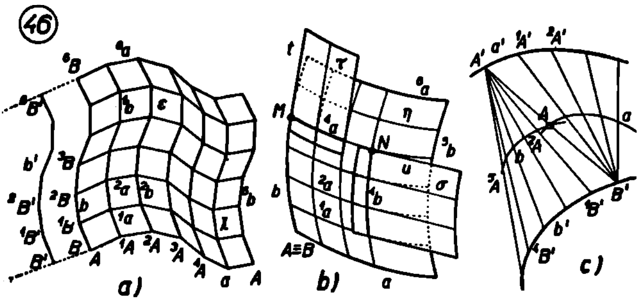
7. PLOCHY POSOUVÁNÍ

7,0. Vytvoření ploch translačních a základní pojmy. K plochám posouvání nebo translačním dojde se od prostorového mnohostěnu (obr. 46a). Vytkněme v prostoru mnohoúhelník $a \equiv A\,{}^1A\,{}^2A \ldots$ a další mnohoúhelník $b \equiv B\,{}^1B\,{}^2B \ldots$, bod A buď totožný s bodem B. Udělíme-li nyní mnohoúhelníku a pohyb daný mnohoúhelníkem b, přejde do jednotlivých



poloh a, ${}^1a$ ${}^2a$, ... a vytvoří prostorový mnohostěn ε. Mnohoúhelník a jmenujeme *tvořícím*, mnohoúhelník b, který určuje pohyb prvého, *řídícím* mnohoúhelníkem. Řídící mnohoúhelník b můžeme vysunouti i ven z tělesa η, ovšem tak, aby v nové poloze $b' \equiv B'\,{}^1B'\,{}^2B' \ldots$ byl k původní poloze rovnoběžný. Při pohybu vytvoří mnohoúhelník ${}^1a$ hranol χ, který prochází mnohoúhelníkem ${}^1a$ a má směr svých povrchových přímek v prvku ${}^1B\,{}^2B$ mnohoúhelníka b nebo odpovídajícího prvku ${}^1B'\,{}^2B'$ vysunutého mnohoúhelníka b'.

Přejdeme-li ke křivkám (obr. 46b), dostaneme plochu η, která bude vytvořována křivkou a, která zůstávajíc stále rovnoběžná a shodná se svou původní polohou, pohybuje se tak, že její bod A neopustí při tom druhou danou křivku b.

Podle libovolné polohy křivky a, na př. ${}^4a$ dotýká se plochy η plocha válcová, která má směr svých povrchových přímek určený tečnou t křivky b vedenou k ní v průsečném bodě M s křivkou ${}^4a$. Křivky a jmenujeme *tvořícími křivkami* a křivku b *křivkou řídící*.

Plochu η však můžeme i opačně vytvořiti *posouváním* neboli *translací* křivky b jako tvořící po křivce a jako řídící. Plochy takto vzniklé jmenují se *plochy posouvání* neboli *plochy translační*.

Na plochách posouvání jsou dvě soustavy povrchových křivek, mezi sebou shodné a rovnoběžné křivky tvořící a soustava rovněž mezi sebou shodných a rovnoběžných křivek řídících.

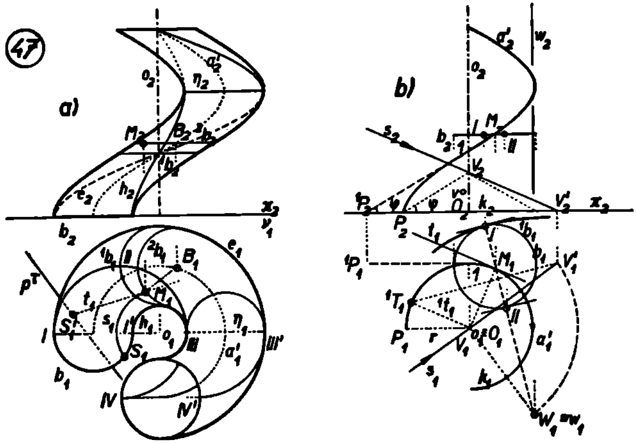
Každým bodem plochy prochází jedna tvořící a jedna řídící křivka, jejich tečny v uvažovaném bodě určují příslušnou rovinu tečnou. Podle křivky řídící dotýká se plochy plocha válcová, jejíž povrchové přímky jsou tečnami křivek tvořících a naopak. Úkol křivek řídících a tvořících může býti zaměněn.

