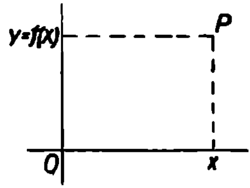
Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

I. Pojem funkce

Buďtež dány dvě číselné množiny M, N. Libovolný prvek prvé množiny označíme písmenem x. Jestliže existuje předpis, který každému prvku x množiny M přiřazuje určitý a jediný prvek y množiny N, nazýváme toto přiřazení *funkcí* a označujeme je zpravidla nějakým písmenem, třeba f. Prvek množiny N, přiřazený prvku x z množiny M, označujeme pak znakem $f(x)$. Číslo x nazýváme *proměnná*; množinu M všech čísel x nazýváme *obor* funkce f. Číslu $y = f(x)$, přiřazenému k číslu x, říkáme *hodnota funkce* v bodě x. Místo písmen x, y, f můžeme ovšem volit kterákoli jiná.

Abychom získali přehled o nějaké funkci, znázorňujeme si ji geometricky. Každou z obou číselných množin M, N zobrazíme na zvláštní číselné ose, které zpravidla volíme navzájem kolmé a o společném počátku O. Tu osu, na níž zobrazujeme čísla x množiny M, nazýváme osa x; tu osu, na níž zobrazujeme čísla y množiny N, nazýváme osa y. Bodem x a jemu přiřazeným bodem $y = f(x)$ vedeme rovnoběžky s druhou osou a jejich průsečík P považujeme za obraz hodnoty funkce f v bodě x (obr. 8). Jde tedy vlastně o pravoúhlé souřadnice x, $y = f(x)$ bodu P v rovině. Množina všech bodů P sestrojených pro všecka x z oboru M funkce f podává jasný přehled o průběhu funkce. Množinu bodů P budeme označovat názvem *graf* neboli *diagram* funkce f. Nejčastěji se stává, že tímto grafem je jakási křivka, ačkoli to může být útvar daleko složitější.

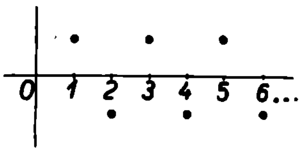


Obr. 8

Obě množiny M, N však bývají předem dány jen zřídka. Často je dána pouze funkce f, t. j. předpis, podle něhož přejdeme od čísel množiny M k číslům množiny N, a její obor M; tím je ovšem již určena množina N všech hodnot $f(x)$ dané funkce. Zpravidla však nebývá předem dán ani obor M dané funkce f. V tomto případě budeme za M považovat co nejobsáhlejší množinu, která má tu vlastnost, že ke každému x z této množiny je možno utvořit hodnotu $f(x)$ dané funkce.

Uvedeme si několik příkladů, na nichž ukážeme některé jednoduché funkce a jejich diagramy.

Příklad 1. Oborem funkce f budiž množina všech přirozených čísel a ke každému x z této množiny budiž přiřazeno číslo 1, je-li x liché, a číslo -1, je-li x sudé. Je tedy $f(1) = 1$, $f(2) = -1$, $f(3) = 1$, $f(4) = -1$ atd. Diagram této funkce (vlastně jen jeho část) je zobrazen na obr. 9. Je tedy možné, aby totéž y odpovídalo většímu počtu čísel x.

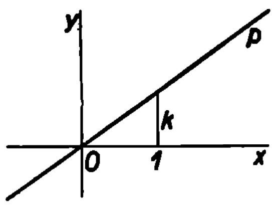


Obr. 9

Příklad 2. Oborem funkce f budiž množina všech reálných čísel a ke každému x této množiny budiž přiřazeno číslo

$$y = kx, \text{ kde } k \neq 0.$$

Můžeme tedy psát $f(x) = kx$. Sestrojíme-li množinu těch bodů P, jejichž souřadnice x, y jsou vázány vztahem $y = kx$, leží tyto body, jak známo, na přímce p procházející počátkem a bodem o souřadnicích 1, k (obr. 10). Říkáme tedy, že funkce $y = kx$ je zobrazena přímkou procházející počátkem. Směr této přímky je určen číslem k, proto mu dáváme název *směrnice*. Je-li k kladné, svírá přímka p s kladně orientovanou osou x úhel ostrý (měřeno v kladném smyslu otáčení), jako je tomu na obr. 10; je-li k záporné, svírá přímka p s kladným smyslem osy x úhel tupý. Funkci $f(x) = kx$, kde $k \neq 0$, nazýváme *přímá úměrnost*.

