Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

VIII. Funkce inversní

In: Karel Hruša (author): Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 131–151.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403351

67. Vypočtěte integrály: a) $\int (ax + b)^3 \, dx$, $a \neq 0$,

b) $\int \frac{dx}{(a - x)^2}$, c) $\int \sin 2x \, dx$, d) $\int \cos(3x - 5) \, dx$,

e) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$, f) $\int \frac{dx}{\sin^2(4x + 1)}$, g) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$.

68. Vypočtěte integrály: a) $\int_0^1 (x^2 - 1) \, x \, dx$, b) $\int_0^1 \frac{dx}{(3x + 1)^2}$,

c) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x \, dx}{(\cos x + 1)^2}$, d) $\int_0^{\pi} \sin 3x \, dx$, e) $\int_{\frac{1}{8}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{dx}{1 - \cos 4x}$.

69. Výsledek cvič. 58 dokažte přímo methodou substituční.

70. Na základě toho, že $\operatorname{tg}^n x = \operatorname{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)$, dokažte, že v intervalech $(\frac{1}{2}(2k - 1)\,\pi, \frac{1}{2}(2k + 1)\,\pi)$ (k celé) platí pro $n \neq -1$

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{1}{n - 1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx.$$

VIII. FUNKCE INVERSNÍ

Již na str. 74 jsme zavedli pojem funkce rostoucí a klesající v intervalu. Tyto funkce nazýváme společným jménem funkce monotonní. Mají některé jednoduché vlastnosti a proto se jimi nyní budeme zabývat soustavněji, ačkoli jsme se s nimi již dříve několikrát při různých příležitostech setkali.

Víme na příklad, že pro n celé kladné z nerovností $0 \leq$

$\leqq x_1 < x_2$ plyne $x_1^n < x_2^n$ (věta 1); je tedy funkce $f(x) = x^n$ pro n celé kladné rostoucí v intervalu $\langle 0, \infty)$. Naproti tomu pro $x_1 < x_2 \leqq 0$ je $x_1^n < x_2^n$ jen při kladném a lichém n; při n kladném a sudém je tomu právě naopak. Proto funkce $f(x) = x^n$, kde n je kladné a liché, je rostoucí v celém intervalu $(-\infty, \infty)$ (pro $n = 3$ viz obr. 18), kdežto funkce $f(x) = x^n$ pro n kladné a sudé je klesající v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí v intervalu $\langle 0, \infty)$ (pro $n = 2$ viz obr. 17). Pro n celé záporné z nerovností $0 < x_1 < x_2$ plyne $x_1^n > x_2^n$ (věta 2), takže funkce $f(x) = x^n$ pro n celé záporné je klesající v intervalu $(0, \infty)$. Naproti tomu pro $x_1 < x_2 < 0$ je $x_1^n > x_2^n$ jen při n záporném a lichém, kdežto při záporném a sudém n je tomu právě naopak. Proto funkce $f(x) = x^n$, kde n je záporné a liché, je klesající také v intervalu $(-\infty, 0)$ (pro $n = -1$ viz obr. 19), kdežto funkce $f(x) = x^n$ pro n záporné a sudé je rostoucí v intervalu $(-\infty, 0)$ (pro $n = -2$ viz obr. 20).

Podobně je z obr. 23 vidět, že funkce $\sin x$ je rostoucí v každém intervalu $\langle \frac{1}{2}(4k - 1)\pi, \frac{1}{2}(4k + 1)\pi\rangle$, kde k je celé, a klesající v každém intervalu $\langle \frac{1}{2}(4k + 1)\pi, \frac{1}{2}(4k + 3)\pi\rangle$, kde k je celé. Funkce $\cos x$ je klesající v každém intervalu $\langle 2k\pi, (2k + 1)\pi\rangle$, a rostoucí v každém intervalu $\langle (2k - 1)\pi, 2k\pi\rangle$, kde k je opět celé.

Věta **43**. Je-li funkce f monotonní v intervalu J_x a je-li zároveň v tomto intervalu spojitá, existuje takový interval J_y, že

1. pro každé x z J_x hodnota $y = f(x)$ padne do J_y a
2. ke každému y z J_y existuje jediné x z J_x tak, že $y = f(x)$.

Důkaz. Je-li funkce f monotonní v intervalu J_x a je-li x_1 libovolný bod z J_x, nabývá funkce f hodnoty $f(x_1)$ právě jen v bodě x_1 a v žádném jiném. Kdyby totiž nabývala hodnoty $f(x_1)$ ještě v nějakém jiném bodě $x_2 \neq x_1$ z J_x, bylo by $f(x_1) = f(x_2)$; to ale není možné, neboť vzhledem k definici monotonní funkce pro $x_1 \neq x_2$ musí také $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dále dokážeme toto tvrzení: Je-li funkce f monotonní a nabývá-li v intervalu J_x největší nebo nejmenší hodnoty v bodě c, je bod c krajním bodem intervalu J_x. Kdyby totiž bod c nebyl krajním bodem intervalu J_x, existovala by v J_x čísla x_1 a x_2 tak, že $x_1 < c < x_2$. Pak by ale podle definice monotonní funkce bylo buď $f(x_1) < f(c) < f(x_2)$, nebo $f(x_1) > > f(c) > f(x_2)$, a hodnota $f(c)$ by nebyla největší ani nejmenší hodnota, jíž funkce f v J_x nabývá.

