Počet pravděpodobnosti

7. Markovův jednoduchý řetěz s libovolným počtem eventualit

In: Bohuslav Hostinský (author): Počet pravděpodobnosti. Druhá část. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. pp. 49–74.

MARKOVŮV JEDNODUCHÝ ŘETĚZ S LIBOVOLNÝM POČTEM EVENTUALIT

71. Pravděpodobnosti přechodu a pravděpodobnosti prosté.

a) Konáme řadu pokusů za těchto podmínek: Každý z pokusů má za výsledek jeden z r zjevů $E_1, E_2, \ldots, E_r$. Pravděpodobnost p_{ik}, že $(n+1)$-tý pokus povede k zjevu E_k, vedl-li n-tý pokus ke zjevu E_i, nezávisí na pořadovém čísle n ani na výsledcích pokusů předcházejících před n-tým $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$. Za těchto podmínek jsou pravděpodobnosti, které patří výsledkům jednotlivých pokusů, spojeny v *jednoduchý Markovův řetěz o r eventualitách*. p_{ik} jsou *pravděpodobnosti přechodu*. Tyto pravděpodobnosti vyhovují podmínkám

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{1}$$

$$p_{ik} \geqq 0. \tag{2}$$

Rovnice (1) vyjadřuje jistotu, že, vedl-li n-tý pokus k výsledku E_i, povede $(n+1)$-tý pokus k jednomu z výsledků $E_1, E_2, \ldots, E_r$.

V odst. 59a bylo vyloženo, jak se realisuje jednoduchý Markovův řetěz o dvou eventualitách tahy ze dvou osudí, bílého a černého. V případě, že je r eventualit, realisujeme řetěz obdobně: je dáno r osudí označených zevně r různými barvami (první barvou, druhou barvou atd.). V každém osudí jsou smíchány koule těchže r barev. Zjev E_k je tah koule k-té barvy. p_{ik} je pravděpodobnost, že, vyšla-li při n-tém tahu koule i-té barvy, vyjde při $(n+1)$-tém tahu koule k-té barvy; tah koná se vždy z toho osudí, které má barvu shodnou s barvou koule tažené v tahu bezprostředně předcházejícím, a vytažená koule se vrací zpět do toho osudí, ze kterého byla vytažena.

b) K úplnému stanovení řetězu je třeba znáti pravděpodobnosti, se kterými se vyskytují zjevy $E_1, E_2, \ldots, E_r$ bezprostředně před prvním pokusem. Zavádíme předběžný (nultý) pokus; $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_r^{(0)}$ jsou pravděpodobnosti, že předběžný pokus má za výsledek resp. $E_1, E_2, \ldots, E_r$. $p_k^{(0)}$ vyhovují podmínkám

$$\sum_{k=1}^{r} p_k^{(0)} = 1, \quad p_k^{(0)} \geqq 0. \tag{3}$$

c) Zaveďme pravděpodobnosti $P_{ik}^{(n)}$, že $(p + n)$-tý pokus dá výsledek E_k, dal-li p-tý pokus výsledek E_i. Tyto veličiny vyhovují následujícím rovnicím, jichž správnost vyplývá přímo z vět o pravděpodobnosti úhrnné a složené (srv. odst. 59):

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{\beta=1}^{r} \cdots \sum_{\omega=1}^{r} p_{i\alpha} p_{\alpha\beta} \ldots p_{\omega k}, \tag{4}$$

kde se sčítá podle $(n - 1)$ indexů $\alpha, \beta, \ldots, \omega$,

$$P_{ik}^{(m+n)} = \sum_{j=1}^{r} P_{ij}^{(m)} P_{jk}^{(n)}, \quad P_{ik}^{(1)} = p_{ik}; \; m, n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_{s=1}^{r} P_{is}^{(n-1)} p_{sk} = \sum_{s=1}^{r} p_{is} P_{sk}^{(n-1)}, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)} = 1; \; i = 1, 2, \ldots, r; \; n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

