Ukažte, že říci, že z A logicky nutně vyplývá B (B je logický důsledek A) je totéž, jak říci, že výpověď $A \rightarrow B$ je jednotkou (příslušné Booleovy algebry výpovědí, je tautologickou výpovědí).

5. Říci, že A dává nutnou podmínku pro B značí $B \subseteq A$. Říci, že A dává nutnou a postačující podmínku pro B značí: $A = B$.

a) Odůvodněte následující, v matematice často užívaný postup důkazu nutnosti a postačitelnosti podmínky A pro B:

Existuje n výpovědí $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tak, že $A = C_1$, $B = C_j$ (j pevné $1 < j < n$) z C_i plyne C_{i+1} pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$ a z C_n plyne C_1 (t. zv. závěr pomocí implikačního kruhu).

b) Odůvodněte, že dokázat, že z A plyne B, je totéž, jako dokázat, že z $\sim B$ plyne $\sim A$.

c) Odůvodněte t. zv. nepřímý důkazový postup: dokázat, že z A plyne B, je totéž jako dokázat, že z předpokladu $\sim B \,\&\, A$ plyne kontradiktorická (sporná) výpověď.

2,9. MODULÁRNÍ SVAZY. MODULÁRNÍ A KOMPLEMENTÁRNÍ SVAZY. PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE JAKO SVAZ. SPOJITĚ DIMENSIONÁLNÍ PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE.

Jako v 1. části knížky (jednající o grupách) nám zbývá i zde k víceméně systematickým výkladům o základních pojmech a některých druzích svazů, jež tvoří hlavní obsah této druhé části, připojit nakonec zběžný pohled na některé další otázky a výsledky theorie svazů a jejich aplikací, na něž se tu nedostalo a ani nemohlo dostat. To je však úloha těžší, než v případě grup, jednak proto, že theorie svazů je (v daleko větší míře než dnes již vykrystalisovaná a dlouhým vývojem prošlá theorie grup) dosud ve stadiu počátečního rozvoje, v němž není ještě zcela jasno, jak půjde další vývoj a co z nedávných objevů si podrží trvalou cenu v matematice i v aplikacích. Za druhé je potíž v tom, že do hloubky jdoucí aplikace theorie svazů v ostatní matematice, o nichž by bylo záhodno zde informovat, vyžadují dosti značných znalostí a rozhledu v současné matematice, po př. matematické logice.

Tak zejména v abstraktní algebře představuje aplikace theorie svazů formulaci jádra některých velmi obecných algebraických principů. Bez znalosti současné abstraktní algebry je tedy těžko o tom něco říci.

Proto omezíme náš pohled na další výsledky a pojmy z theorie svazů opravdu jen na několik málo ukázek, jež se dají alespoň naznačit bez dalších nároků na čtenářovy matematické vědomosti. Řekli jsme si již, ze základní axiomy theorie svazů 1′ až 5″ představují, jak se zdá, ještě příliš širokou a neucelenou základnu pro rozvíjení hlubší theorie. Základní axiomy je proto třeba ještě doplnit dalšími axiomy. To doplnění, které jsme provedli nejprve, totiž připojení obou axiomů distributivity, nás vedlo k t. zv. distributivním svazům. Byly to právě ty svazy, kde se svazové spojování a protínání dalo (v isomorfní representaci) vystihnout množinovým spojováním a množinovým protínáním (ve vhodném svazu množin čili v t. zv. množinovém okruhu). Připojení dalšího axiomu 7 (axiomu doplňku) jsme pak dostali t. zv. Booleovy algebry.

V mnoha často se vyskytujících typech svazů nejen, že není ani řeči o doplňku (ve smyslu axiomu 7), nýbrž i na místě obou axiomů distributivity je splněn jen jistý slabší, sám k sobě duální axiom, t. zv. axiom modularity, čili též axiom Dedekindův (nazvaný tak podle svého objevitele).