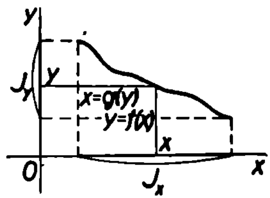
Nyní vezmeme v úvahu množinu F všech hodnot $f(x)$ příslušných ke všem bodům x z J_x. Jsou celkem čtyři možnosti:

a) Množina F je omezená. Pak má určité supremum M a určité infimum m. Je-li x libovolné číslo z J_x, pak $m \leqq \leqq f(x) \leqq M$. Je-li naopak y libovolné číslo takové, že $m < < y < M$, existují vzhledem k vlastnostem suprema a infima (str. 12) takové body a, b z J_x, že $f(a) < y < f(b)$, při čemž $f(a) \geqq m$, $f(b) \leqq M$. Je-li $a < b$, označme J'_x interval $\langle a, b\rangle$; je-li $a > b$, označme J'_x interval $\langle b, a\rangle$. To je uzavřený interval a funkce f je v něm spojitá, neboť je spojitá v celém intervalu J_x, a proto tím spíše v J'_x. Proto podle věty 21 existuje k číslu y takové x v J'_x, a tedy také v J_x, že $f(x) = y$. Toto x je podle toho, co bylo řečeno na počátku důkazu, jediné. Protože to platí pro každé y, které vyhovuje nerovnostem $m < y < M$, je intervalem J_y jeden z intervalů $\langle m, M\rangle$, $\langle m, M)$, $(m, M\rangle$, (m, M) podle toho, je-li funkce f definována v krajních bodech intervalu J_x, či není-li v některém z nich definována.

b) Neexistuje-li supremum množiny F, t. j. je-li možno ke každému číslu y najít takové b z J_x, že $f(b) > y$, a existuje-li naproti tomu infimum m množiny F, pak pro každé x z J_x platí $f(x) \geqq m$. Naopak ke každému číslu $y > m$ lze najít takové a z J_x, že $f(a) < y$. Označme J'_x interval $\langle a, b\rangle$, je-li $a < b$, nebo interval $\langle b, a\rangle$, je-li $a > b$. Poněvadž funkce f je spojitá v J_x, je tím spíše spojitá v J'_x, který je uzavřený; proto k číslu y existuje takové x z J'_x, a tedy také z J_x, že $f(x) = y$. Toto x je jediné. Protože to platí pro každé $y > m$, je intervalem J_y buď interval $\langle m, \infty)$, nebo interval (m, ∞), a to podle toho, je-li funkce f definována v levém krajním bodu intervalu J_x.

c) Neexistuje-li infimum množiny F a existuje-li supremum M této množiny, položme $g(x) = -f(x)$. Pak má množina G hodnot $g(x)$ infimum $-M$, ale nemá supremum; proto je podle odst. b) intervalem J_y pro funkci g buď interval $\langle -M, \infty)$, nebo interval $(-M, \infty)$. Je tedy intervalem J_y pro funkci f buď interval $(-\infty, M\rangle$, nebo interval $(-\infty, M)$.

d) Není-li množina F omezená, pak hodnota $f(x)$ pro každé x z J_x padne do intervalu $(-\infty, \infty)$. Naopak je-li y libovolné číslo, existují čísla a, b z J_x tak, že $f(a) < y < f(b)$. Znak J'_x bude mít týž význam jako v odst. a). Protože funkce f je spojitá v J_x, je tím spíše spojitá v J'_x, který je uzavřený; proto k číslu y existuje takové x z J'_x, a tedy také z J_x, že $f(x) = y$. Toto x je opět jediné. Protože to platí pro každé y, je intervalem J_y interval $(-\infty, \infty)$. Tím je věta dokázána.



Obr. 57

Větu 43 ilustruje obr. 57, který je proveden pro funkci klesající a spojitou v uzavřeném intervalu J_x. Pro každé x z J_x hodnota $f(x)$ padne do J_y a pro každé y z J_y možno najít jediné x z J_x tak, že $f(x) = y$.

Je-li funkce f monotonní a spojitá v intervalu J_x, pak každému x z J_x odpovídá určité a jediné y z J_y. To vyjadřuje vztah

$$y = f(x). \tag{a}$$

Podle věty 43 odpovídá také každému y z J_y určité a jediné x z J_x; můžeme tedy také hodnotu x považovat za funkci některého y z J_y. Označíme-li tuto funkci písmenem g, pak je

$$x = g(y), \tag{b}$$

při čemž se v rovnicích (a) i (b) vyskytují tytéž hodnoty x a y; obě rovnice tedy značí přesně totéž. Z rovnice (a) plyne rovnice (b) a také obráceně z rovnice (b) plyne rovnice (a).

Dosadíme-li za y podle (a) do (b), dostaneme

$$x = g[f(x)],$$

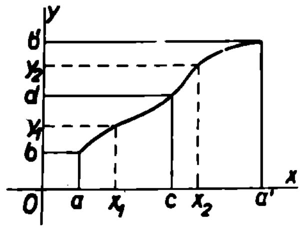
a dosadíme-li za x podle (b) do (a), vyjde

$$y = f[g(y)].$$

Funkce f a g, které mají popsanou vlastnost, nazýváme *navzájem inversními*; funkce g je inversní k funkci f a naopak funkce f je inversní k funkci g.