d) *Prostá pravděpodobnost* $p_k^{(n)}$, že n-tý pokus bude míti za výsledek zjev E_k, souvisí s pravděpodobnostmi $p_j^{(0)}$ a $P_{ik}^{(n)}$ podle rovnic

$$p_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{r} p_j^{(0)} P_{jk}^{(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

$$p_k^{(m+n)} = \sum_{j=1}^{r} p_j^{(m)} P_{jk}^{(n)}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \; n = 1, 2, \ldots; \tag{9}$$

konečně platí

$$\sum_{k=1}^{r} p_k^{(n)} = 1, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Kdyby bylo známo, že předběžný pokus vedl ke zjevu E_i, specialisovala by se rovnice (8) tak, že všechny hodnoty $p_j^{(0)}$ by se rovnaly nule až na $p_i^{(0)}$, která by byla rovna 1, takže bychom měli na místo (8)

$$p_k^{(n)} = P_{ik}^{(n)}; \tag{11}$$

prostá pravděpodobnost $p_k^{(n)}$ by se rovnala pravděpodobnosti $P_{ik}^{(n)}$.

72. Proměnná veličina přiřaděná výsledkům pokusů. Přiřaďme každému zjevu E_k určitou veličinu α_k; n-tému pokusu přiřadíme pak veličinu $x^{(n)}$ nebo zkrátka x,*) která se rovná α_k, byl-li zjev E_k výsledkem n-tého pokusu.

73. Geometrický obraz řetězu. Výsledky postupně prováděných pokusů znázorníme geometricky takto: Budiž dáno r pevných bodů $A_1, A_2, \ldots, A_r$ odpovídajících po řadě zjevům $E_1, E_2, \ldots, E_r$. Pohyblivý bod B pohybuje se tak, že po každém pokuse splývá s bodem A_k odpovídajícím tomu zjevu E_k, který se objevil jakožto výsledek pokusu. Konáme-li postupně řadu pokusů, jichž pravděpodobnosti jsou spojeny v řetěz, koná bod B pohyb, který přirovnáme k Brownovu pohybu. Hodnota veličiny $x^{(n)}$, přiřaděná výsledku n-tého pokusu (viz odst. 72) mění se podle polohy bohu B; splývá-li B s A_k, je $x^{(n)} = \alpha_k$. $P_{ik}^{(n)}$ je pravděpodobnost, že, byl-li bod B původně v poloze A_i (a měla-li tedy proměnná x původně hodnotu α_i), po dalších n pokusech bude B v poloze A_k (a že tedy proměnná x bude míti nakonec hodnotu α_k).

*) Kdybychom výslovně srovnávali hodnotu proměnné veličiny po m-tém pokusu s její hodnotou po n-tém, bylo by nutno rozlišovati $x^{(m)}$ a $x^{(n)}$. Máme-li však na mysli obecně proměnnou veličinu závislou na výsledcích pokusů, stačí psáti x.

74. Střední hodnota proměnné veličiny závislé na výsledcích jednotlivých pokusů. Označme symbolem $P(S)$ pravděpodobnost, že je splněn vztah S; S je buď nějaká rovnice, nebo nerovnost, nebo soustava nerovností a pod. Veličina $x^{(n)}$ přiřaděná výsledku n-tého pokusu ve smyslu odst. 72 rovná se jedné z hodnot α_k a platí

$$P(x^{(n)} = \alpha_k) = p_k^{(n)}, \; k = 1, 2, \ldots, r;$$

$p_k^{(n)}$ je prostá pravděpodobnost ve smyslu odst. 71d. Střední hodnotu $E(x^{(n)})$ veličiny $x^{(n)}$ označíme $a^{(n)}$; je tedy

$$a^{(n)} = E(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^{r} p_k^{(n)} \alpha_k. \tag{1}$$

Předpokládejme nyní, že před prvním pokusem začínáme s určitým zjevem E_i; pak je $p_i^{(0)} = 1$, $p_j^{(0)} = 0$ pro $j \neq i$ a platí rovnice (11), odst. 71. Místo předchozí rovnice (1) budeme tedy míti

$$a_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)} \alpha_k, \tag{2}$$

střední hodnotu $a_i^{(n)}$ píšeme nyní s indexem i, poněvadž je to střední hodnota podmíněná předpokladem $p_i^{(0)} = 1$.