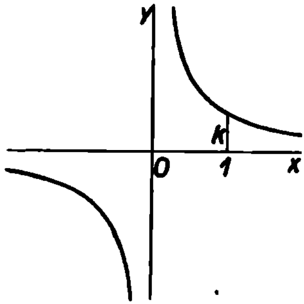


Obr. 10

Příklad 3. Jako další příklad si uvedeme funkci danou rovnicí

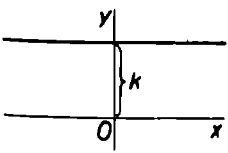
$$y = \frac{k}{x}, \text{ kde } k \neq 0.$$

Všimněme si nejprve jejího oboru. Výraz $\frac{k}{x}$ má smysl pro všecka $x \neq 0$; oborem naší funkce může tedy být obor všech reálných čísel s výjimkou čísla 0. Danou rovnicí není číslu 0 přiřazeno žádné y; říkáme, že funkce není pro $x = 0$ definována. Každému x (s výjimkou nuly) odpovídá jediné y. Souhrn všech bodů o souřadnicích x, y, kde $y = \frac{k}{x}$, leží na rovnoosé hyperbole. Tato hyperbola tedy zobrazuje funkci $y = \frac{k}{x}$ (obr. 11). Funkci $y = \frac{k}{x}$, kde $k \neq 0$, označujeme zpravidla názvem *nepřímá úměrnost*.



Obr. 11

Příklad 4. Funkce $y = k$, kde k je dané číslo, definovaná v intervalu $(-\infty, \infty)$, přiřazuje každému x tohoto intervalu určitou hodnotu, totiž hodnotu k. Taková funkce, která pro všecka x z určitého oboru nabývá stále téže hodnoty, se nazývá *funkce konstantní* v tomto oboru nebo krátce *konstanta*. Je-li jejím oborem interval $(-\infty, \infty)$, je jejím geometrickým znázorněním přímka rovnoběžná s osou x ve vzdálenosti k od této osy (obr. 12).



Obr. 12

Příklad 5. Mějme funkci definovanou pro všecka reálná x rovnicí

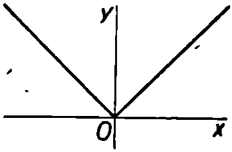
$$y = |x|.$$

a) Je-li $x \geqq 0$, je $|x| = x$, takže v intervalu $\langle 0, \infty)$ je $y = x$.

b) Je-li $x < 0$, je $|x| = -x$, takže v intervalu $(-\infty, 0)$ je $y = -x$.

Naši funkci můžeme tedy definovat také takto:

$$y = \begin{cases} x \text{ pro } x \geqq 0, \\ -x \text{ pro } x < 0. \end{cases}$$



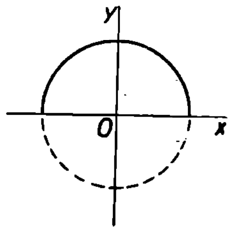
Obr. 13

Její znázornění se skládá ze dvou částí: pro $x \geqq 0$ je to část přímky $y = x$ a pro $x < 0$ je to část přímky $y = -x$ (viz obr. 13).