Věta **44**. Je-li funkce f $\begin{matrix}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\end{matrix}$ a zároveň spojitá v intervalu J_x, je funkce g, která je inversní k funkci f, rovněž $\begin{matrix}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\end{matrix}$ a zároveň spojitá v odpovídajícím intervalu J_y.

Důkaz provedeme nejprve pro případ, že funkce f je rostoucí v J_x.



Obr. 58

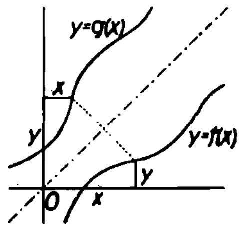
Jsou-li x_1, x_2 dvě libovolné hodnoty z J_x, které vyhovují nerovnosti $x_1 \geqq x_2$, je $f(x_1) \geqq f(x_2)$. Zvolme dvě hodnoty y_1, y_2 z J_y, pro něž platí $y_1 < y_2$ (obr. 58). K nim podle věty 43 existují dvě hodnoty x_1, x_2 z J_x tak, že $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, při čemž $f(x_1) < f(x_2)$. Pak ale musí také $x_1 < x_2$. Kdyby totiž $x_1 \geqq x_2$, muselo by být $f(x_1) \geqq f(x_2)$, ale to není. Protože $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$, proto z nerovnosti $y_1 < y_2$ plyne $g(y_1) < g(y_2)$. Tím je dokázáno, že funkce g je rostoucí v J_y.

Ještě je třeba dokázat, že g je spojitá v J_y. Je-li c vnitřním bodem intervalu J_x, nemůže být bod $f(c) = d$ krajním bodem intervalu J_y. Kdyby byl bod d krajním bodem intervalu J_y, musel by být bod c krajním bodem intervalu J_x, jak plyne z druhého odstavce důkazu věty 43. Je tedy bod d vnitřním bodem intervalu J_y. Předpokládáme, že funkce f je spojitá v bodě c, t. j. je-li (y_1, y_2), kde $y_1 < f(c) < y_2$, libovolné okolí bodu $f(c) = d$, pak k němu existuje takové okolí (x_1, x_2) bodu c, že ke každému x z (x_1, x_2) hodnota $f(x)$ padne do (y_1, y_2), při čemž $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$ (viz stále obr. 58). Pak ale také pro každé y z intervalu (y_1, y_2), pro něž platí $y_1 < < y < y_2$, je $g(y_1) < g(y) < g(y_2)$ čili $x_1 < g(y) < x_2$, t. j. hodnota $g(y)$ padne do okolí (x_1, x_2) bodu $c = g(d)$. Je tedy funkce g spojitá v bodě d.

Existuje-li krajní bod a intervalu J_x, je $f(a) = b$ rovněž krajním bodem intervalu J_y, neboť kdyby byl bod b vnitřním bodem intervalu J_y, byl by bod $a = g(b)$ podle předcházejícího rovněž vnitřním bodem intervalu J_x a to není. Je-li bod a levým krajním bodem intervalu J_x, je v něm funkce f spojitá zprava, t. j. je-li $\langle b, y_1)$, kde $y_1 > b$, libovolné pravé okolí bodu $f(a) = b$, pak k němu existuje takové pravé okolí $\langle a, x_1)$ bodu a, že ke každému x z $\langle a, x_1)$ hodnota $f(x)$ padne do $\langle b, y_1)$, při čemž $x_1 = g(y_1)$. Pak ale také pro každé y z intervalu $\langle b, y_1)$, pro něž platí $b \leqq y < y_1$, je $g(b) \leqq g(y) < < g(y_1)$, čili $a \leqq g(y) < x_1$, t. j. hodnota $g(y)$ padne do pravého okolí $\langle a, x_1)$ bodu $a = g(b)$. Je tedy funkce g spojitá zprava v bodě b. Obdobně bychom dokázali toto: Existuje-li pravý krajní bod b' intervalu J_y, je v něm funkce g spojitá zleva.

Kdyby šlo o funkci klesající, nic by se na důkazu nezměnilo až na to, že by se obrátilo znamení některých nerovností.

Dosud jsme důsledně označovali proměnnou u funkce f písmenem x a u funkce g, která je inversní k funkci f, písmenem y. Nebudeme to však již dále dělat, neboť vůbec nezáleží na tom, jak je proměnná označena. Proměnnou budeme označovat, jak je všeobecným zvykem, písmenem x. V našem dřívějším označení rovnice $y = f(x)$ a $x = g(y)$ značí týž vztah, jímž jsou vázány hodnoty x a y. Obě rovnice jsou znázorněny touž křivkou. Vyměníme-li však ve druhé rovnici písmena x a y mezi sebou, dostaneme inversní funkci ve tvaru $y = g(x)$. Jsou-li x a y souřadnice některého bodu na křivce $y = f(x)$, pak bude na křivce $y = g(x)$ ležet bod o souřadnicích y, x, které jsou stejné až na pořádek. Je však známo, že body o souřadnicích x, y a y, x jsou souměrně položeny vzhledem k přímce půlící úhel kladně orientovaných souřadnicových os. Proto je-li funkce $y = f(x)$ znázorněna jakousi křivkou, je inversní funkce $y = g(x)$ znázorněna křivkou souměrně položenou vzhledem k předešlé křivce podle přímky půlící úhel kladně orientovaných souřadnicových os (obr. 59).