75. Markovova věta o limitě střední hodnoty. a) Markov dokázal větu: *Jsou-li všechny pravděpodobnosti přechodu p_{ik} kladné, t. j.*

$$p_{ik} > 0, \; i, k = 1, 2, \ldots, r, \tag{1}$$

má střední hodnota $a_i^{(n)}$ veličiny $x^{(n)}$, roste-li n do nekonečna, určitou limitu a nezávislou na indexu i.

Markovův důkaz z r. 1907 užívá postupu, který nazveme *methodou postupných aritmetických středů*. Vylučme z rovnice (2), odst. 74 veličinu $P_{ij}^{(n)}$ užívajíce druhé rovnice (6), odst. 71. Vychází

$$a_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{s=1}^{r} p_{is} P_{sk}^{(n-1)} \alpha_k = \sum_{s=1}^{r} p_{is} a_s^{(n-1)} \qquad (2)$$

a tedy

$$a_i^{(n)} - a_j^{(n)} = \sum_{s=1}^{r} (p_{is} - p_{js})\, a_s^{(n-1)}.$$

Podmínka (1), odst. 71 dává

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} - \sum_{k=1}^{r} p_{jk} = 1 - 1 = 0.$$

Proto v řadě r rozdílů

$$p_{i1} - p_{j1},\ p_{i2} - p_{j2},\ \ldots,\ p_{ir} - p_{jr}$$

bude několik kladných veličin $\beta_1, \beta_2, \ldots$ a několik záporných $-\beta'_1, -\beta'_2, \ldots$ Každé z čísel β_k, β'_k je kladné a poněvadž je menší než určitá pravděpodobnost p_{uv} a poněvadž

$$\sum_{v=1}^{r} p_{uv} = 1,\ u = 1, 2, \ldots, r,$$

je

$$0 < \Sigma\beta_k = \Sigma\beta'_k = h < 1.$$

Číslo h závisí na volbě indexů i a j; budiž H největší hodnota, které může h dosáhnouti vhodnou volbou indexů i a j. Patrně je $0 < H < 1$.

Je-li $\Delta^{(n-1)}$ rozdíl mezi největším a nejmenším z čísel

$$a_1^{(n-1)},\ a_2^{(n-1)},\ \ldots,\ a_r^{(n-1)}, \qquad (3)$$

je

$$|a_i^{(n)} - a_j^{(n)}| < |\sum_s \beta_s a_s^{(n-1)} - \sum_s \beta'_s a_s^{(n-1)}| < H\Delta^{(n-1)}$$

a tedy také

$$\Delta^{(n)} < H\Delta^{(n-1)}.$$

Napišme tuto nerovnost pro $n, (n-1), \ldots, 2$. Násobíce všechny nerovnosti tak vzniklé dostaneme

$$\Delta^{(n)} = H^n \Delta^{(1)},$$
$$\lim_{n\to\infty} \Delta^{(n)} = 0. \tag{4}$$

Podle (2) je $a_i^{(n)}$ pro libovolné i obecný aritmetický střed veličin (3). Roste-li tedy n, maximum v řade (3) nemůže se zvětšovati a minimum se nemůže zmenšovati. Rozdíl $\Delta^{(n-1)}$ maxima a minima konverguje k nule dle (4); tudíž maximum i minimum mají společnou limitu a, když n roste do nekonečna. Je tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_i^{(n)} = a; \tag{5}$$

tím je Markovova věta dokázána.