Příklad 6. Funkce

$$y = +\sqrt{1 - x^2}$$

je definována pouze v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, t. j. pro $-1 \leqq x \leqq 1$, neboť pro $x > 1$ nebo pro $x < -1$ dostaneme pod odmocnítkem záporné číslo, jehož odmocnina není reálná. Hned na počátku jsme se však umluvili, že budeme hovořit jen o reálných číslech. Proto oborem dané funkce může být jen interval $\langle -1, 1\rangle$. Jejím geometrickým znázorněním je půlkružnice opsaná z počátku poloměrem rovným 1, neboť z naší rovnice plyne $x^2 + y^2 = 1$, takže vzdálenost libovolného bodu o souřadnicích x, y, který leží na grafu naší funkce, od počátku je rovna jedné. Poněvadž $y \geqq 0$, jde o půlkružnici nad osou x. Půlkružnice o témže středu a poloměru, ale ležící pod osou x, je obrazem funkce $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (obr. 14).

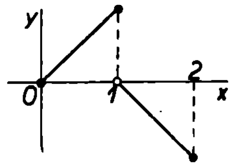


Obr. 14

Příklad 7. Funkce $f(x)$ nechť je definována v oboru $\langle 0, 2\rangle$ takto:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } 0 \leqq x \leqq 1, \\ 1 - x & \text{pro } 1 < x \leqq 2, \end{cases}$$

kdežto pro jiná x není vůbec definována. Tato funkce je znázorněna na obr. 15. Pro $x = 1$ nabývá funkce hodnoty 1, což je na obrázku znázorněno nápadnou tečkou, abychom nebyli na rozpacích, není-li snad $f(1) = 0$.

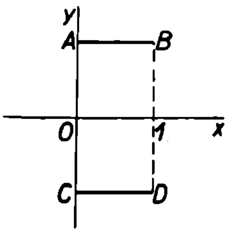


Obr. 15

Příklad 8. Funkce f budiž definována v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ takto:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální}, \\ -1 & \text{pro } x \text{ iracionální}. \end{cases}$$

Mezi každými dvěma různými čísly leží nekonečně mnoho čísel racionálních, a proto o množině čísel racionálních říkáme, že je hustá. Touž vlastnost má i množina čísel iracionálních. Proto v každém sebemenším okolí každého čísla leží nekonečně mnoho čísel racionálních i iracionálních, které však na obrázku není možno od sebe odlišit. Grafické znázornění se tedy skládá z těch bodů úsečky AB, jejichž vzdálenost od bodu A je dána číslem racionálním, a z těch bodů úsečky CD, jejichž vzdálenost od bodu C je dána číslem iracionálním (obr. 16).



Obr. 16

Často se setkáváme s funkcemi, jejichž oborem je množina přirozených čísel. Tak na příklad funkce uvedená v příkladě 1 měla tuto vlastnost. Funkci, jejímž oborem je množina přirozených čísel, označujeme zpravidla názvem *posloupnost*. Funkce z příkladu 1 je tedy posloupností.

Přirozená čísla mají tuto vlastnost, které budeme často používat:

je-li n přirozené číslo, je $n + 1$ také přirozené číslo.

Máme-li tedy číselnou množinu, která má tyto vlastnosti:

(1) obsahuje přirozené číslo k, a

(2) obsahuje-li nějaké číslo n, obsahuje také číslo $n + 1$, pak tato množina obsahuje všecka přirozená čísla $n \geqq k$. To snadno nahlédneme. Kdyby naše množina neobsahovala všecka přirozená čísla $n \geqq k$, existovalo by nejmenší přirozené číslo $r \geqq k$, které by neobsahovala. Není možné, aby $r = k$, to by odporovalo bodu 1. Je tedy $r > k$. Přirozené číslo $r - 1$ je menší než r; to tedy naše množina obsahuje, protože r je nejmenší přirozené číslo, které neobsahuje. Podle bodu 2 však obsahuje číslo $r - 1 + 1 = r$, což odporuje našemu předpokladu. Není tedy možné, aby naše množina neobsahovala některé přirozené číslo $r \geqq k$.