Obr. 59

Než postoupíme dále, probereme si podrobněji některé inversní funkce. Nejprve prozkoumáme funkci inversní k funkci

$$y = f(x) = x^n, \quad n \text{ celé kladné.}$$

Protože je třeba, aby funkce f, k níž chceme konstruovat funkci inversní, byla monotonní, omezíme se jen na takový interval, v němž je funkce f rostoucí při každém celém kladném n, t. j. na interval $\langle 0, \infty)$. Funkce f je spojitá ve všech bodech tohoto intervalu (věta 16); proto k ní existuje inversní funkce g, jejímž oborem je interval $\langle 0, \infty)$ a jež je rovněž spojitá v každém bodě tohoto intervalu. Inversní funkci g nazýváme *n-tá odmocnina* a značíme ji

$$y = \sqrt[n]{x}, \quad n \text{ celé kladné}, \quad x \geqq 0; \tag{c}$$

při tom vyjde také $y \geqq 0$. Rovnice (c) značí ovšem totéž jako rovnice

$$x = y^n, \quad n \text{ celé kladné}, \quad y \geqq 0. \tag{d}$$

Dosadíme-li z rovnice (c) za y do (d), dostaneme

$$x = (\sqrt[n]{x})^n, \quad x \geqq 0;$$

dosadíme-li naopak z rovnice (d) za x do (c), dostaneme

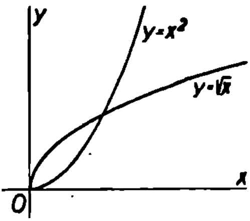
$$y = \sqrt[n]{y^n}, \quad y \geqq 0.$$

Poněvadž funkce f je rostoucí a spojitá v intervalu $\langle 0, \infty)$, je také funkce g rostoucí a spojitá v intervalu $\langle 0, \infty)$.

Pro $n = 1$ je $y = \sqrt[1]{x}$, což je totéž jako $x = y^1 = y$. Je tedy $\sqrt[1]{x} = x$. Pro $n = 2$ píšeme zpravidla pouze $\sqrt{x}$ místo $\sqrt[2]{x}$.

Při lichém kladném n můžeme rozšířit definici n-té odmocniny i na záporné x vzhledem k tomu, že funkce f je pro liché n rostoucí a spojitá v celém intervalu $(-\infty, \infty)$. Naproti tomu při sudém n n-tou odmocninu záporného čísla nezavádíme.

Z předcházejícího plyne, že n-tá odmocnina (pokud je vůbec definována) je vždy definována jednoznačně. Zejména druhá odmocnina je vždy číslo nezáporné; proto je třeba dávat pozor: platí vzorce



Obr. 60

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ pro každé } x, \tag{44}$$

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{1 - \sin^2 x} &= |\cos x|, \\ \sqrt{1 - \cos^2 x} &= |\sin x| \end{aligned}\right. \tag{45}$$

rovněž pro každé x. V těchto dvou vzorcích se často chybuje tím, že se značka absolutní hodnoty vynechává.

Průběh funkce $y = \sqrt{x}$ spolu s inversní funkcí $y = x^2$ (pro $x \geqq 0$, $y \geqq 0$) je znázorněn na obr. 60. Podobný průběh mají křivky i pro jiná n.

Pomocí odmocnin definujeme mocninu, jejímž mocnitelem je libovolné racionální číslo:*) Je-li $x > 0$ a $n = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou čísla celá a $q > 0$, rozumíme znakem x^n číslo $x^n = \sqrt[q]{x^p}$.

Lze ukázat, že pro počítání s mocninami, jejichž mocnitelé jsou čísla racionální a jejichž základy jsou kladná čísla, platí přesně táž pravidla jako pro počítání s mocninami, jejichž mocnitelé jsou čísla celá.

Dále si probereme funkci inversní k funkci $y = \sin x$. Ta je spojitá pro každé x (věta 18), ale monotonní je jen v určitých intervalech; proto se při konstrukci inversní funkce omezíme na interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, v němž je funkce $\sin x$ rostoucí. Je-li $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$, je $-1 \leqq \sin x \leqq 1$, a proto je intervalem, v němž je definována funkce inversní, interval $\langle -1, 1\rangle$. Inversní funkci označujeme názvem *arkussinus* a zapisujeme ji $x = \arcsin y$, při čemž $-1 \leqq y \leqq 1$. Volíme-li za proměnnou písmeno x, jde o funkci

$$y = \arcsin x, \text{ kde } -1 \leqq x \leqq 1$$

(čteme arkussinus x), což znamená totéž jako

$$x = \sin y, \text{ kde } -\tfrac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \tfrac{1}{2}\pi.$$

Z těchto rovnic opět dostáváme

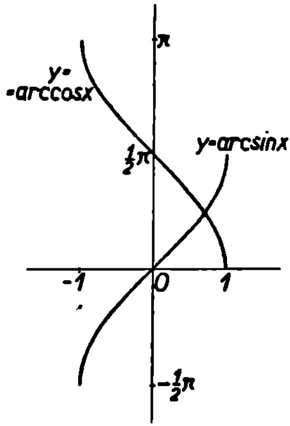
$$x = \sin(\arcsin x), \quad -1 \leqq x \leqq 1,$$
$$y = \arcsin(\sin y), \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \tfrac{1}{2}\pi.$$

Vzhledem k tomu, že funkce $\sin x$ je v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ rostoucí, je i funkce $\arcsin x$ funkce rostoucí v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Průběh funkce $\arcsin x$ je znázorněn na obr. 61.

