskutoval případy, kdy $P = Q$, $P = Q^T$ (kongruentní matice nazýval *cogrediente*), $P = Q^{-1}$(podobné matice nazýval *contragrediente*), $B = A$ (bilineární forma transformovaná v sebe samu), nebo situaci, kdy současně $B = A$ a $P = Q^T$. Definoval rovněž svazek forem $rA - B$, kde r je proměnný parametr, ekvivalenci dvou svazků $rA - B$ a $rC - D$ podmínil rovnostmi $PAQ = C, PBQ = D$. Dále uvedl, že formy A a B jsou kongruentní, resp. podobné právě tehdy, když jsou svazky $rA - A^T$ a $rB - B^T$, resp. $rE - A$ a $rE - B$ ekvivalentní. V práci se objevil rovněž rozklad bilineární formy na symetrickou a antisymetrickou část.

Transformacemi bilineárních forem se rovněž zabýval v již zmíněné práci *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* z roku 1879 a ve dvou dalších statích z roku 1894. I tyto práce psal ještě v řeči forem, své poznatky začal formulovat v maticové řeči až o dva roky později.

V oblasti kanonických tvarů publikoval světově uznávané výsledky (navíc již v řeči matic) Eduard Weyr. O jeho nápadité, moderně pojaté teorii charakteristických čísel, typických tvarů matic a o jeho souboru invariantů podobnosti matic, který se nazývá *Weyrova charakteristika*, pojednává 2. kapitola (výklad této teorie v řeči současné lineární algebry podává 3. kapitola).

1.8 Změna paradigmatu

Jak již bylo řečeno, první maticové operace prováděli počtáři ve staré Číně a poté následovala přibližně osmnáct století dlouhá etapa, v níž se pravoúhlá schémata prvků v matematice nevyskytovala. V 19. století se matice začaly objevovat v pracích několika málo matematiků, používaná symbolika a terminologie nebyla ustálená a jednotná, u některých autorů kolísala i v jednotlivých konkrétních pracích. Ani po vzniku teorie matic v roce 1858 nedošlo k jejímu rozkvětu, neboť Cayleyův memoár nebyl matematickou komunitou až na výjimky registrován a zrod teorie matic proběhl v době, v níž se algebraici věnovali především teorii determinantů a teorii bilineárních a kvadratických forem. Ačkoliv dnes při výuce matematiky zavádíme nejprve pojem matice a teprve poté pojem determinantu,[14] vývoj šel právě naopak. Zrod teorie determinantů předcházel vzniku teorie matic o více než jedno století. Studium determinantů bylo jednou z klíčových oblastí, které byly nápomocny vzniku teorie matic, a také oborem, s nímž se nově vznikající teorie úzce prolínala. Jistým způsobem však blízká spojitost obou disciplín zpozdila uznání maticového aparátu i přístupu.

Od osmdesátých let 19. století přibližně do třicátých let 20. století proběhl pozvolný přesun pozornosti od teorie determinantů a teorie bilineárních a kvadratických forem k teorii matic. Velmi zajímavě se tento proces promítl do způsobu vyjadřování a argumentace. Přerod se samozřejmě výrazně projevil v používané symbolice a terminologii. Je pozoruhodné, kolik vztahů, vlastností, pojmů a vět, které dnes jednoznačně přiřazujeme k maticím, bylo známo dříve, než matematický svět přijal zápisy pomocí obdélníkových nebo čtvercových schémat. Dlouho známé pojmy se postupně začaly nazývat jiným, dnes používaným maticovým termínem a započalo se na ně také z hlediska teorie matic nahlížet. Pokusme se nyní tuto změnu paradigmatu[15] blíže popsat. Velmi pomalé, dalo by se říci až opatrné přijímání teorie matic je zřetelné z uvedených ukázek, které by měly čtenářům umožnit vnímat nuance ve vyjadřování mate-

[14] Determinantem matice A budeme rozumět ...

[15] Slovo *paradigma* se začalo častěji používat po roce 1962, v němž vyšla kniha *The Structure of Scientific Revolutions* (University of Chicago Press) významného myslitele 2. poloviny 20. století Thomase Samuela Kuhna (1923–1996). Práce vyšla opakovaně (1970, 1996; český překlad (Tomáš Jeníček): *Struktura vědeckých revolucí*, OIKOYMENH, Praha, 1997). Citujme z encyklopedie možné vymezení slova *paradigma*: *komplex názorů a koncepcí určujících v určité historické etapě volbu vědecké problematiky a způsob jejího řešení.*

matických poznatků jazyky různých disciplín a které dokládají změny v myšlení, chápání a v interpretacích výsledků týkajících se maticové problematiky.

