Kubické a bikvadratické problémy

Úvod

In: Ladislav Seifert (author): Kubické a bikvadratické problémy. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1951. pp. 7–10.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403335

1. ÚVOD

Řešení úloh bylo hlavním cílem starověké geometrie. Předmětem těchto úvah bylo určit, jak některé části geometrického útvaru závisí na jiných čili do jaké míry jsou jimi určeny. Ze zvolených částí se snažili sestrojit jiné. Odtud vyplývá klasická methoda řešení geometrických úloh. Nejprve se provádí rozbor či analysa úlohy, jejímž úkolem je stanovit závislost částí hledaných na částech daných, t. j. převést úlohu na jinou, jednodušší nebo dříve řešenou. Pak následuje skutečná konstrukce, potom důkaz, že sestrojené části vyhovují úloze, a nakonec diskuse, t. j. určení počtu řešení a stanovení podmínek, za kterých lze úlohu provést. Jako nástrojů se používalo pravítka a kružidla, jimiž lze provést dvě nejjednodušší konstrukce (*postuláty*):

1. *Dva body lze spojit přímkou*;
2. *Kolem daného bodu lze opsat kružnici* daným poloměrem.

Při tom však již ve starověku narazili na úlohy, jež se nepodařilo redukovat na tyto základní úlohy, na př. dělení kružnice na 7 nebo 13 dílů, rozdělení úhlu na tři stejné části, rektifikace a kvadratura kruhu atd. Jen úlohy, jež se daly řešit kružidlem a pravítkem, pokládali za dokonale řešitelné. K řešení jiných úloh používali nových prostředků, na př. narýsované kuželosečky, konchoidy nebo jiné křivky, a také různých aparátů. Význam používaných prostředků zhodnotila teprve nejnovější kritická doba a bylo ukázáno, které konstrukce lze provést na př. pouhým kružidlem, které pomocí dané pevné kuželosečky použitím pravítka a kružidla nebo jinými prostředky. K takovým úvahám je vhodným nástrojem především moderní analysa a theorie funkcí.

Na základě těchto kritických studií je možno *rozdělit konstruktivní úlohy* na takové, které

a) *lze provést přesně pravítkem a kružidlem* (případně jen pravítkem nebo jen kružidlem),

b) *nelze provést těmito prostředky.*

Abychom zabránili nedorozumění, je třeba si dobře uvědomit, co nazýváme přesnou konstrukcí. Pravíme, že úloha je danou konstrukcí řešena *přesně*, jsme-li jisti, že bychom dostali výsledek dokonale přesný, kdyby pomůcky, jichž užíváme (pravítko a kružidlo), byly dokonalé a používá-li se jich jen v konečném počtu operací. Tak rozumíme přesnosti v theorii.

V praxi ovšem může t. zv. *přibližná* konstrukce dát přesnější výsledek než konstrukce theoreticky přesná, neboť při theoreticky přesné konstrukci je často mnoho výkonů pomůckami, jež nejsou vždy dokonalé nebo s nimi nezacházíme vždy dosti pozorně. Tím se dostane do konstrukce více chyb než při konstrukci označené za přibližnou, při níž se zpravidla spokojíme jen nejmenším počtem operací.

Je-li předložena nějaká úloha, není často snadné rozhodnout, do které kategorie patří. V mnohých otázkách může dát uspokojivou odpověď zase jen algebra nebo analysa. Určíme-li dané body nebo jiné útvary v rovině a prostoru souřadnicemi, lze vyjádřit vztahy mezi danými a hledanými útvary rovnicemi; souřadnice hledaných bodů nebo útvarů jsou řešením těchto rovnic a dospějeme k nim postupnou eliminací. Je-li výsledná rovnice algebraická irreducibilní stupně n, t. j. taková, že ji nelze řešit postupně užitím rovnic nižších stupňů, říkáme, že úloha je stupně n-tého. Nevede-li řešení k rovnici algebraické, je úloha transcendentní. Podle tohoto principu, který záleží především v užití algebry, rozeznáváme *úlohy stupně prvního* čili *lineární*, úlohy *stupně druhého* čili *kvadratické*, *stupně třetího* čili *kubické*, *stupně čtvrtého* čili *bikvadratické* atd.[1]

[1] Obsáhlejší a velmi instruktivní poučení o geometrických úlohách je v článku J. Vojtěcha: Theorie geometrických konstrukcí, Časopis pro pěstování mat. a fys., roč. 31.