Plochu posouvání můžeme vytvořiti i tímto způsobem (obr. 46c): Vytkněme dvě křivky v prostoru, křivku a' a b'. Na druhé křivce zvolme bod B' a vyšetřme křivku a, která je vyplněna středy úseček vedených mezi bodem B' a body A', ${}^1A'$, ${}^2A'$, ... křivky a'. Posouváním bodu B' po křivce b' do poloh ${}^1B'$, ${}^2B'$, ... získáme řadu ploch kuželových a na nich křivky obdobné ke křivce a, která je podobná ke křivce a', a proto křivky a, ${}^1a$, ${}^2a$, ... budou mezi sebou shodné a v prostoru shodně položené. Bod A křivky a sleduje při tom dráhu b, která je souhrnem středů úseček určených bodem A' a křivkou b'. Je zřejmo, že tu vznikla plocha posouvání o řídící křivce b a tvořící křivce a. Tedy:

Souhrnem středů všech úseček, jejichž koncové body A', B' leží na dvou v prostoru libovolně daných křivkách a' a b', je plocha translační.

7,1. Plocha vinutého sloupu. Jako příklad proberme plochu, která vznikne posouváním kružnice b, (obr. 47a) jejíž střed probíhá křivku šroubovou a', danou osou o, poloměrem R

a výškou návitku; první průmět je kružnice a_1', druhý je obecná sinusoida a_2'. Pohyb kružnice b musíme si představiti tak, že zůstávajíc v rovině rovnoběžné s průmětnou, pohybuje se tak, že střed probíhá šroubovici a' jako křivku řídící a průměr $I\,I'$ křivky b přechází do nových poloh $II\,II'$, $III\,III'$, $IV\,IV'$, ... a zůstává stále rovnoběžný s původní polohou $I\,I'$. Každý bod křivky b vytvoří při tomto pohybu



šroubovici shodnou a shodně položenou s křivkou a', mající týž poloměr R, ale nemající v o svou osu. Osy těchto šroubovic vyplňují rotační plochu válcovou, mající v o osu a v poloměru r křivky b svůj poloměr. Podle šroubovice vytvořené bodem I musí se této translační plochy dotknouti plocha válcová, jejíž povrchové přímky jsou rovnoběžné s tečnou křivky b v bodě I, t. j. plocha válcová kolmá k druhé průmětně ν. Druhý obrys uvažované plochy tvoří dvě šroubovice shodné se šroubovicí a', obrys nárysu dvě obecné sinusoidy shodné s a_2' a jen vpravo a vlevo o poloměr r posunuté.

Plochu můžeme však vytvořiti i pohybem šroubovým,

t. j. kružnici b budeme rovnoměrně otáčeti kolem osy o a při tom rovnoměrně ji směrem této osy vysunovati tak, aby otočení o plný úhel bylo sdruženo posunutí směrem osy o o výšku v závitu. Při tom bod I a I' proběhnou šroubovice ve svém okolí o největším resp. nejmenším poloměru. Označujeme je názvem *rovníková šroubovice* e a *hrdlo* h dané plochy šroubové η. Každý další bod, na př. bod S křivky b probíhá při uvedeném pohybu šroubovém šroubovici o ose o a stejné výšce v závitu se šroubovicí a'. Křivky e a h tvoří první obrys, půdorysy e_1 a h_1 obrys půdorysu této plochy η, kterou zpravidla jmenujeme *plochou vinutého sloupu* (la colonne torde).

Dosavadní vyšetřené vlastnosti shrňme takto:

Na vinutém sloupu η je nekonečně mnoho šroubovic se šroubovicí a' souosých a stejné výšky návitku, poloměry jsou různé v mezích $R + r$ až $R - r$. Na ploše je dále soustava šroubových křivek shodných s křivkou a', majících s ní touž výšku a týž poloměr R. Osy těchto šroubovic jsou rovnoběžné s osou a od ní o poloměr r vzdáleny. Podle těchto šroubovic se dotýkají plochy η válcové plochy, jejichž povrchové přímky jsou kolmé k ose o. Na ploše je konečně soustava kružnic téhož poloměru r, majících středy na šroubovici a', podél nich se dotýkají plochy válcové, jejichž osy jsou tečnami šroubovice a'.