Na právě vyložené vlastnosti přirozených čísel spočívá t. zv. *úplná indukce*, jíž často užíváme k důkazu takových vět, v nichž jde o vlastnosti přirozených čísel. Dokážeme-li tyto dvě věci:

(1) nějaký výrok platí pro přirozené číslo k, a

(2) platí-li výrok pro číslo n, platí také pro $n + 1$, dokázali jsme tím, že uvedený výrok platí pro každé přirozené číslo $n \geqq k$. To je pravda, neboť podle toho, co bylo právě vyloženo, množina těch čísel, pro která výrok platí, obsahuje všechna přirozená čísla $n \geqq k$.

Příklad 9. Dokážeme, že

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n + 1) \qquad \text{(a)}$$

pro každé přirozené číslo n.

(1) Pro $n = 1$ vzorec (a) platí, neboť na levé straně je jediný člen 1 a na pravé straně je $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 1$.

(2) Předpokládáme, že $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$. Pak $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{1}{2}n(n + 1) + (n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$, ale to je týž výsledek jako

vzorec (a), kde je však místo n psáno $n + 1$. Tím je důkaz proveden.

Úplné indukce užíváme často zejména při vyšetřování posloupností, neboť jejich oborem je právě množina přirozených čísel. Jde-li o posloupnost, užíváme raději místo symbolu $f(n)$ znaku a_n, kde index n značí, že jde o hodnotu posloupnosti přiřazenou k číslu n. Čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$, obecně a_n, nazýváme *členy posloupnosti* a mluvíme o prvním, druhém, třetím členu atd., obecně pak o n-tém členu. Chceme-li stanovit posloupnost, můžeme to podle principu úplné indukce učinit takto:

(1) Definujeme její první člen a_1 a

(2) $(n + 1)$-ní člen a_{n+1} definujeme pomocí n-tého členu a_n. Pak je definováno a_n pro všechna přirozená čísla n. Vzorec, kterým se stanoví člen a_{n+1} pomocí členu a_n, se nazývá *vzorec rekurentní*.

Příklad 10. Budiž a libovolné číslo a mějme posloupnost definovanou rekurentně takto:

$$(1)\ a_1 = a, \quad (2)\ a_{n+1} = a_n \,.\, a.$$

Rozepišme několik prvních členů této posloupnosti

$$\begin{aligned} a_1 &= a, \\ a_2 &= a_1 \,.\, a = a \,.\, a = a^2, \\ a_3 &= a_2 \,.\, a = a^2 \,.\, a = a^3, \\ a_4 &= a_3 \,.\, a = a^3 \,.\, a = a^4 \end{aligned}$$

atd. Zdá se, že obecně je

$$a_n = a^n. \tag{b}$$

Dokážeme, že tomu vskutku tak je.

(1) Víme, že $a_1 = a = a^1$, t. j. vzorec (b) platí pro $n = 1$.

(2) Je-li $a_n = a^n$, pak $a_{n+1} = a_n \,.\, a = a^n \,.\, a = a^{n+1}$. To však je vzorec (b), v němž je psáno $n + 1$ místo n. Tím je dokázána platnost vzorce (b) pro každé přirozené číslo n. Naše

posloupnost je tedy posloupností mocnin o základu a, jejichž mocnitelé jsou přirozená čísla.

Vedle mocnin, jejichž mocnitelé jsou přirozená čísla, je účelné zavést i mocniny s mocnitelem 0 a s mocnitelem celým záporným. Definujeme

$$a^0 = 1 \text{ pro každé } a \text{ (tedy i } 0^0 = 1), \tag{4}$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \text{ pro } a \neq 0 \text{ a } n \text{ celé záporné} \tag{5}$$

(a tedy $-n$ celé kladné). Mocninu a^n, kde n je celé záporné číslo, nedefinujeme pro $a = 0$, neboť dělení nulou nemá smysl, jak jsme již uvedli na str. 10. Pravidla pro počítání s mocninami, jejichž mocnitelé jsou čísla celá (kladná, záporná i nula), považujeme za známá. Při jejich aplikaci je třeba dávat pozor, aby měly napsané symboly smysl. Na příklad známý vzorec

$$a^r \,.\, a^s = a^{r+s}$$

platí při nezáporných celých r, s pro každé a, naproti tomu je-li některé z čísel r, s (nebo obě) záporné, platí jen pro $a \neq 0$.