b) Rovnice (5) platí pro libovolně volené hodnoty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ veličiny x. Volme je nyní takto (k je určitý pevný index)

$$\alpha_k = 1,\ \alpha_j = 0 \text{ pro } j \neq k;$$

vzorec (2), odst. 74 ukazuje, že v tomto případě

$$a_i^{(n)} = P_{ik}^{(n)}.$$

Poněvadž dle (5) má $a_i^{(n)}$ limitu nezávislou na i, platí totéž o $P_{ik}^{(n)}$, a máme

$$\lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)} = P_k,\ k = 1, 2, \ldots, r. \tag{6}$$

Pravděpodobnost $P_{ik}^{(n)}$, že n postupně provedených pokusů povede od zjevu E_i k E_k, má limitu závislou jen na k, roste-li n do nekonečna.

Rovnice (2), odst. 74 dává, pro případ libovolných hodnot $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, roste-li n do nekonečna:

$$\lim_{n\to\infty} a_i^{(n)} = a = \sum_{k=1}^{r} P_k \alpha_k. \tag{7}$$

Známe-li tedy veličiny $P_1, P_2, \ldots, P_k$, lze a vypočísti dle (7). Poznamenejme, že prostá pravděpodobnost $p_k^{(n)}$, že při n-tém pokuse se vyskytne zjev E_k, má za limitu P_k; neboť podle rovnice (8), odst. 71 je

$$\lim_{n\to\infty} p_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{r} p_j^{(0)} P_k = P_k, \tag{8}$$

přihlédneme-li k podmínce (10), odst. 71 pro $n = 0$. Podle (1), odst. 74 je

$$\lim_{n\to\infty} E(x^{(n)}) = a = \sum_{k=1}^{r} P_k \alpha_k. \tag{7a}$$

c) Roste-li n do nekonečna, dává první rovnice (6), odst. 71

$$P_k - \sum_{j=1}^{r} P_j p_{jk} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, r \tag{9}$$

a z rovnice (7), odst. 71 plyne současně, že

$$\sum_{k=1}^{r} P_k = 1. \tag{10}$$

Rovnicemi (9) *a* (10) *jsou veličiny* $P_1, P_2, \ldots, P_r$ *jednoznačně určeny*. Determinant soustavy r rovnic (9) vzhledem k neznámým $P_1, P_2, \ldots, P_r$

$$\begin{vmatrix} 1 - p_{11}, & -p_{21}, & \ldots, & -p_{r1} \\ -p_{12}, & 1 - p_{22}, & \ldots, & -p_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{1r}, & -p_{2r}, & \ldots, & 1 - p_{rr} \end{vmatrix}$$

rovná se nule; o tom se přesvědčíme přičtouce 2., 3., ... a r-tý řádek k prvnímu a přihlédnouce k podmínce (1), odst. 71. Vzhledem k (1), odst. 75 a k (5), odst. 71 *jsou* P_k *vesměs čísla kladná*.

d) Vraťme se k případu, kdy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ mají libovolné hodnoty. Z rovnice (2), odst. 74 následuje, že

$$E\left(\frac{x^{(n)}}{m}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)} \alpha_k}{m};$$

v této rovnici značí $x^{(n)}$ veličinu přiřaděnou n-tému pokusu ve smyslu odst. 73 a m, n celá kladná čísla. Je tedy

$$E\left(\frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(m)}}{m}\right) = \frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{r}\alpha_k \sum_{n=1}^{m} P_{ik}^{(n)}\right];$$

Vzhledem k rovnici (6) je

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} P_{ik}^{(n)} = P_k$$

a tedy podle (7)

$$\lim_{m\to\infty} E\left(\frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(m)}}{m}\right) = \sum_{k=1}^{r}\alpha_k P_k = a. \quad (11)$$

Limita a střední hodnoty veličiny $a_i^{(m)}$ se tedy jeví jakožto střední hodnota aritmetického středu veličin $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$, roste-li m do nekonečna.