Ten zní takto:

Jsou-li a a c dva prvky svazu, splňující vztah $a \subseteq c$ (a jinak jsou libovolné), *pak pro libovolný prvek b platí rovnost*

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c.$$

Smysl Dedekindova axiomu spočívá v jisté dosti abstraktně vyslovené podmínce „geometrické“ pravidelnosti, jakou tento axiom ukládá svazovému částečnému uspořádání t. zv. modulárního svazu, ve kterém je splněn. Ukazuje se však, že Dedekindův axiom je logicky rovnocenný s dosti názorným požadavkem, aby se ve svazu nevyskytly nikdy tři různé prvky a, b, c tak, že by platilo $b \cap c \subset a \subset c \subset b \cup a$ (ve smyslu geometr. znázornění svazového částečného uspořádání — bychom měli 5 bodů $a, b, c, a \cup b, b \cap c$) uspořádaných do pětiúhelníka jako na obr. 19, V). (Především se čtenář sám snadno přesvědčí, že by existence zmíněných tří prvků měla za následek $a = a \cup (b \cap c) \neq (a \cup b) \cap c = c$; čili: když platí axiom modularity, je výskyt zmíněných tří prvků jistě vyloučen. Obrácená souvislost, že totiž když je výskyt takových tří „nepravidelných" prvků vyloučen, pak že platí Dedekindův axiom, dá se rovněž snadno dokázat.

Rčením, že Dedekindův axiom je slabší, než každý z axiomů distributivity má být řečeno to, že z axiomu distributivity (jednoho nebo druhého) plyne axiom modularity (každý distributivní svaz je modulární), že však lze nalézt svazy, které nejsou distributivní a jsou nicméně modulární. První fakt je ihned vidět, neboť podle axiomu distributivity — třebas prvého 6′ (s druhým by se jen začalo s levé strany rovnosti v axiomu modularity místo s pravé) je vždy $(a \cup b) \cap c = (a \cup c) \cap (b \cup c)$. Následkem předpokladu $a \subseteq c$ je však $a \cap c = a$. Druhý fakt nahlédneme za pomoci obr. 19, IV podávajícího graf nejprostšího svazu, který je modulární — jak se čtenář sám snadným ověřením platnosti Dedekindova axiomu sám přesvědčí — ale není distributivní (což si čtenář rovněž snadno dokáže sám jako užitečné cvičení).

Modulární svazy se vyskytují dosti často v abstraktní algebře, jakožto *svazy podsystémů, obsažených v daném algebraickém systému.* Tak na př. všechny *normální podgrupy* libovolné dané grupy tvoří modulární (ale obecně nikoli distributivní) svaz, rozumíme-li spojení a průnik ve smyslu věty 9, (části 1.) (Avšak také samotné vhodné podsvazy daného svazu opět mohou tvořit modulární svaz.)

Za jistých předpokladů, o nichž se zde nelze šířit, se podgrupy v jistých komutativních (Abelových) grupách (kteréžto podgrupy jsou ovšem, jak víme, vždy normální) stávají tak zvanými *moduly.* Dedekindův axiom a jím objevený druh svazů má své druhé jméno podle toho, že jej Dedekind objevil ve svazu modulů. Ve všech těchto modulárních svazech moderní abstraktní algebry, prvky jsou jisté význačné podsystémy, obsažené v daném algebraickém systému (jako na př. normální podgrupy jsou takovými význačnými „podsystémy" v grupách, jestliže grupy považujeme za (poměrně prosté) algebraické systémy). Svazové polouspořádání je mezi „podsystémy" zde opět množinová inkluse, t. j. vztah „podsystém x je obsažen v podsystému y" (celého systému). Značí, že každý prvek patřící do x patří i do y. Je třeba však zdůraznit, že svazové spojování nikterak již není vždy množinovým sjednocováním, t. j. pouhým shrnováním prvků z daných dvou podsystémů do jednoho, protože takové pouhé shrnutí nepředstavuje už obecně podsystém daného systému.

Theorie svazů — a především modulárních svazů — představuje tedy nástroj, který pomáhá orientovat se ve výstavbě složitých algebraických systémů z jejich jednodušších význačných podsystémů — a v tom je její význam pro moderní algebraické theorie. Protože tedy aplikace theorie (modulárních) svazů na rozbor stavby složitých algebraických systémů nás poučuje o *struktuře* těchto systémů, proto bylo dáno svazům též jméno struktury. (Názvu struktura se užívá v ruštině, polštině a francouzštině.)