Obdobně funkce $y = \cos x$ je spojitá pro každé x, ale monotonní je opět jen v určitých intervalech. Je třeba se omezit

*) Názvem *racionální číslo* označujeme každé číslo, které se dá vyjádřit ve tvaru zlomku, jehož čitatel i jmenovatel jsou čísla celá.

opět jen na takový interval, v němž je funkce $\cos x$ monotonní; zpravidla to bývá interval $\langle 0, \pi \rangle$, v němž je $\cos x$ funkcí klesající. Je-li $0 \leqq x \leqq \pi$, je $1 \geqq \cos x \geqq -1$, a proto je oborem funkce inversní v tomto případě interval $\langle -1, 1 \rangle$. Inversní funkci nazýváme *arkuskosinus* a značíme $x = \arccos y$, kde $-1 \leqq y \leqq 1$. Označíme-li proměnnou písmenem x, máme



Obr. 61

$$y = \arccos x, \text{ kde } -1 \leqq x \leqq 1$$

(čteme arkuskosinus x), což znamená totéž jako

$$x = \cos y, \text{ kde } 0 \leqq y \leqq \pi.$$

Funkce $\cos x$ je v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ klesající a spojitá, proto i funkce $\arccos x$ je v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ klesající a spojitá (obr. 61).

Funkce $y = \operatorname{tg} x$ je rostoucí a spojitá v každém intervalu $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, kde k je celé. Abychom k ní mohli sestrojit funkci inversní, musíme si vybrat jeden z těchto intervalů. Zpravidla bereme interval $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Je-li $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$, je $\operatorname{tg} x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. Oborem inversní funkce je tedy interval $(-\infty, \infty)$. Inversní funkci nazýváme v tomto případě *arkustangens* a zapisujeme $x = \operatorname{arctg} y$. Označíme-li proměnnou zase písmenem x jako obvykle, máme

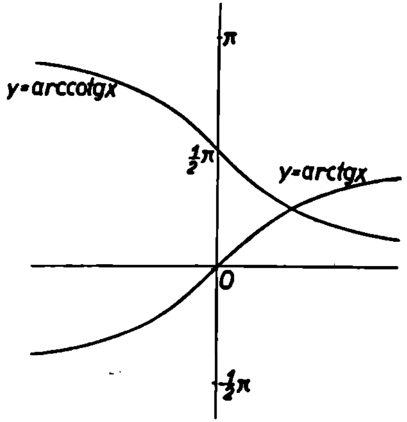
$$y = \operatorname{arctg} x \text{ pro každé } x$$

(čteme arkustangens x), což znamená totéž jako

$$x = \operatorname{tg} y, \text{ kde } -\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi.$$

Funkce $\operatorname{tg} x$ je v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ rostoucí a spojitá, proto je i funkce arctg$x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ rostoucí a spojitá. Průběh této funkce je znázorněn na obr. 62.

Konečně funkce $y = \operatorname{cotg} x$ je klesající a spojitá v každém intervalu $(k\pi, (k+1)\pi)$, kde k je celé. K sestrojení inversní



Obr. 62

funkce bereme zpravidla interval $(0, \pi)$. Je-li $0 < x < \pi$, je cotg$x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. Oborem inversní funkce je tedy interval $(-\infty, \infty)$. Nazýváme ji *arkuskotangens* a zapisujeme $x = \operatorname{arccotg} y$. Rovnice

$$y = \operatorname{arccotg} x \text{ pro každé } x$$

(čteme arkuskotangens x) značí přesně totéž jako rovnice

$$x = \operatorname{cotg} y \text{ pro } 0 < y < \pi.$$

Funkce cotg$x$ je v intervalu $(0, \pi)$ klesající a spojitá, proto je i funkce arccotg$x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ klesající a spojitá. Její průběh je znázorněn na obr. 62.

Funkce arcsin$x$, arccos$x$, arctg$x$, arcotg$x$ se často nazývají společným jménem *funkce cyklometrické*. Jejich užití si ukážeme na příkladech.

Příklad 53. Která x vyhovují rovnici $\sin x = a$, kde $-1 \leqq a \leqq 1$?

Pokud $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$, lze tuto rovnici přepsat podle definice funkce arcsin ve tvaru $x = \arcsin a$, což je jediné řešení dané rovnice v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Víme však, že podle vzorce (6) pro každé x je $\sin(x - 2k\pi) = \sin x$, kde k je celé; proto dané rovnici vyhovuje také každé x, které vyhovuje rovnici $\sin(x - 2k\pi) = a$, t. j. každé x, pro něž $x - 2k\pi = \arcsin a$, čili

$$x = 2k\pi + \arcsin a.$$

Pro každé toto řešení platí $-\frac{1}{2}\pi \leqq x - 2k\pi \leqq \frac{1}{2}\pi$ čili $\frac{1}{2}(4k - 1)\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}(4k + 1)\pi$.