Do roku 1900 využívalo maticovou řeč jen několik málo matematiků, ve větší míře takřka pouze matematikové britští a američtí (James Joseph Sylvester, Arthur Cayley, Arthur Buchheim, Henry Taber (1860–1936), Andrew Russell Forsyth (1856–1942), Thomas Muir (1844–1934), ...). Patřil však k nim český matematik Eduard Weyr. Byl jedním z prvních matematiků, kteří se snažili o propojení teorie bilineárních a kvadratických forem s nově se utvářející teorií matic. Maticový přístup používal již v osmdesátých letech 19. století. Čtyřmi hlavními pilíři maticového přístupu byli tehdy Sylvester, Cayley, Buchheim a Weyr. Talentovaný Buchheim však v roce 1888 ve svých dvaceti devíti letech zemřel.

Mezi autory, v jejichž pracích se vyskytují matice již v osmdesátých letech 19. století, patří (kromě výše jmenovaných) japonský matematik A. Kumamoto a francouzský matematik Georges Édouard-Auguste Brunel (1856–1900). V devadesátých letech se k nim postupně přiřadili především C. H. Chapman, Th. B. van Wettum, L. van Elfrinkhof, W. H. Metzler, J. Brill, L. Ravut či J. B. Shaw.[16]

Pro přijetí daného aparátu má vždy velký vliv, zda jej používají uznávané osobnosti oboru. Jedna z největších postav teorie matic, Georg Ferdinand Frobenius, používal po dlouhou dobu řeč determinantů a forem. Teprve ve svém článku *Über vertauschbare Matrizen* [Fr8] z roku 1896 začal své výsledky vyjadřovat maticovou řečí a přijal maticový aparát. Na první straně zmíněné čtrnáctistránkové práce píše:

> *Ich werde mich daher hier der symbolischen Bezeichnung für die Zusammensetzung der Matrizen (Formen) bedienen, die ich in meiner (...) Arbeit Über lineare Substitutionen und bilineare Formen ... auseinandergesetzt habe.* ([Fr8], str. 601)

Nicméně i přes „maticový název" práce se v textu objevují pouze dvě čtvercová schémata a velmi často se mluví o formách (*vertauschbare Formen*). O Cayleyově-Hamiltonově větě je napsáno: *Dieser Fundamentalsatz der Formentheorie ist von Cayley gefunden ...*

Naskýtá se otázka, zda byl Frobenius před rokem 1896 obeznámen například s Cayleyovým *Memoárem* či s jinými texty využívajícími maticovou symboliku. Z citací v jeho článcích je zřejmé, že některé práce psané maticovou řečí znal. Například ve své slavné práci *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* z roku 1878 zmiňuje Cayleyovu práci *Remarques sur la notation des fonctions algébriques* (1855), v níž je matice jedním z klíčových pojmů definovaných hned v úvodu článku a zkrácený zápis soustavy lineárních rovnic s pomocí matice je napsán způsobem velmi blízkým tomu, který Arthur Cayley použil o tři roky později ve svém slavném článku *A memoir on the theory of matrices.* Dle mínění Thomase Hawkinse však přímo *Memoár* Frobeniovi znám nebyl. Svůj

[16] Počet a rozsah publikací jednotlivých autorů je zachycen v bibliografii uvedené v monografii *Lectures on Matrices* [Wd2], kterou vydal roku 1934 Joseph Henry Maclagen Wedderburn, matematik skotského původu.

názor Hawkins napsal roku 1974 v článku *The theory of matrices in the 19th century*,[17] obdobně se vyjádřil i roku 1977 v článku *Another look at Cayley and the theory of matrices*:

> *Unaware of the memoirs by Cayley and Laguerre, Georg Frobenius also investigated the symbolical algebra of matrices (qua bilinear forms) ...* ([Hw4], str. 96)

Pro ilustraci změny paradigmatu ve Frobeniově vyjadřování uveďme pět náhodně vybraných názvů jeho prací vydaných před rokem 1896 následovaných pěti jeho publikacemi z let pozdějších: *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten*, *Ueber die Elementarteiler der Determinanten* [Fr5], *Ueber die congredienten Transformationen der bilinearen Formen* [Fr6], *Zur Theorie der Scharen bilinearer Formen* [Fr7] – *Über Matrizen aus positiven Elementen* [Fr11], *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen* [Fr16], *Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen* [Fr13], *Über unitäre Matrizen* [Fr14] a *Über den Rang einer Matrix* [Fr15].