76. Dodatek k Markovově větě. K předpokladům vyjádřeným rovnicemi (1), odst. 71 a (1), odst. 75, totiž

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, r;\ p_{ik} > 0 \quad (1)$$

připojme další předpoklad

$$\sum_{i=1}^{r} p_{ik} = 1,\ k = 1, 2, \ldots, r. \quad (2)$$

Jsou-li všechny předpoklady (1) a (2) splněny, plyne z rovnic (9), odst. 75, že

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_r$$

a, přihlédneme-li k rovnici (10), odst. 75,

$$\lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)} = P_1 = P_2 = \ldots = P_r = \frac{1}{r} \quad (3)$$

pro $i, k = 1, 2, \ldots, r$. Naopak snadno se odůvodní, že z rovnic (1) a (3) plynou rovnice (2). Shrneme takto:

Jsou-li v matici

$$\left\|\begin{matrix} p_{11}, & p_{12}, & \ldots, & p_{1r} \\ p_{21}, & p_{22}, & \ldots, & p_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{r1}, & p_{r2}, & \ldots, & p_{rr} \end{matrix}\right\| \tag{4}$$

všechny prvky kladné a je-li součet prvků v každém řádku roven jednotce, zní podmínka, aby všechny pravděpodobnosti $P_{ik}^{(n)}$ *měly pro* $n \to \infty$ *tutéž limitu* $1 : r$, *takto: Součet prvků v každém sloupci matice musí se rovnati jednotce.*

V případě, že podmínky (2) jsou splněny, zní rovnice (7), odst. 75 takto:

$$a = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r} \alpha_k .$$

77. Zvláštní případ, kdy některé pravděpodobnosti přechodu jsou rovny nule. Důkaz, že existují limity veličin $a_i^{(n)}$ a $P_{ik}^{(n)}$ pro $n \to \infty$, podaný v odst. 75, předpokládá, že všechny pravděpodobnosti p_{ik} jsou kladné. Ale limita existuje i v jiných případech, kdy některé z veličin p_{ik} jsou rovny nule.

Budiž Δ hlavní úhlopříčka determinantu $|p_{ik}|$ stupně r-tého složená z elementů p_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, r)$; Δ_i pak příčka s ní rovnoběžná obsahující elementy $p_{i1}, p_{i+1,2}, p_{i+2,3}, \ldots, p_{r,r-i+1}$, a Δ_i' příčka rovnoběžná s Δ po druhé straně s elementy $p_{1i}, p_{2,i+1}, p_{3,i+2}, \ldots, p_{r-i+1,r}$ $(i = 2, 3, \ldots)$. Předpokládáme, že

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} = 1, \; i = 1, 2, \ldots, r, \tag{1}$$

že všechny elementy obsažené v příčkách Δ, Δ_2 a Δ_2' jsou kladné a že ostatní všechny elementy jsou rovny nule. Utvořme determinant r-tého stupně $|P_{ik}^{(2)}|$ a označme v něm příčky obdobně jako dříve písmeny Δ, Δ_2, Δ_2' atd.; vzhledem k rovnici (6), odst. 71 snadno se odůvodní, že v novém determinantu budou všechny elementy na příčkách Δ, Δ_2, Δ_2',

Δ_3 a Δ_3' kladné. Utvořme dále determinant $|P_{ik}^{(3)}|$; v něm budou mimo to i všechny elementy příček Δ_4 a Δ_4' kladné atd. Pro dosti veliké n budou všechny veličiny $P_{ik}^{(n)}$ ($i, k = 1, 2, \ldots, r$) kladné. Dokážeme větu:

Splňují-li veličiny p_{ik} rovnice (1) *a jsou-li příslušné veličiny $P_{ik}^{(m)}$ pro určité m všechny kladné, platí*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)} = P_k, \sum_{k=1}^{r} P_k = 1.$$