Tečnou rovinu v bodě M, který leží na kružnici ${}^2b$ mající střed v B na a' sestrojíme buď tak, že se uváží, že podél ${}^2b$ se dotýká η plocha válcová, která má v tečně sestrojené v bodě B k šroubovici a' svou osu; nebo za pomoci šroubovice s jdoucí bodem a a souosé se šroubovicí a'. Tečna t šroubovice s a tečna kružnice ${}^2b$ v bodě M určují již žádanou tečnou rovinu τ v bodě M.

Vytkněme v obr. 47b opět plochu vinutého sloupu, vytvářenou kružnicí b o poloměru r jako křivkou tvořící, křivkou řídící buď šroubovice a' o poloměru R! Vyhledejme v bodě 1 šroubovice a' tečnu, půdorys ${}^1\overline{P_1, 1}$ je tečnou kružnice a_1' a má délku rovnou oblouku $\widehat{P_1 1}$ mezi stopou P šroubovice a' a půdorysem dotykového bodu 1. Tato tečna je rovnoběžná s druhou průmětnou a svírá s π úhel φ, úhel, který svírají všechny tečny šroubovice a' s rovinou π. Veďme $P_2V_2 \parallel {}^1P_2 1$! $V_2O_2 = v^0 = v : 2\pi$, kde v je výška závitu šroubovice a'. Plocha kuželová, která má bod V za svůj vrchol a kružnici k kolem O poloměrem R opsanou za základní křivku, obsahuje rovnoběžky ke všem tečnám šroubovice a', je to *řídící plocha kuželová* rozvinutelné šroubové plochy, určené šroubovicí a'.

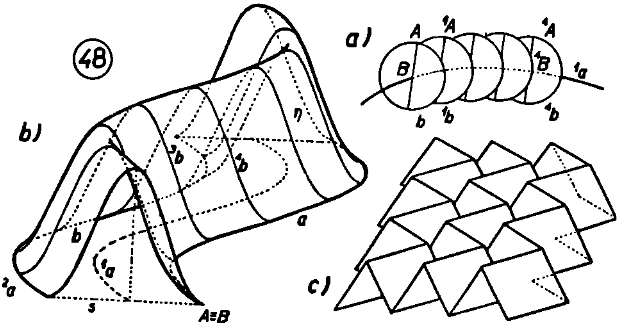
Zvolme nyní světelný paprsek s přímo bodem V a sestrojme vržený stín V' bodu V na rovinu π, v níž leží základní křivka kuželové plochy (V, k)! Vytkneme-li nyní libovolnou kružnici tvořící b plochy vinutého sloupu η o středu M na křivce a', tu víme, že se podle ní dotýká plochy η plocha válcová, jejíž osou je tečna t šroubovice řídící a' v bodě M. Veďme s touto tečnou bodem V rovnoběžku V^1T, jejíž stopa musí zapadnouti do k. Přímka ${}^1TV'$ je vržený stín této přímky na rovině π pro světelné paprsky směru s. Je to směr vržených stínů povrchových přímek válcové plochy, která se podél b plochy η dotýká a proto, vedeme-li k b tečny rovnoběžné s ${}^1TV'$, jsou dotykové body I, II těchto tečen body, jimiž procházejí meze stínu vlastního pomocné dotykové plochy válcové plochy η podél kružnice b a proto i dva body meze vlastního stínu plochy η.