Po přelomu století začala být teorie matic a její symbolika stále více uznávána. Maticový aparát se postupem času konstituoval a začal být využíván stále širším okruhem matematiků, výsledky teorie bilineárních a kvadratických forem byly překládány do řeči matic (především problematika kanonických tvarů, vlastních čísel a vlastních vektorů), teorie matic pronikala do ostatních matematických disciplín i do ostatních vědních oborů.

Fyzika (konkrétněji kvantová mechanika) začala maticovou řeč používat až v polovině dvacátých let 20. století. Důležitým mezníkem bylo vydání práce *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen* [Hi1] (1925), jejímž autorem je německý fyzik Werner Karl Heisenberg (1901–1976). Do roku 1925 byly otázky kvantové mechaniky popsány řečí klasické fyziky, kinematiky a dynamiky. Heisenberg popsal pohyb částic pomocí pozorovatelných fyzikálních veličin, které vyjádřil soubory komplexních čísel závisejících na čase. Dále zavedl násobení těchto souborů, které odpovídá dnešnímu násobení matic.

Jeho matematický aparát zaujal několik dalších fyziků. Za pouhé dva měsíce po zveřejnění Heisenbergovy práce byla připravena k tisku společná práce německých autorů Maxe Borna (1882–1970) a Ernsta Pasquala Wilhelma Jordana (1902–1980) nazvaná *Zur Quantenmechanik* [BJ1]. V ní byl rozšířen Heisenbergův aparát a exaktně popsána maticová mechanika. O další dva měsíce později sepsali Born, Heisenberg a Jordan práci *Zur Quantenmechanik II* [BHJ1], v níž podrobně vyložili základy tehdejší kvantové mechaniky v řeči matic.

Na tyto práce reagoval rakouský fyzik Erwin Schrödinger (1887–1961), jenž roku 1926 publikoval vlnovou rovnici, která dnes nese jeho jméno, a zavedl druhou formu kvantové mechaniky – vlnovou mechaniku (ekvivalentní Heisenbergově maticové mechanice).

V následujících letech maticová řeč pronikala do dalších fyzikálních oborů (např. do atomové teorie) a stala se jazykem stále většího počtu fyziků (Fritz

[17] Viz citace na str. 30 této monografie.

Wolfgang London (1900–1954), Hermann Weyl (1885–1955), John von Neumann (1903–1957), Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) a další).

Změna paradigmatu je zjevná z literatury publikované v popisovaném období. Ve druhé polovině 19. století se v učebnicích, monografiích a encyklopediích s maticemi takřka nesetkáme. Samozřejmě existovaly výjimky, mezi něž patřila například učebnice italského matematika Ernesta Pascala (1865–1940) nazvaná *I determinanti. Teoria ed applicazioni con tutte le più recenti ricerche* [Pa1] (1897). Matice zde prostupují celým textem, ale jsou násobeny „po řádcích“, hodnost je stále definována pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů. Matice se vyskytují rovněž v učebnici *Vorlesungen über Algebra* [Ne1] z roku 1896, kterou sepsal německý matematik Eugen Otto Erwin Netto (1848–1919). V tomto textu se nachází zajímavá pasáž, v níž je definována hodnost matice a na následujících řádcích je definována hodnost kvadratické formy pomocí „hodnosti determinantu“.

Ist irgend eine Matrix vorgelegt, so sagen wir, dieselbe besitze den Rang r, wenn alle in ihr enthaltenen Determinanten der Ordnung $(r+1)$ *verschwinden, dagegen nicht alle der Ordnung r. Das giebt dann für unseren Fall, mit Hinblick auf das soeben Bewiesene: Die Determinanten C und D der ursprünglichen und der transformirten quadratischen Form haben denselben Rang.*

Hat die Determinante einer quadratischen Form den Rang r, so sagen wir, die Form selbst sei vom Range r. ([Ne1], díl I., str. 185)

Obecně lze říci, že do přelomu století se matice v literatuře vyskytovaly jen místy, a to nejčastěji v souvislosti s jinými pojmy (bilineární forma, lineární transformace, operátor, soustava lineárních rovnic, ...). V první polovině 20. století se situace výrazně změnila. Byly vydány monografie a učebnice již plně věnované teorii matic a psané jejím jazykem.