Dále podle vzorce (16) pro každé x je $\sin(\pi - x) = \sin x$, a tedy také $\sin(2k\pi + \pi - x) = \sin x$, kde k je celé. Proto dané rovnici vyhovují také taková x, která vyhovují rovnici $\sin[(2k + 1)\pi - x] = a$, t. j. $(2k + 1)\pi - x = \arcsin a$. Odtud dostáváme

$$x = (2k + 1)\pi - \arcsin a.$$

Každé z těchto řešení spadá do intervalu, pro nějž $-\frac{1}{2}\pi \leqq (2k + 1)\pi - x \leqq \frac{1}{2}\pi$, t. j. $\frac{1}{2}(4k + 1)\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}(4k + 3)\pi$. Tím jsou všecky intervaly, a tedy také všecka řešení, vyčerpány.

Příklad 54. Dokážeme, že pro každé x je

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Položíme $y = \operatorname{arctg} x$, čili $x = \operatorname{tg} y$, kde $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$. Vedle toho platí $\operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\pi - y) = \operatorname{tg} y$, takže $\operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\pi - y) = x$. Avšak $0 < \frac{1}{2}\pi - y < \pi$, takže $\frac{1}{2}\pi - y = \operatorname{arccotg} x$, při čemž $y = \operatorname{arctg} x$. Je tedy vskutku $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi$.

Podobně lze dokázat, že pro $-1 \leqq x \leqq 1$ je

$$\arcsin x + \arccos x = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Obrátíme se nyní k derivacím inversních funkcí. Platí věta:

Věta **45**. Je-li funkce g monotonní v intervalu J_y a má-li ve vnitřním bodě y tohoto intervalu derivaci $g'(y) \neq 0$, má funkce f inversní k funkci g v bodě $x = g(y)$ derivaci $f'(x) = 1 : g'(y)$.

Důkaz. Předpokládáme, že funkce g má v bodě y derivaci, t. j. předpokládáme, že existuje limita

$$g'(y) = \lim_{h\to 0} \frac{g(y+h) - g(y)}{h} \neq 0.$$

To znamená, že $\dfrac{g(y+h) - g(y)}{h} = g'(y) + \varphi(h)$, kde φ je funkce proměnné h, jež je nekonečně malá v okolí bodu $h = 0$, t. j. $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = 0$. Pro $h = 0$ není hodnota funkce φ definována; položíme-li $\varphi(0) = 0$, je funkce φ spojitá v bodě $h = 0$. Označme $g(y) = x$, $g(y + h) = x + k$. Odtud plyne $y = f(x)$, $y + h = f(x + k)$. Potom pro $k \neq 0$ je

$$\frac{f(x+k) - f(x)}{k} = \frac{h}{g(y+h) - g(y)} = \frac{1}{g'(y) + \varphi(h)}.$$

Funkce g má v bodě y derivaci, proto je v něm spojitá, a proto je také funkce f spojitá v bodě x. Protože $h = f(x + k) - f(x)$, je také h spojitá funkce proměnné k v bodě $k = 0$, při čemž $\lim\limits_{k\to 0} h = 0$. Protože $\varphi(h)$ je spojitá funkce proměnné h v bodě $h = 0$, je to také spojitá funkce proměnné k v bodě $k = 0$ (věta 41), takže $\lim\limits_{k\to 0}\varphi(h) = 0$. Proto také existuje derivace funkce f v bodě x a je rovna

$$f'(x) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{g'(y) + \varphi(h)} = \frac{1}{g'(y)}.$$

Dokázané věty užijeme ke stanovení derivace inversních funkcí. Nejprve vezmeme funkci $y = \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$. Ta je definována v intervalu $\langle 0, \infty)$. Funkce k ní inversní je $x = y^q$, kde y je v intervalu $\langle 0, \infty)$ a q je celé kladné. Tato funkce má v každém bodě $y > 0$ derivaci $qy^{q-1} \neq 0$. Proto podle věty 45 má derivaci i funkce $\sqrt[q]{x}$ a tato derivace je rovna

$$\frac{1}{qy^{q-1}} = \frac{1}{q} y^{1-q} = \frac{1}{q} x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}.$$

Z tohoto výsledku nyní odvodíme derivaci mocniny x^n s racionálním mocnitelem $n = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou čísla celá a $q > 0$, v bodě $x > 0$. Je totiž $x^n = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$. Pak podle pravidla o derivaci složených funkcí

$$(x^n)' = p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1} . (x^{\frac{1}{q}})' = px^{\frac{p-1}{q}} . \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} =$$

$$= \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q}+\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Dostáváme tedy vzorec

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \tag{46}$$

platný pro libovolné racionální n a pro $x > 0$. Porovnáme-li jej se vzorcem (27) na str. 71, shledáváme, že je s ním totožný; vzorec (46) však pro n žádá méně, pro x zato více.

Dále dokážeme

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{47}$$

$$\text{kde } -1 < x < 1.$$

Je-li $y = \arcsin x$, kde $-1 \leqq x \leqq 1$, je $x = \sin y$, kde $-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \frac{1}{2}\pi$. V každém vnitřním bodě y intervalu

$\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ je $(\sin y)' = \cos y > 0$; proto v každém vnitřním bodě x intervalu $\langle -1, 1\rangle$ existuje derivace funkce $\arcsin x$. Avšak $(\sin y)' = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ ($\cos y > 0$, a proto není třeba psát absolutní hodnotu). Je tedy

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Poněvadž dále $\arccos x = \frac{1}{2}\pi - \arcsin x$ (příklad 54 konec), proto je $(\arccos x)' = -(\arcsin x)'$, což platí opět pro $-1 < x < 1$.

Obdobně dostaneme

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2} \tag{48}$$

pro každé x.