Příklad 11. Je-li n celé, je funkce

$$f(x) = x^n$$

při $n \geqq 0$ definována pro každé x, při $n < 0$ je definována jen pro $x \neq 0$. Při záporném n se tedy obor této funkce skládá ze dvou intervalů: $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$; pro $x = 0$ funkce definována není. Průběh funkce $f(x) = x^n$ je pro $n = 2, 3, -1, -2$ zachycen na obr. 17—20. Funkce tvaru $f(x) = x^n$, kde n je celé, se nazývá *mocnina s celým mocnitelem.*

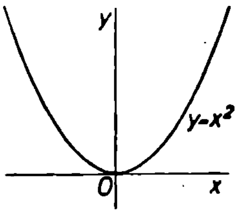
Odvodíme si dvě věty o mocninách s celým mocnitelem:

Věta 1. Je-li n celé kladné a $0 \leqq x_1 < x_2$, je $0 \leqq x_1^n < x_2^n$.

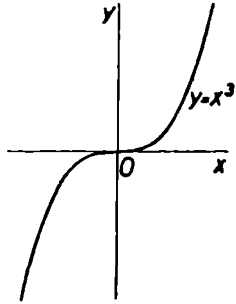
Důkaz povedeme úplnou indukcí.

(1) Věta platí pro $n = 1$, neboť podle předpokladu $0 \leqq x_1 < x_2$, t. j. $0 \leqq x_1{}^1 < x_2{}^1$.

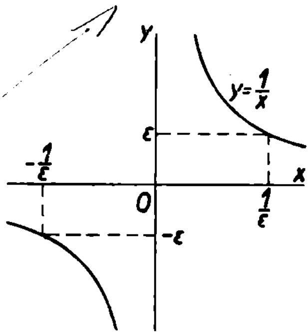
(2) Je-li pro některé n splněn vztah $0 \leqq x_1{}^n < x_2{}^n$ a je-li zároveň $0 \leqq x_1 < x_2$, pak také $0 \leqq x_1{}^n \, . \, x_1 < x_2{}^n \, . \, x_2$ čili $0 \leqq x_1{}^{n+1} < x_2{}^{n+1}$.



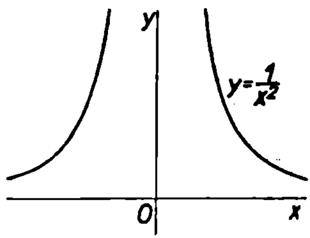
Obr. 17



Obr. 18



Obr. 19



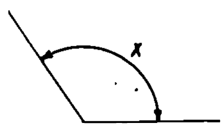
Obr. 20

Věta **2**. Je-li n celé záporné a $0 < x_1 < x_2$, je $x_1{}^n > x_2{}^n > 0$.

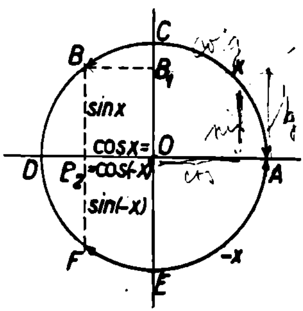
Důkaz. Je-li n celé záporné, je $-n$ celé kladné, a pak podle věty 1 je $0 < x_1{}^{-n} < x_2{}^{-n}$. Čísla x_1, x_2 jsou kladná. Je tedy také kladné číslo $x_1^n x_2^n$. Násobíme-li vzniklou nerovnost tímto číslem, dostaneme nerovnost $0 < x_2^n < x_1^n$ mezi kladnými čísly.