Cesta teorie matic za samostatností je dobře čitelná i z výskytu pojmu matice v encyklopediích. Ani v německé encyklopedii *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* [EMW1] z let 1898 až 1935 ani ve francouzské encyklopedii *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* [ESM] z let 1904 až 1916 se matice téměř nevyskytují. Stejně je tomu i ve dvou svazcích italského *Repertorio di matematiche superiori* [PaI] Ernesta Pascala z let 1898 a 1900. V druhém, podstatně rozšířeném německém vydání prvního svazku *Repertorium der höheren Mathematik. Algebra, Differential- und Integralrechnung* [PaN] z roku 1910 se již s maticemi setkáváme v celém textu. Objevují se zde v souvislosti s teorií bilineárních a kvadratických forem a jejich transformací, s problematikou kanonických tvarů, s ortogonálními substitucemi atd. Je zde i vztah mezi hodností matice a lineární závislostí řádků, resp. sloupců.

První učebnicí, v níž je maticím věnována velká pozornost, je *Introduction to higher algebra* [Bc1] z roku 1907, kterou napsal americký matematik Maxime Bôcher (1867–1918). Úspěch tohoto učebního textu dokládá množství reprintů (z let 1922, 1924, 1933, ..., 1964, 2004) i překlady do němčiny a ruštiny. Pozastavme se nyní u této publikace, která o změně paradigmatu v teorii matic mnohé vypovídá. V druhé kapitole se vyskytuje pasáž, z níž je zjevné, že pojem determinantu byl považován za obecně známý, zatímco pojem matice bylo nutné definovat.

We assume that the reader is familiar with the determinant notation, and will merely recall to him that by a determinant of the nth order

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|$$

we undestand a certain homogeneous polynomial of the nth degree in the n^2 *elements* a_{ij}. *By the side of these determinants it is often desirable to consider the system of the* n^2 *elements arranged in the order in which they stand in the determinant, but not combined into a polynomial. Such a square array of* n^2 *elements we speak of as a matrix. In fact, we will lay down the following somewhat more general definition of this term:*

DEFINITION 1. *A system of mn quantities arranged in a rectangular array of m rows and n columns is called a matrix. If* $m = n$, *we say that we have a square matrix of order n.* ([Bc1], str. 20–21)

Bôcher dále zdůraznil rozdíl mezi (čtvercovou) maticí a determinantem a poté zavedl pojmy *determinant matice* a *matice determinantu.*

Even when a matrix is square, it must be carefully noticed that it is not a determinant. In fact, a matrix is not a quantity at all, but a system of quantities.
This difference between a square matrix and a determinant is clearly brought out if we consider the effect of interchanging columns and rows. This interchange has no effect on a determinant, but gives us a wholly new matrix. ...
Although, as we have pointed out, square matrices and determinants are wholly different things, every determinant determines a square matrix, the matrix of the determinant, and conversely every square matrix determines a determinant, the determinant of the matrix. ([Bc1], str. 21)

Slovo „matice“ se v názvu knihy poprvé objevilo u rozsáhlé třídílné monografie *Matrices and determinoids* [Cu1], kterou sepsal Cuthbert Edmund Cullis (1875?–1954). V tomto díle, jehož jednotlivé svazky vyšly v letech 1913, 1918, 1925, je obsažena celá tehdejší teorie matic a determinantů. Cullisovo rozsáhlé dílo však nemělo velký ohlas, jeho terminologie je poměrně složitá a činila tak práci nepříliš čtivou. Celá teorie je budována obecně pro obdélníkové matice a s nimi spojené *determinoidy.* V díle tak nacházíme například definici inverzní či reciproké matice pro obdélníkovou matici.

Roku 1926 byla vytištěna učebnice *Einführung in die Axiomatik der Algebra* [Bk1] Rudolfa Hanse Heinricha Becka (1876–1942), která dává maticím mnohem větší prostor než determinantům; kapitoly o maticích již předcházejí kapitole o determinantech. Hodnost matice zde není zavedena pomocí determinantů, ale na základě lineární závislosti a nezávislosti.