Důkaz provedeme takto: Poněvadž pro uvažované m jsou $P_{ik}^{(m)}$ kladná čísla, jsou také čísla

$$P_{ik}^{(m+1)} = \sum_{s=1}^{r} p_{is} P_{sk}^{(m)};\ i, k = 1, 2, \ldots, r \tag{2}$$

kladná a vůbec čísla $P_{rk}^{(n)}$ jsou kladná pro každé $n > m$. Největší z čísel

$$P_{1k}^{(m)}, P_{2k}^{(m)}, \ldots, P_{rk}^{(m)}$$

označíme L_m, nejmenší pak l_m; obě tyto extrémní hodnoty závisí obecně na indexu k. S rostoucím n se L_n nikdy nezvětšuje a l_n se nikdy nezmenšuje, neboť vzhledem k rovnicím (1) a (2) je každé $P_{ik}^{(m+1)}$ jakousi střední hodnotou veličin $P_{sk}^{(m)}$, ($s = 1, 2, \ldots, r$). Proto bude

$$l_n < P_{ik}^{(m+n)} < L_n. \tag{3}$$

Kladná čísla $P_{ik}^{(m)}$ vyhovují rovnici (7), odst. 71 a tedy všem těm podmínkám, které musejí splňovati veličiny p_{ik}, aby platila rovnice (6), odst. 75. Posloupnost

$$P_{ik}^{(m)}, P_{ik}^{(2m)}, P_{ik}^{(3m)}, \ldots$$

má tedy limitu P_k nezávislou na i. Obě posloupnosti

$$l_m, l_{2m}, l_{3m}, \ldots \text{ a } L_m, L_{2m}, L_{3m}, \ldots$$

mají rovněž P_k za limitu a vzhledem k (3) má $P_{ik}^{(n)}$ stejnou limitu pro $n \to \infty$.

K existenci limity výrazu $P_{ik}^{(n)}$ pro $n \to \infty$ tedy stačí, aby byly splněny rovnice (1) a aby šikmé příčky Δ, Δ_2 a Δ_2' v determinantu $|p_{ik}|$ byly složeny z prvků vesměs kladných.

78. Charakteristická rovnice. Utvořme z pravděpodobností přechodu p_{ik}, které vyhovují podmínkám

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, r;\ p_{ik} > 0,\ i, k = 1, 2, \ldots, r \quad (1)$$

determinant r-tého stupně $D_r(\lambda)$ závislý na proměnné λ

$$D_r(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda p_{11}, & -\lambda p_{12}, & \ldots, & -\lambda p_{1r} \\ -\lambda p_{21}, & 1 - \lambda p_{22}, & \ldots, & -\lambda p_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda p_{r1}, & -\lambda p_{r2}, & \ldots, & 1 - \lambda p_{rr} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Podle odst. 75c vyhovují limity $P_1, P_2, \ldots, P_r$ soustavě rovnic

$$P_k - \sum_{j=1}^{r} p_{jk} P = 0,\ k = 1, 2, \ldots, r, \quad (3)$$

která má determinant $D_r(1)$ rovný nule.

Veličiny P_k jsou kladná čísla a jejich poměry jsou totožné s poměry minorů příslušných k elementům libovolného sloupce v determinantu $D_r(1)$; žádný minor determinantu se nerovná nule.

Napišme soustavu rovnic sdruženou k (3):

$$Q_k - \sum_{j=1}^{r} p_{kj} Q_j = 0,\ k = 1, 2, \ldots, r. \quad (3a)$$

Vzhledem k (1) vyhovíme této soustavě kladouce

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_r.$$

Z toho plyne, že všechny minory příslušné k elementům libovolného řádku v determinantu $D_r(1)$ jsou si rovny. Srovnáme-li s tím, co jsme výše uvedli o poměrech minorů příslušných k elementům jednoho sloupce, docházíme k závěru, že všechny minory determinantu $D_r(1)$ mají totéž znamení. Proto je