Příklad 12. Abychom měli rozmanitější výběr příkladů, promluvíme si ještě o funkcích $\sin x$ a $\cos x$ známých z geometrie. Naše úvahy však v tomto příkladě nebudou zcela přesné, neboť se budeme opírat o názor vyčtený z obrázku; teprve v kapitole X je postavíme na přesný základ.

V celé této knížce budeme měřit úhly t. zv. *měrou obloukovou*, v níž plný úhel (360°) je vyjádřen číslem 2π, přímý úhel (180°) číslem π, pravý úhel (90°) číslem $\frac{1}{2}\pi$ atd. Tato čísla volíme proto, že délka kružnice o poloměru 1 je právě 2π. Je tedy velikost x úhlu v míře obloukové rovna délce kruhového oblouku, který leží uvnitř daného úhlu, má střed v jeho vrcholu a poloměr rovný 1 (viz obr. 21). Je-li tento úhel probíhán v kladném smyslu (t. j. proti směru pohybu hodinových ručiček), má hodnotu kladnou; je-li probíhán v záporném smyslu (t. j. ve směru pohybu hodinových ručiček), má hodnotu zápornou.



Obr. 21



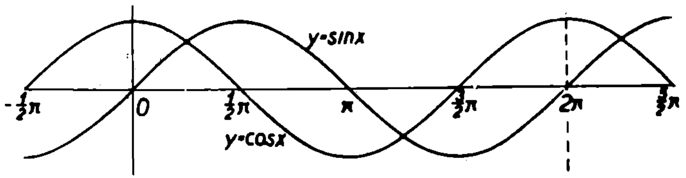
Obr. 22

Sestrojme kružnici o poloměru 1 (viz obr. 22, který je narýsován ve zvětšeném měřítku) a o středu O v počátku souřadnic. Písmeno x bude značit velikost úhlu (v míře obloukové), t. j. délku oblouku, který nanášíme na kružnici od bodu A; druhý krajní bod tohoto oblouku označíme B. Je-li $x > 0$, nanášíme oblouk v kladném smyslu, a je-li $x < 0$, nanášíme jej v záporném smyslu. Souřadnice bodu B jsou určeny velikostí úhlu x. Každému

x odpovídá jediný bod B, který má určité souřadnice. Tyto souřadnice jsou tedy funkcemi úhlu x. Souřadnici OB_1 nazýváme *sinus* x (značka $\sin x$), souřadnici OB_2 nazýváme *kosinus* x (značka $\cos x$).

Z tohoto vytvoření je vidět, že $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ (bod A). Roste-li x od 0 do $\frac{1}{2}\pi$, roste $\sin x$ od 0 do 1 a $\cos x$ klesá od 1 do 0; $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$, $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ (bod C). Roste-li x dále od $\frac{1}{2}\pi$ do π, klesá $\sin x$ od 1 do 0 a $\cos x$ rovněž klesá od 0 do -1; $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$ (bod D). Roste-li x od π do $\frac{3}{2}\pi$, klesá $\sin x$ od 0 do -1 a $\cos x$ roste od -1 do 0; $\sin\frac{3}{2}\pi = -1$, $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$ (bod E). Konečně roste-li x od $\frac{3}{2}\pi$ do 2π, roste $\sin x$ od -1 do 0 a $\cos x$ rovněž roste od 0 do 1. Dále je z obrázku vidět, že pro každé x je

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x,$$



Obr. 23

neboť $x + 2\pi$ značí, že je třeba nejprve proběhnout oblouk x a pak ještě celou kružnici o délce 2π, čímž se dostaneme do téhož bodu B, jako kdybychom opsali pouze oblouk x. Říkáme, že funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou periodické s periodou 2π. To znamená, že se hodnota těchto funkcí nemění, když proměnnou zvětšíme o 2π. Obecněji platí

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad k \text{ celé.} \tag{6}$$

Z toho všeho je zřejmé, že funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou definovány pro každé x a že vždy je

$$-1 \leqq \sin x \leqq 1, \quad -1 \leqq \cos x \leqq 1$$

čili

$$|\sin x| \leqq 1, \quad |\cos x| \leqq 1. \tag{7}$$

Průběh funkcí $\sin x$ a $\cos x$ je znázorněn na obr. 23.