Je-li $y = \operatorname{arctg} x$, je $x = \operatorname{tg} y$ pro $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$. Pak pro každé y z intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ je $(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} \neq 0$, a proto pro každé x existuje derivace

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Poněvadž $\operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} x$ (příklad 54), proto $(\operatorname{arccotg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)'$ pro každé x.

Píšeme-li nalezené vzorce ve tvaru integrálů, dostáváme

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1} \tag{49}$$

pro každé racionální $n \neq -1$ v intervalu $(0, \infty)$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x \text{ v intervalu } (-1, 1), \tag{50}$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x \text{ v intervalu } (-\infty, \infty). \tag{51}$$

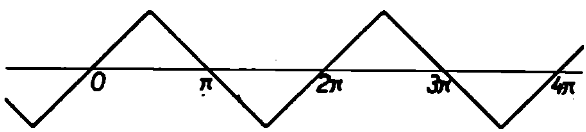
Příklad 55. $(\sqrt{1+x^2})' = [(1+x^2)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,2x =$ $= \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pro každé x podle pravidel o derivování složené funkce.

Příklad 56. Máme stanovit derivaci funkce $y = \arcsin(\sin x)$. Tato funkce je definována pro každé x, neboť $\sin x$ je definován pro každé x a jeho hodnota je v intervalu $\langle -1, 1\rangle$; k této hodnotě lze vždy najít příslušný arkussinus. Derivaci počítáme podle pravidla o derivování složené funkce:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,.\,\cos x = \frac{\cos x}{|\cos x|}\,,$$

neboť $\sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|$ podle vzorce (45). Třeba rozlišovat tři případy: (1) Je-li $\cos x > 0$, t. j. pro $\frac{1}{2}(4k-1)\,\pi < x < \frac{1}{2}(4k+1)\,\pi$, kde k je celé, je $|\cos x| = \cos x \neq 0$, a pak $y' = 1$. (2) Je-li $\cos x < 0$, t. j. pro $\frac{1}{2}(4k+1)\,\pi < x < \frac{1}{2}(4k+3)\,\pi$ je $|\cos x| = -\cos x \neq 0$, a pak $y' = -1$. (3) Konečně pro $x = \frac{1}{2}(2k+1)\,\pi$ je $\cos x = 0$ a derivace neexistuje.

Zajímavý je průběh křivky $y = \arcsin(\sin x)$ (obr. 63). Nejprve vidíme, že $\arcsin[\sin(x+2k\pi)] = \arcsin(\sin x)$; je tedy



Obr. 63

studovaná funkce periodická s periodou 2π. Vedle toho pro $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$ je $\arcsin(\sin x) = x$ (str. 139); je tedy naše funkce v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ zobrazena částí přímky $y = x$. Pro $\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi$ je $-\frac{1}{2}\pi \leqq \pi - x \leqq \frac{1}{2}\pi$, takže

$\arcsin(\sin x) = \arcsin[\sin(\pi - x)] = \pi - x$; funkce je tedy v intervalu $\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$ zobrazena částí přímky $y = \pi - x$. V bodech $\frac{1}{2}(2k + 1)\,\pi$ derivace neexistuje a funkce tam nabývá krajních hodnot.

Příklad 57. Integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax + b}}$, kde $a \neq 0$, počítáme substitucí $ax + b = t$; pak $a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, takže

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax + b}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{a}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{2}{a}\sqrt{ax + b} + c$$

v intervalu $\left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$, je-li $a > 0$, a v intervalu $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, je-li $a < 0$; musí totiž vždy $ax + b > 0$.

Příklad 58. Integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2}$, kde $a \neq 0$, počítáme substitucí $x = at$, $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t$. Dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \int \frac{a\,\mathrm{d}t}{a^2 + a^2t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} =$$
$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$$

v intervalu $(-\infty, \infty)$.

Příklad 59. Integrál $\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$ v intervalu $(-1, 1)$ počítáme po částech. Položíme $u = \sqrt{1 - x^2}$, $v' = 1$; pak je $u' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $v = x$, takže

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1 - x^2} + \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Zlomek v posledním integrálu upravíme takto:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2},$$

neboť $1 > x^2$. Pak

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

takže

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x + c.$$

Můžeme však počítat také substitucí $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$. Aby byl i obrácený přechod od t k x jednoznačný, omezíme se na t z intervalu $(-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi)$, takže $t = \arcsin x$. Po dosazení máme

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,.\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t,$$

neboť $\cos t > 0$, takže $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$. Poněvadž $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, je

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int (1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t - \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = t - \tfrac{1}{2}(t - \sin t\cos t)$$

podle příkladu 42. Zavedeme-li sem opět původní proměnnou x, dostaneme

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + c.$$

Příklad 60. Integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$ budeme počítat substitucí $x = \operatorname{tg} t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$, při čemž proměnnou t omezíme opět na interval $(-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi)$. Pak je $t = \operatorname{arctg} x$, takže dolní mez po tomto dosazení bude $\operatorname{arctg} 0 = 0$ a horní mez $\operatorname{arctg} 1 = \tfrac{1}{4}\pi$.

Dostáváme tedy

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\mathrm{tg}^2 t}{1+\mathrm{tg}^2 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$= [\mathrm{tg}t - t]_0^{\frac{1}{4}\pi} = 1 - \tfrac{1}{4}\pi$$

podle příkladu 40.