V konstruktivní geometrii se jeví nejúčelnějším rozdělení na *úlohy projektivní*, *afinní* a *metrické*. To je stanovisko souhlasné s tím, že každá geometrie studuje invariantní vlastnosti při transformacích jisté grupy, tedy grupy transformací projektivních, afinních nebo transformací t. zv. hlavní grupy, která zahrnuje pohyby (shodnost) a podobnost.[2]

Úloha žádá sestrojení útvaru, který má dané vlastnosti. Jsou-li to vlastnosti projektivní, nazývá se úloha projektivní. Takové konstrukce se nemění kolineární transformací čili středovým promítáním. Jde-li na př. o rovinnou konstrukci a promítneme-li ji z jistého středu (v konečnu) na jinou rovinu, je cesta, kterou dojdeme od těchto útvarů k žádaným, právě taková v druhé rovině jako v první. Rozeznáváme pak projektivní úlohy stupně prvního, druhého, třetího atd. Speciálně projektivní úlohy prvního stupně jsou řešitelny pouhým pravítkem.

Afinní vlastnosti rovinných útvarů mají vztah k nevlastní (nekonečně vzdálené) přímce a zůstávají invariantní při afinních transformacích, při nichž nevlastní (nekonečně vzdálená) přímka přechází sama v sebe, tedy při promítání rovnoběžném. K promítání a protínání přistupuje ještě vedení rovnoběžek. Pojem rovnoběžnosti úzce souvisí, jak známo, s pojmem rovnosti úseček.

V metrických úlohách přistupuje k rovnoběžnosti ještě konstrukce pravého úhlu. Metrické transformace lze pojímat jako projektivní transformace, při nichž zůstávají invariantní v rovině t. zv. kruhové body na nevlastní přímce (v prostoru t. zv. absolutní kuželosečka v nevlastní rovině).

Úlohy lze také klasifikovat podle toho, *jakými prostředky je lze provést*; v tomto ohledu přinesla novější doba opravdu zajímavé výsledky. Na př. rovinné afinní úlohy lineární lze

---

[2] Důsledné rozdělení úloh na projektivní, afinní a metrické je provedeno ve spise: Vahlen, Konstruktionen und Approximationen, Lipsko, 1911.

řešit pouhým pravítkem, jsou-li dány dva páry rovnoběžek, metrické lineární úlohy lze řešit jen pravítkem, jsou-li dány v rovině dva pravé úhly, po případě čtverec nebo kružnice s daným středem. Projektivní kvadratické úlohy lze provést pouhým pravítkem, je-li dána v rovině kružnice, po případě jiná kuželosečka. Jsou-li to metrické úlohy kvadratické, musí být dán ještě střed kružnice (Steinerovy konstrukce). Některé kvadratické úlohy lze řešit pravítkem ve spojení s přenášením délek. Kubické konstrukce v rovině lze provést kružidlem a pravítkem, je-li dána na př. pevná elipsa atd.

Pokud se týká methody při řešení geometrických úloh, používají starověké Eukleidovy „Základy“ synthetické methody, která se dlouho udržela na nižším i vyšším stupni našich škol podobně jako v ostatních evropských zemích, ačkoli náběh k jiným methodám je patrný již ve starověku na př. u Archimeda. Značný pokrok v elementární geometrii způsobily analytické methody: užití algebry, theorie čísel a především zavedení souřadnic. První krok zde učinil Vieta (1540—1603), který je vlastně zakladatelem algebraické geometrie, další pokrok přinesl Fermat (1601 až 1665) a pak ovšem Descartes (1596—1650).

Methody, jichž budeme v dalším používat, jsou:

a) *Methoda algebraicko-geometrická* (algebraicko-trigonometrická), kterou rozumíme odvození vztahu mezi geometrickými elementy algebraickou cestou bez výslovného užití souřadnic.

b) *Methoda analytická* v užším smyslu, při níž zavádíme kartézské nebo jiné souřadnice, t. j. určíme body, přímky, roviny atd. souřadnicemi a převedeme geometrický problém na algebraický. Pak ovšem musíme provést rozbor tohoto výsledku a zkoumání jeho geometrického významu.[3]

---

[3] Z cizojazyčných spisů, které pojednávají o geometrických konstrukcích a zhodnocují různé prostředky, jimiž je lze provádět, lze kromě prvních dvou děl uvedených v předmluvě uvést spis:

Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen, Vídeň (1906).