V tomto smyslu je dalekosáhlý zejména vztah mezi theorií modulárních svazů a theorií grup. Pro modulární svazy platí totiž tvrzení, která jsou vlastně svazovým vyjádřením (poněkud zeslabených) základních vět Jordan-Hölderovy a Remak-Schmidtovy a jiných vět o grupách (viz 1,8).

Zvláště dobře uzavřený a důležitý systém dodatkových axiomů (jimiž je třeba doplnit základní axiomy svazu) je kombinace Dedekindova *modulárního axiomu a axiomu 7 o doplňku*. Svazy, splňující kromě základních axiomů ještě axiom modularity a axiom doplňku jsou t. zv. modulární komplementární svazy. (Připomeňme hned, že zeslabením axiomů distributivity v axiom modularity přestává platit zásada, že k danému prvku je nutně třeba jen jednoho doplňku, jako je tomu v distributivních komplementárních svazech, t. j. v Booleových algebrách, viz str. 150.) Příklad takového svazu už známe z obr. 19, IV.

V abstraktní algebře se vyskytují takové modulární komplementární svazy, jakožto svazy význačných podsystémů algebraického systému. Tak na př. grupa, která se dá rozložit v direktní součin (viz str. 96 v 1,8) takových normálních svých podgrup, které jsou jednoduché (t. j. samy již nemají žádnou vlastní normální podgrupu), vytváří modulární komplementární svaz všech normálních podgrup.

Komplementární modulární svazy jsou však důležité především jako ten druh již zmíněných (viz str. 124 a str. 128) svazů, jež zahrnují svazy dané *geometrickým protínáním a spojováním*, prováděným na přímkách, bodech, rovinách (a ve vícerozměrné geometrii na dalších vícerozměrných zobecněných přímek rovin). Tyto svazy ukazují v nejčistší formě zákonitosti geometrického protínání a spojování, jaké jsou studovány v projektivní geometrii.

Objasněme si alespoň v hrubých rysech, jakým způsobem je v rámci theorie modulárních komplementárních svazů axiomaticky založena t. zv. projektivní geometrie roviny.

V projektivní geometrii *roviny* (pojaté axiomaticky) nedefinujeme přímo, co je to bod a co je to přímka, nýbrž charakterisujeme tyto dva druhy pro nás základních geometrických útvarů jejich základními vlastnostmi a vzájemnými vztahy, t. zv. geometrickými axiomy (které samotné konec konců abstrahujeme z praxe, z názoru). Při tom se tyto základní vztahy opírají v projektivní geometrii především o neomezenou možnost *protínat* (přímky) a *spojovat* (body). (Projektivní geometrie nezná ani pojmu vzdálenosti bodů ani pojmu rovnoběžnosti přímek. Každé dvě přímky se mohou protnout.)

A tu se při axiomatickém zakládání projektivní geometrie ukazuje, že za projektivně geometrické axiomy lze prostě *považovat axiomy modulárního komplementárního svazu, doplněné* ještě o jeden jediný charakteristický axiom (jehož znění si uvedeme níže).

Je při tom ovšem třeba, jak již naznačeno, rozšířit pojem protínání dvou různých přímek a pojem spojování dvou různých bodů tak, aby pro jakékoli dva geometrické základní útvary byl bez jakýchkoli výhrad určen výsledek jejich spojení a jejich protnutí. Pak na př. axiomem 1′ můžeme zaručit geometrický axiom, že každé dva body lze spojit jedinou přímkou. Podobně axiom 1″ nám zaručuje, že každé dvě přímky se protnou v jediném bodě. Axiom 3′ říká, že spojit bod a s bodem b je totéž, jako spojit bod b s bodem a. Podobně lze geometricky vyložit smysl ostatních axiomů svazu, což přenecháváme čtenáři. K tomu je jen zapotřebí doplnit přímky a body na jedné straně celou rovinou (v níž naše přímky a body leží) a na druhé straně onou nám již povědomou prázdnou částí roviny. Tato poslední bude patrně výsledkem „protětí" dvou různých bodů nebo přímky s bodem na ni neležícím a představuje nulu svazu. Celou rovinu je pak nutno pokládat za výsledek spojení dvou různých přímek nebo přímky s bodem, který na ni neleží; je to jednotka svazu. Svazovým polouspořádáním je pak (jak již víme z 2,3) geometrický vztah „X leží na Y". Svazovým *doplňkem* je k danému bodu každá přímka, která jím neprochází a k dané přímce každý bod, který na ni neleží. Zde je tedy ke každému prvku (s výjimkou celé roviny a její prázdné části) dokonce nekonečně mnoho doplňků — na rozdíl od Booleovy algebry. (Doplňkem celé roviny je ovšem její prázdná část a doplňkem prázdné části je celá rovina; při tom svazovou jednotkou je celá rovina sama, svazovou nulou prázdná část roviny.)