Je těžko uvěřitelné, že téhož roku, tj. v roce 1926, publikoval italský matematik Salvatore Pincherle (1853–1936) 3. vydání učebnice *Lezioni di algebra complementare* [Pl1], ve kterém jsou zavedeny ještě čtyři druhy násobení matic. Jedno z nich, *moltiplicazione per linee*, je zavedeno takto:

Siano date due matrici rettangolari, di ugual numero m di linee ed n di colonne:

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{llll} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}, \end{array}\right.$$

e si formi la matrice quadrata degli m^2 elementi:

$$C_{rs} = a_{r1}b_{s1} + a_{r2}b_{s2} + \cdots + a_{rn}b_{sn}$$
$$(r, s = 1, 2, \dots m).$$

([Pl1], část II., str. 72)

Dalším potvrzením skutečnosti, že někteří matematikové maticovou řeč nepřijali ani více než šedesát let po vzniku teorie matic (tj. v době, kdy již někteří autoři matice používali i v dalších disciplínách, a to dokonce aniž by je speciálně definovali) je dvoudílná kniha *Algebra I. Die Grundlagen, Algebra II. Theorie der algebraischen Gleichungen* [Pr2] z roku 1927 německého matematika Oskara Perrona (1880–1975). V druhém vydání prvního dílu z roku 1932 je hodnost matice stále definována takto:

Wenn daher nicht alle Gleichungskoeffizienten $a_{\lambda x}$ gleich 0 sind, so daß zum mindesten die einreihigen Determinanten nicht alle verschwinden, so gibt es eine eindeutig bestimmte positive ganze Zahl n derart, daß die Matrix (...) mindestens eine n-reihige nicht verschwindende Determinante enthält, aber keine $(n+1)$-reihige nicht verschwindende Determinante. Diese Zahl n, die offenbar $\leq k$ und $\leq l$ ist, heißt der Rang der Matrix (...) oder auch der Rang des Gleichungssystems (...). Falls alle Gleichungskoeffizienten $a_{\lambda x}$ verschwinden, setzt man den Rang n gleich 0.
([Pr2], I. díl, str. 102, 2. vydání v nezměněném znění: str. 99–100)

Násobení matic je provedeno „po řádcích“ a jeho výsledkem je „determinant“.

Die Produktformel (10) läßt sich wesentlich verallgemeinern. Dazu betrachten wir die beiden Matrizes[18]

$$(17) \quad A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kl} \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kl} \end{array} \right\|$$

[18] V druhém vydání je do této věty vloženo výslovné upozornění na násobení řádků řádky: *Die Produktformel, bei der Zeilen mit Zeilen kombiniert sind, läßt sich wesentlich verallgemeinern.* ([Pr2], I. díl, 2. vydání, str. 113–114)

Zbývající text je v 2. vydání až na drobné úpravy (změny v označení indexů) shodný s verzí z 1. vydání.

mit k Zeilen und l Spalten; die 2kl Elemente $a_{x\lambda}, b_{x\lambda}$ seien zunächst wieder unabhängige Variable. Wird dann analog zu (2)

$$(18) \qquad a_{\lambda 1}b_{\nu 1} + a_{\lambda 2}b_{\nu 2} + \cdots + a_{\lambda l}b_{\nu l} = c_{\lambda\nu} \qquad (\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, k)$$

gesetzt, so heißt die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ c_{k1} & \ldots & c_{kk} \end{vmatrix}$$

das symbolische Produkt der beiden Matrizes A und B.
([Pr2], I. díl, str. 115)

Významný přelom v přijímání maticového aparátu nastal i v teorii soustav lineárních rovnic. Otto Schreier (1901–1929) a Emanuel Sperner (1905–1980) definovali v učebnici *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra* [SS1] z roku 1931 hodnost matice bez pomoci determinantů jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců. Nutnou a postačující podmínku řešitelnosti soustavy lineárních rovnic vyjádřili pomocí zachování maximálního počtu nezávislých sloupců i po přidání sloupce pravých stran, tj. zachování hodnosti matice.

... Die Gleichungen (1) sind dann und nur dann in den x_i lösbar, wenn die Maximalzahl linear unabhängiger unter den Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gleich ist der Maximalzahl linear unabhängiger unter den Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$.

... Man nennt die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer Matrix auch den Rang der Matrix. ... ([SS1], díl I., str. 38)

Na odlišnost pojmů determinant a matice upozorňuje (stejně jako Bôcher) ještě roku 1953 Herbert Pupke v knize *Einführung in die Matrizenrechnung und ihre physikalischen Anwendungen* [Pu1]:

Der Begriff der Matrix unterscheidet sich wesentlich von dem der Determinante: die Determinante ist eine skalare Größe; die Matrix ist dagegen als zusammengesetzte Größe, als komplexe Größe höherer Ordnung oder als System aufzufassen. Im Gegensatz zu der Erklärung der Determinante enthält die Matrix keine Rechenvorschrift, die die Elemente miteinander verknüpft. Ein anderer Unterschied gegenüber der Determinante liegt darin, daß bei einer Matrix $n \neq m$ sein kann. ([Pu1], str. 2)