Dále je z obr. 22 vidět, že

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \tag{8}$$

neboť bod F, který je druhým krajním bodem oblouku o délce $-x$, dostaneme jako bod souměrný k bodu B podle osy OA.

Později dokážeme, že

$$\begin{aligned} \sin(x_1 + x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2, \\ \cos(x_1 + x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Dosadíme-li sem $x_1 = x_2 = x$, dostáváme

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x.^{*)} \end{aligned} \tag{10}$$

Nahradíme-li v rovnicích (9) číslo x_2 číslem $-x_2$ a užijeme-li vzorců (8), obdržíme

$$\begin{aligned} \sin(x_1 - x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2, \\ \cos(x_1 - x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Položíme-li ve druhé z těchto formulí $x_1 = x_2 = x$, vyjde vztah

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{12}$$

Z rovnic (9) a (11) dále vyplývají vztahy

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi + x) = \cos x, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi + x) = -\sin x, \tag{13}$$
$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos x, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \sin x, \tag{14}$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x, \tag{15}$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x. \tag{16}$$

Z druhé rovnice (10) a z rovnice (12) dostáváme

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x. \tag{17}$$

---

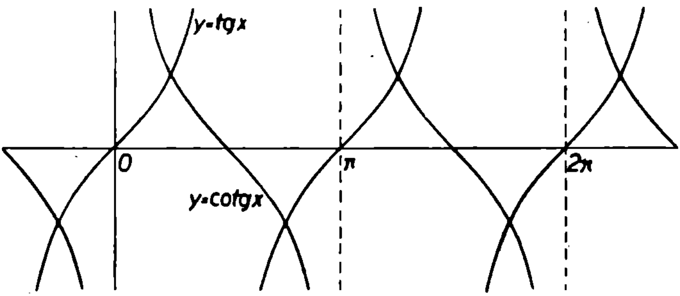
*) $\sin^2 x$ značí totéž jako $(\sin x)^2$, podobně $\cos^2 x$ značí totéž jako $(\cos x)^2$.

Konečně sečtením a odečtením rovnic (9) a (11) vyjde

$$
\begin{aligned}
\sin(x_1+x_2)+\sin(x_1-x_2) &= 2\sin x_1 \cos x_2,\\
\sin(x_1+x_2)-\sin(x_1-x_2) &= 2\cos x_1 \sin x_2,\\
\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2) &= 2\cos x_1 \cos x_2,\\
\cos(x_1+x_2)-\cos(x_1-x_2) &= -2\sin x_1 \sin x_2.
\end{aligned}
$$

Položíme-li sem $x_1 + x_2 = z_1$, $x_1 - x_2 = z_2$ čili $x_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, $x_2 = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)$, dostaneme

$$
\begin{aligned}
\sin z_1+\sin z_2 &= 2\sin\tfrac{1}{2}(z_1+z_2)\cos\tfrac{1}{2}(z_1-z_2),\\
\sin z_1-\sin z_2 &= 2\cos\tfrac{1}{2}(z_1+z_2)\sin\tfrac{1}{2}(z_1-z_2),\\
\cos z_1+\cos z_2 &= 2\cos\tfrac{1}{2}(z_1+z_2)\cos\tfrac{1}{2}(z_1-z_2),\\
\cos z_1-\cos z_2 &= -2\sin\tfrac{1}{2}(z_1+z_2)\sin\tfrac{1}{2}(z_1-z_2).
\end{aligned} \tag{18}
$$



Obr. 24

Příklad 13. Na základě funkcí $\sin x$ a $\cos x$ definujeme další dvě funkce

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}. \tag{19}$$

První z nich čteme *tangens* x a je definována pro všecka x, pro něž je $\cos x \neq 0$, t. j. $x \neq \frac{1}{2}(2k+1)\pi$, kde k je celé. Druhou z nich čteme *kotangens* x a je definována pro všecka x, pro něž $\sin x \neq 0$, t. j. $x \neq k\pi$, kde k je číslo celé. Průběh funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ je znázorněn na obr. 24.