A nyní: Projektivní geometrii charakterisující axiom, který je třeba ještě připojit k axiomům modulárního komplementárního svazu, je právě ten, který tak ostře odlišuje geometrické svazy projektivního spojování a protínání od Booleových algeber (které jsou ovšem také (zvláštními) modulárními komplementárními svazy). Axiom zní takto — v geometrické řeči:

Ke každým dvěma různým bodům existuje přímka, na níž neleží ani jeden z nich.

Tento axiom (který tvrdí vlastně přímo opak zásady o jednoznačnosti doplňku v Booleově algebře) můžeme ovšem vysloviti v názvosloví theorie svazů, když si vzpomeneme na pojem *atomu* (který odpovídá *geometrickému* pojmu *bodu*) z odst. 2,5. (Tohoto pojmu tam bylo sice použito v případě konečné Booleovy algebry, ale byl zaveden zcela obecně, pro každý svaz s nulovým prvkem.)

Pak charakteristický axiom projektivní geometrie roviny zní:

Každé dva atomy mají společný doplněk.

Takto tedy, zběžně a bez důkazů načrtnuta, vypadá elementární projektivní geometrie roviny s hlediska theorie svazů. Souvisí tedy pojem modulárního a komplementárního svazu — po příslušném ohraničení od Booleovy algebry ještě uvedeným specifickým axiomem o existenci společných doplňků — úzce s našimi základními vědomostmi o prostoru, resp. o rovině, takže i touto cestou se svazy objevují ve svém bezprostředím vztahu ke skutečnosti. Připomeňme ještě již jednou zmíněnou okolnost, že t. zv. *princip duality projektivní geometrie* je takto převeden *na princip duality theorie modulárních komplementárních svazů*, na něž se základní princip duality theorie svazů rozšiřuje, následkem duální stavby jak axiomu modularity (který je duální sám k sobě) tak i axiomu doplňku (o němž platí totéž). Složitější pojmy projektivní geometrie, jako je na př. kolineace, dostávají ve svazovém pojetí elegantní formu. Tak kolineace se jeví jako isomorfní zobrazení svazu na sebe sama (čili jako t. zv. automorfismus).

(Vztah kolineace mezi přímkami a body projektivní roviny na př. je dán, jak je některým čtenářům známo, osou kolineace, t. j. pevnou přímkou a dvěma středy kolineace (mimo tuto přímku), t. j. dvěma pevnými body. Kolineace sama pak je vzájemně jednoznačné přiřazení bodů k bodům a přímek k přímkám (jejich obrazům), jež se sestrojuje za této zásady: osa kolineace odpovídá bod po bodu sama sobě. Středy kolineace si odpovídají vzájemně. Sestrojit bodu odpovídající bod (jeho kolineární obraz) znamená: daný bod spojit s jedním i druhým středem kolineace a do obou průsečíků těchto spojnic s osou kolineace vést spojnice z druhého a prvního středu kolineace. Pak průsečík těchto posledních dvou přímek je kolineární obraz daného bodu. Obraz přímky je pak již dán jako spojnice obrazů dvou bodů na ní.)

A nakonec ještě zmínku o jednom zvrcholných výsledků theorie svazů projektivní geometrie. Je to Von Neumannův[40] objev *projektivní geometrie se spojitě proměnnou dimensí*.

---

[40] Von Neumann je vynikající současný matematik a matematický fysik maďarsko rakouského původu.