Postupem času byla teorie matic stále více uznávána, matice pronikaly i do jiných oborů, v řadě publikací byla upevňována maticová terminologie a symbolika. Dá se říci, že po prvních třech desetiletích 20. století se teorie matic osamostatnila, byly vydány úspěšné monografie a učebnice. Z těch nejstarších a nejvýznamnějších jmenujme alespoň tyto:

- Herbert Westren Turnbull (1885–1961): *The Theory of Determinants, Matrices and Invariants* [Tu1], 1928,
- H. W. Turnbull a Alexander Craig Aitken (1895–1967): *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices* [TA1],[19] 1932,

[19] Walter Ledermann, doktorand Turnbulla, roku 1968 v práci *A. C. Aitken's work in pure*

- Cyrus Colton MacDuffee (1895–1961): *The Theory of Matrices* [Mc1], 1933,
- Joseph Henry Maclagen Wedderburn (1882–1948): *Lectures on Matrices* [Wd2], 1934.

Posledně jmenovaný titul, učebnice *Lectures on Matrices*, obsahuje rozsáhlou bibliografii teorie matic. První vydání uvádí celkem 549 prací od roku 1853 do roku 1933.[20] Cenná bibliografická data rovněž obsahuje již zmíněná kniha *The Theory of Matrices*.[21]

Jednou z prvních knih se slovem „matice“ v názvu je také knížka českého matematika Bohumila Bydžovského (1880–1969) *Základy teorie determinantů a matic a jich užití* [By1] z roku 1930. Je sice věnována spíše determinantům, ale matice se v ní již poměrně detailně prezentují. Podrobněji se o ní dočteme ve 4. kapitole.

Na závěr kapitoly citujme požadavek, který koncem dvacátých let 20. století údajně vznesl německý matematik Erhard Schmidt (1876–1959) na svého učitele, významného německého matematika Davida Hilberta (1862–1943). Z úryvku je zřetelné, že právě v té době někteří matematikové maticový aparát nejen přijali, ale uvědomili si i jeho výhody oproti jiným přístupům a maticovou terminologii začali propagovat:[22]

„Nein! Nein! Sagen sie nicht Operator, sagen sie Matrix!“

Během popsaného období, tj. od počátku 19. století do třicátých let 20. století, se tak zvolna utvářela nová matematická disciplína, jejíž řeč nebyla dlouhou dobu širší světovou matematickou komunitou akceptována. Musela být překonána jakási obava z přijetí nových pojmů, jiné terminologie a symboliky a teprve po překonání těchto nesnází byl pro další bádání vybudován nový, „maticový svět“. Dnes tvoří teorie matic zcela samostatnou a významnou matematickou disciplínu.

---

mathematics [Ld1] poznamenal:

With his flair for elegant formalism Aitken was quick to realize the usefulness of matrix algebra as a powerful tool in many branches of mathematics. At a time when matrix techniques were not yet widely known he applied matrix algebra with striking success to certain statistical problems.

His interest in matrices was shared by H. W. Turnbull. Their joint book Canonical Matrices soon became a standard work on the subject ... ([Ld1], str. 164)

[20] V seznamu je uvedeno sedm prací, jejichž autorem je Eduard Weyr. Zaznamenána je rovněž jedna práce Karla Petra (1868–1950), a to včetně jejích překladů z češtiny do maďarštiny a němčiny. Více informací viz 4. a 6. kapitola.

[21] I v ní nalézáme jméno Eduarda Weyra, MacDuffee se totiž mimo jiné zabýval i tzv. *Weyrovou charakteristikou*. Více informací viz 6. kapitola.

[22] Citát je převzat z doslovu (str. 287), který napsal Albrecht Pietsch (nar. 1934) k jedenáctému svazku řady *Teubner-Archiv zur Mathematik*, jejímž hlavním cílem bylo představení významných prací německých matematiků. Uvažovaný svazek vyšel v roce 1989 pod názvem *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*. Obsahuje dvě významné práce Hilberta a Schmidta. Albrecht Pietsch, jenž svazek uspořádal, převzal citát z práce Michaela Bernkopfa *A history of infinite matrices* [Bf1], str. 346.

Doslov do češtiny přeložil a opatřil úvodem Alois Kufner (nar. 1934) – viz Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 39(1994), str. 65–94.