Cvičení.

71. Stanovte funkci inversní k funkci: a) $\frac{1}{x}$, b) $\frac{1}{x^2}$,

c) $\sqrt{1-x^2}$, d) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, e) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

72. Jaký tvar musí mít graf funkce $f(x)$, aby byla funkce inversní totožná s funkcí původní?

73. Nalezněte všecka řešení rovnice a) $\mathrm{tg}x = a$, b) $\cos x = a$, kde $-1 \leqq a \leqq 1$, c) $\mathrm{cotg}x = a$.

74. Dokažte, že a) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$ pro $0 \leqq x \leqq 1$, $\arcsin x = -\arccos\sqrt{1-x^2}$ pro $-1 \leqq x \leqq 0$, b) $\arcsin x = \mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $-1 < x < 1$, c) $\mathrm{arctg}x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, d) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ pro $-1 \leqq x \leqq 1$, e) $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}x$, f) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ pro $-1 \leqq x \leqq 1$, g) $\mathrm{arccotg}(-x) = \pi - \mathrm{arccotg}x$.

75. a) Je-li $x_1x_2 \leqq 0$ nebo $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$, je $\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = \arcsin(x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2})$; je-li $x_1^2 + x_2^2 > 1$ a jsou-li čísla x_1, x_2 kladná, je $\arcsin x_1 + \arcsin x_2 =$

$= \pi - \arcsin(x_1\sqrt{1 - x_2^2} + x_2\sqrt{1 - x_1^2})$; je-li $x_1^2 + x_2^2 > 1$ a jsou-li čísla x_1, x_2 záporná, je $\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = -\pi - \arcsin(x_1\sqrt{1 - x_2^2} + x_2\sqrt{1 - x_1^2})$. b) Je-li $x_1x_2 < 1$, je $\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{x_1 + x_2}{1 - x_1x_2}$; je-li $x_1x_2 > 1$ a jsou-li čísla x_1, x_2 kladná, je $\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{x_1 + x_2}{1 - x_1x_2} + \pi$; je-li $x_1x_2 > 1$ a jsou-li čísla x_1, x_2 záporná, je $\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{x_1 + x_2}{1 - x_1x_2} - \pi$. Dokažte.

76. Stanovte derivaci funkcí: a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$, b) $\sqrt{3x + 5}$, c) $\sqrt{1 - x^2}$, d) $x\sqrt{x^2 + 1}$, e) $\sqrt{x + \sqrt{x}}$, f) $\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$, $a \neq 0$, g) $\arcsin\dfrac{x}{a}$, $a \neq 0$, h) $(\arcsin x)^2$, i) $\arcsin\sqrt{1 - x^2}$, j) $\operatorname{arctg}\dfrac{x + 1}{x - 1}$, k) $\arcsin\dfrac{2x}{1 + x^2}$, l) $\arccos\dfrac{x + 1}{x - 1}$.

77. Vyšetřte průběh funkcí: a) $\arcsin\dfrac{1}{x}$, b) $\arccos\dfrac{1}{x}$, c) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, d) $\operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x}$, e) $\arccos(\cos x)$, f) $\arcsin(\cos x)$, g) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, h) $\operatorname{arctg}(\operatorname{cotg} x)$.

78. Určete primitivní funkce k daným funkcím: a) $\sqrt{x\sqrt{x}}$, b) $\sqrt{3x + 2}$, c) $\dfrac{x}{\sqrt{5 - x^2}}$, d) $\dfrac{1}{\sqrt{5 - x^2}}$, e) $x^2\sqrt{x^3 + 1}$, f) $\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$, g) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$, h) $\dfrac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$, i) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $a > 0$, j) $\dfrac{1}{\sqrt{x(2 - x)}}$.

79. Integrací po částech vypočtěte: a) $\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$, b) $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$, c) $\int x \arcsin x \, \mathrm{d}x$, d) $\int \sqrt{3 - 2x^2} \, \mathrm{d}x$,

e) $\int \sqrt{6 - 5x - x^2} \, \mathrm{d}x$.

80. Vypočtěte integrály: a) $\int\limits_0^1 \sqrt[m]{x^n} \, \mathrm{d}x$, m, n celá čísla, $m > 0$, $m > -n$, b) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 3}$, c) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}a} \frac{x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $a \neq 0$,

d) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $a > 0$, e) $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, \mathrm{d}x$, $a > 0$.

IX. LOGARITMUS A OBECNÁ MOCNINA

Dovedeme již integrovat funkci x^n v intervalu $(0, \infty)$ pro každé racionální číslo $n \neq -1$ podle vzorce (46). Zbývá nám ještě výjimka pro $x = -1$. Této výjimky si v této kapitole všimneme blíže. Je-li tedy $n = -1$, jde o funkci $f(x) = \frac{1}{x}$. Tato funkce je, jak víme, spojitá v intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ (věta 16). Vezmeme si jeden z nich. Bude to interval $(0, \infty)$. Jsou-li a, x dvě čísla z tohoto intervalu, existuje podle věty 33 integrál

$$F(x) = \int\limits_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Věta 33 sice předpokládá, že je $a < x$, ale tento předpoklad není podstatný vzhledem k definicím (31) a (32). Považujeme-li x za proměnnou, je $F(x)$ funkce této proměnné spojitá v každém bodě intervalu $(0, \infty)$ (věta 37). Poněvadž dále