Cvičení.

1. Graficky vyjádřete funkce: a) $y = x + |x|$, b) $y = |x| + |x - 1|$, c) $y = 2|x + 1| - 3|x - 1|$.

2. Je funkce a) $\dfrac{x}{x^2 - 4}$, b) $\dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 3x - 4}$, c) $\dfrac{2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$ definována pro každé x?

3. V čem se navzájem liší funkce a) $\dfrac{x}{x}$ a 1, b) $\dfrac{2x + 3}{2x^2 + x - 3}$ a $\dfrac{1}{x - 1}$, c) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ a $\operatorname{cotg} x$?

4. Vyjádřete pomocí konstant a čísla n n-tý člen posloupnosti dané rekurentně: a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = -a_n$, b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 - a_n$, c) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{n}{n + 1} \cdot a_n$.

5. Úplnou indukcí dokažte t. zv. Bernoulliho nerovnost

$$(1 + x)^n \geqq 1 + nx, \text{ kde } x > -1, n \text{ celé kladné.}$$

Kdy může nastat rovnost?

6. Pomocí Bernoulliho nerovnosti dokažte, že pro n celé kladné a) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \dfrac{1}{n + 1}\right)^{n+1}$, b) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \dfrac{1}{n + 1}\right)^{n+2}$.

7. Pro která a, b a pro která celá r, s platí vzorce: a) $a^r : a^s = a^{r-s}$, b) $(a^r)^s = a^{rs}$, c) $(ab)^r = a^r b^r$, d) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$, e) $1^r = 1$, f) $0^r = 0$?

8. a) Vyjádřete velikost y úhlu v míře obloukové jako funkci jeho velikosti x v míře stupňové. b) Jak velký je v míře stupňové úhel, jehož velikost v míře obloukové je dána číslem 1? (Tento úhel se jmenuje **radián**.)

9. Vyšetřete vlastnosti následujících funkcí a vyjádřete tyto funkce graficky: a) $\sin(x + a)$, b) $\sin ax$, kde $a \neq 0$, c) $\sin x^2$, d) $\sin \frac{1}{x}$, e) $\frac{1}{\sin x}$.

10. a) Vyjádřete $\operatorname{tg}(-x)$, $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi + x)$, $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - x)$, $\operatorname{tg}(\pi + x)$, $\operatorname{tg}(\pi - x)$ pomocí $\operatorname{tg} x$. b) Dokažte, že $\operatorname{tg}(x_1 + x_2) = \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{1 - \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2}$, $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$. Ve všech případech udejte ta x, pro něž napsané vztahy platí.

II. LIMITA

Abychom si úvahy zbytečně nekomplikovali, budeme se většinou zabývat jen takovými funkcemi, jejichž obor se skládá vesměs z intervalů.

Mějme funkci f definovanou pro všecka x z nějakého intervalu, jehož vnitřním bodem je bod a. Blíží-li se proměnná x k číslu a a blíží-li se při tom hodnota $f(x)$ k nějakému číslu b, říkáme, že funkce f má v bodě a *limitu* b, a píšeme to krátce takto:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

(čteme: limita funkce f pro x blížící se k a je b). Pojem limity bude ústředním pojmem našich úvah, proto mu věnujeme zvýšenou pozornost. Slova „blíží-li se“, jichž jsme právě užili, je však třeba nejprve přeložit do přesné řeči, abychom si pod nimi představovali něco určitého a abychom je mohli vyjádřit matematicky. Ukážeme to nejprve na jednoduchém příkladě, a teprve potom budeme definici limity přesně formulovat.