$$D_r'(1) = -[M_1(1) + M_2(1) + \ldots + M_r(1)] \neq 0,$$

kde $D_r'(\lambda)$ značí derivaci determinantu $D_r(\lambda)$ dle λ a $M_1(1)$, $M_2(1), \ldots, M_r(1)$ minory příslušné elementům hlavní úhlopříčky v determinantu $D_r(1)$. To znamená: *Jsou-li splněny podmínky* (1), *má charakteristická rovnice*

$$D_r(\lambda) = 0 \tag{2a}$$

jednoduchý kořen $\lambda = 1$. *Limitní hodnoty* P_k *pravděpodobností* $P_{ik}^{(n)}$ *pro* $n \to \infty$ *jsou úměrny minorům, které patří k elementům libovolného sloupce v determinantu* $D_r(1)$.

Poznámka. Charakteristická rovnice (2a), má vždy kořen rovný 1, tedy i když některé z veličin p_{ik} jsou rovny nule.

79. Pravděpodobnosti přechodu jakožto funkce kořenů charakteristické rovnice. a) Předpokládáme stále, že veličiny p_{ik} vyhovují podmínkám (1), odst. 71; připouštíme, že některé z nich mohou býti rovny nule.

Vezměme pak v úvahu dvě soustavy rovnic pro neznámé $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ a $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$:

$$\varphi_k - \lambda \sum_{s=1}^{r} p_{sk}\varphi_s = 0, \quad \psi_h - \lambda \sum_{s=1}^{r} p_{hs}\psi_s = 0, \tag{1}$$
$$k, h = 1, 2, \ldots, r,$$

kde λ je konstanta. Soustavy jsou homogenní vzhledem k neznámým φ_k resp. ψ_h; podmínka řešitelnosti (nehledíme-li k řešení $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_r = \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_r = 0$) pro jednu i pro druhou soustavu zní

$$D_r(\lambda) = 0; \tag{2}$$

λ musí tedy býti kořenem charakteristické rovnice (odst. 78). Víme, že tato rovnice má kořen $\lambda = 1$. Pro $\lambda = 1$ přecházejí soustavy (1) v soustavy

$$\varphi_r - \sum_{s=1}^{r} p_{sk}\varphi_s = 0, \ \psi_h - \sum_{s=1}^{r} p_{hs}\psi_s = 0,$$

kterým vyhovují veličiny — viz odst. 75c a 78 —

$$\varphi_k = P_k, \ k = 1, 2, \ldots, r; \ \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_r = \text{const.}$$

V dalším předpokládáme, že charakteristická rovnice (2) má r různých a tedy jednoduchých kořenů. Označíme je takto:

$$\lambda_0 = 1, \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}.$$

Poněvadž veličiny φ_k a ψ_h závisí na tom, který z kořenů dosadíme na místo λ do rovnic (1), píšeme na místo (1) obě soustavy v tomto tvaru

$$\varphi_{kj} - \lambda_j \sum_{s=1}^{r} p_{sk}\varphi_{sj} = 0, \ k = 1, 2, \ldots, r, \tag{3}$$

$$\psi_{hj} - \lambda_j \sum_{s=1}^{r} p_{hs}\psi_{sj} = 0, \ h = 1, 2, \ldots, r. \tag{3a}$$

Pro každý kořen λ_j dostáváme tedy soustavu rovnic (3) pro neznámé φ_{kj}, $(k = 1, 2, \ldots, r)$ a soustavu (3a) pro neznámé ψ_{hj}, $(h = 1, 2, \ldots, r)$. Poněvadž pak

$$\sum_{h=1}^{r} \varphi_{hg}\psi_{hj} = \lambda_g \sum_{s=1}^{r} \left(\sum_{h=1}^{r} p_{sh}\psi_{hj}\right) \varphi_{sg} = \frac{\lambda_g}{\lambda_j} \sum_{s=1}^{r} \varphi_{sg}\psi_{sj},$$

je

$$(\lambda_j - \lambda_g) \sum_{h=1}^{r} \varphi_{hg}\psi_{hj} = 0.$$

Pro dva *různé kořeny* λ_j, λ_g platí tedy

$$\sum_{h=1}^{r} \varphi_{hg}\psi_{hj} = 0, \ g, j = 0, 1, 2, \ldots, r-1; \ g \neq j. \tag{4}$$