Otočme bod V' okolo osy o ve směru stoupání šroubovice a' o pravý úhel do bodu W! Tento bod označme jménem *světelný pól* šroubové plochy η a přímku $w \parallel o$ jím procházející jmenujme *světelnou osou* plochy η pro rovnoběžné světelné paprsky se směrem s! Ježto jsme učinili $W_1O_1 \pm \pm W_1'O_1$ a ježto ${}^1T_1O_1 \pm M_1O_1$ jsou trojúhelníky $\triangle {}^1T_1O_1V_1' \cong \cong \triangle M_1O_1W_1$ a je zřejmo, že spojnice středu M_1 s W_1 vytyčuje již v b_1 oba půdorysy I, II bodů meze stínu vlastního, které jsou položeny na b. $I\,W_1$ a $II\,W_1$ jsou tu normály křivky b_1 jdoucí bodem W_1. Je tedy z toho patrno, že:

Body meze stínu vlastního plochy vinutého sloupu η jsou ony body tvořících křivek b, jejichž normály jdou světelným pólem nebo protínají světelnou osu pro daný směr světla.

Půdorys meze stínu vlastního nebo dotykové křivky válcové plochy ploše η směrem s opsané má jednoduchou konstrukci: Na paprsky jdoucí bodem W_1 nanášejí se od kružnice a_1' na obě strany úsečky, jejichž délka je rovna poloměru r kružnic tvořících b.

48



Kolmý průmět dotykové křivky válcové plochy směrem s ploše η opsané je proto na rovině π kolmé k ose plochy η konchoida kružnice a_1' pro stálou délku r a pól v bodě W_1.

Plocha vinutého sloupu byla velmi často užívána ve stavitelství románském a byzantském jako zdobný motiv, viz přílohu čís. XIX. Dnes slouží jako plocha tobogánů k vnitřní dopravě zboží, zejména pytlového v továrnách a mlýnech.

7,2. Vytvoření paraboloidů a modely ploch translačních. Je-li řídící křivka přímkou, vytvoří se plocha válcová. Ježto rovnoběžné řezy parabolické na paraboloidu (odst. 2,63) jsou křivky shodné, lze vytvořiti hyperbolický paraboloid posouváním jedné hlavní paraboly jako tvořící po druhé hlavní parabole jako řídící. Srovnej obrázky a odst. 5,2! Obecně posouváním paraboly po parabole druhé, jsou-li jejich osy v opačných polopřímkách (neboli parametry opačných znamení), vytvořuje se hyperbolický paraboloid, jsou-li v téže polopřímce parametry stejného znaménka, eliptický paraboloid.

Jsou-li paraboly řídící a tvořící o společném vrcholu a ose a v rovinách k sobě kolmých shodné, vzniká translací při nestejném znaménku parametrů orthogonální hyperbolický paraboloid, při stejném znaménku rotační paraboloid.

Každá plocha ,která je vyplněna (obr. 48a) *soustavou kružnic shodných v rovnoběžných rovinách, jejichž středy B vyplňují křivku* ^1a, *je plochou translační, kružnice jsou souhrnem jejích křivek tvořících, křivka* ^1a *je křivkou řídící.*

Totéž platí i pro pohybující se křivku rovinnou, která nemění ani tvar ani polohu, zůstávajíc stále v rovině k původní poloze rovnoběžné. V obr. 48b je zobrazena zajímavá plocha translační, která vzniká posouváním sinusoidy b po sinusoidě a. Křivky a, b jsou ve dvou k sobě kolmých rovinách.

Vytkneme-li tři dosti blízké polohy křivky b a tři blízké polohy křivky a, vzniknou čtyři malé kosodélníky o společném vrcholu M, mající u tohoto bodu M součet úhlů rovný $4\,R$. Lze přesně ukázat, že tato nepřímková plocha je *rozvinutelná*. Nahradíme-li křivky a a b lomenými čarami, dostáváme translací jedné po druhé známý v praxi používaný *rozvinutelný mnohostěn*, který lze získati formami buď složením nebo vytlačením z listu papíru (obr. 48c). Plocha válcová o řídící křivce v sinusoidě, vytlačená z papíru, dá se ohýbati kolem svých povrchových přímek, plocha translační tvaru plochy η (obr. 48a) však tento pohyb nepřipouští, rozvíjí a transformuje se pouze tlakem prováděným celými rovinami ve směru kolmém na rovinu křivky řídící a [Viz (7) str. 30 a n. II. dílu.] podél kráterových křivek a, ^2a a nejvyšší křivky plochy.