Je dosti nesnadno i jen zhruba naznačit bez dalšího matematického aparátu, oč jde. Nicméně, pokusme se o to alespoň docela hrubým způsobem asi takto:

V běžné projektivní geometrii — mějme na mysli třeba projektivní geometrii prostoru — jsou (v běžném smyslu základní) geometrické útvary rozděleny do kategorií podle svého *rozměru* čili *dimense*. Tak body jsou útvary „bezrozměrnými" čili dimense 0, přímky jsou útvary jednorozměrnými čili dimense 1, rovina je dvoudimensionální základní geometrický útvar (dimense 2), prostor (v běžném smyslu slova) je dimense 3, a tak i dále (jdeme-li ke geometriím vícerozměrným). Při tom se svazovým spojováním geometrických útvarů dimense obecně zvětšuje (nebo alespoň nezmenšuje) a svazovým protínáním se zmenšuje (nezvětšuje). (Mohli bychom dokonce přesně říci kdy a jak, ale to by nás vedlo zbytečně daleko.) Tak na př. spojení dvou různých základních útvarů dimense 0, t. j. bodů — dostáváme útvar dimense 1 — přímku, spojení útvaru dimense 1 — přímky s útvarem dimense 0, bodem, dá rovinu, t. j. útvar dimense 2 (ale útvar dimense 2, t. j. rovinu, můžeme dostat i spojením tří různých útvarů dimense 0, t. j. tří bodů, atp.).

Ve spojitě dimensionální geometrii máme především také „základní geometrické útvary", totiž prvky jistého modulárního a komplementárního svazu, právě tak jako jsou body, přímky, roviny prvky modulárního komplementárního svazu projektivní geometrie. A můžeme říci, že tyto prvky tohoto svazu jsou opravdu zobecněním základních útvarů projektivní geometrie, bodů, přímek, rovin — protože modulární komplementární svazy, definující pojem spojitě dimensionální geometrie, splňují jisté další požadavky, jež jsou *přenesením onoho dodatkového axiomu, jímž jsme svaz projektivní geometrie roviny odlišili od Booleových algeber*. Také tyto abstraktní „geometrické útvary" jsou rozděleny do kategorií podobně, jako se základní útvary projektivní geometrie řadí do kategorií podle své dimense.

Avšak číslo, které základním útvarům spojitě dimensionální geometrie (t. j. prvkům uvažovaného svazu) je zapotřebí přiřadit jako jejich „dimensi", *může probíhat nyní i všechny reálné hodnoty mezi nulou a jednou*. A také zde se spojením (protínáním) dvou „základních geometrických útvarů" zvyšuje (snižuje) anebo alespoň nesnižuje (nezvyšuje) jejich „dimense". Ale rozkládáním útvaru ve spojení dvou útvarů nižší dimense nikdy nedojdeme k nejjednodušším, dále již takto nerozložitelným útvarům — t. j. k bodům: To znamená, že spojitě dimensionální projektivní geometrie *nemá bodů*.

Zdálo by se, že konstrukce spojitě dimensionální projektivní geometrie je abstraktní matematická hříčka (ostatně by snad bylo možno pochybovat o vhodnosti názvu „geometrie", pro jistý nekonečný modulární komplementární svaz, jehož prvky si nelze dobře názorně představit ač tento svaz splňuje stejné podmínky, jež splňují i názorně geometrické svazy). Avšak ukazuje se, že spojitě dimensionální projektivní geometrie se objevuje v těch partiích moderní matematiky, jež mají použití v *kvantové mechanice*. Nehledě na to, jak nečekaným způsobem theorie svazů objevem spojitě dimensionální geometrie zasáhla do našeho názoru na abstraktní jádro projektivní geometrie vůbec, máme tu tedy nový doklad pro to, že i velmi abstraktní a zdánlivě se skutečností nijak nesouvisící matematické theorie vždy mají, třebas nečekaný a nejprve neznámý, reálný význam.

2,10. ZÁVĚR DRUHÉ ČÁSTI KNÍŽKY.

Nakonec je třeba, abychom zrekapitulovali postup výkladu při svazech právě tak, jako jsme to učinili při grupách.

Vyšli jsme od velmi obecného a v podstatě každému dobře povědomého pojmu částečného uspořádání. U tohoto ve velmi rozmanitých tvarech se vyskytujícího pojmu jsme