Je-li $g = j$, je součet na levé straně rovnice (4) obecně různý od nuly. Předpokládejme, že tomu tak je, a násobme čísla $\varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \ldots, \varphi_{rj}$ vhodnou konstantou tak, aby (znásobená čísla značíme zase φ_{hj})

$$\sum_{h=1}^{r}\varphi_{hj}\psi_{hj} = 1,\ j = 0, 1, 2, \ldots, r - 1. \tag{5}$$

Tím nejsou veličiny φ_{hj} ani ψ_{hj} jednoznačně stanoveny, ale jsou určeny hodnoty součinů $\varphi_{hj}\psi_{hj}$; násobíme-li všechny veličiny φ_{hj}, $(h = 1, 2, \ldots, r)$ určitou konstantou, musí se všechny veličiny ψ_{hj}, $(h = 1, 2, \ldots, r)$ děliti toutéž konstantou, aby bylo vyhověno podmínkám (5). Součin $\varphi_{hj}\psi_{hj}$ se při tom nemění.

Pro kořen $\lambda_0 = 1$ je (viz rovnice (3) a (3a), odst. 78)

$$\varphi_{k0} = P_k,\ \psi_{k0} = 1,\ k = 1, 2, \ldots, r \tag{6}$$

a rovnice (5) dávají známé podmínky (10), odst. 75. Dosadíme-li do rovnic (4) $j = 0$, obdržíme

$$\sum_{h=1}^{r}\varphi_{hg} = 0,\ g = 1, 2, \ldots, r - 1. \tag{7}$$

b) Hledíme nyní vyjádřiti veličiny p_{ik} veličinami φ_{kj}, ψ_{hj} a kořeny λ_j. Za tím účelem napíšeme rovnici (3) pro určitě zvolené k a dosazujeme do ní za j postupně hodnoty 0, 1, 2, ..., $(r - 1)$. Tak dostaneme soustavu r rovnic pro r neznámých veličin $p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{rk}$. Determinant rovnic nezávisí na volbě indexu k, takže řešením soustavy obdržíme vzorec

$$p_{ik} = \sum_{g=0}^{r-1} c_{ig}\frac{\varphi_{kg}}{\lambda_g},\ i = 1, 2, \ldots, r.$$

Dosaďme nyní do rovnice (3a) na místo veličiny p_{hs} pravou stranu právě odvozeného vzorce (se záměnou indexů i, k za h, s); vychází

$$\psi_{hj} = \lambda_j \sum_{s=1}^{r}\sum_{g=0}^{r-1} c_{hg}\frac{\varphi_{sg}\varphi_{sj}}{\lambda_g}.$$

Součet vzhledem k s dá podle (4) nulu, pokud $g \neq j$; v případě, že $g = j$ dostáváme 1 podle (5). Je tedy

$$\psi_{hj} = c_{hj};$$

z toho plyne pro pravděpodobnosti přechodu:

$$p_{ik} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\varphi_{kj}\psi_{ij}}{\lambda_j}. \tag{7a}$$

Abychom určili $P_{ik}^{(n)}$, užijeme rovnice (4), odst. 71. Pro $n = 2$ je

$$P_{ik}^{(2)} = \sum_{s=1}^{r} p_{is}p_{sk} = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{s=1}^{r} \frac{\varphi_{sj}\psi_{ij}\varphi_{kl}\psi_{sl}}{\lambda_j\lambda_l}.$$

Součet podle s dá vzhledem k (4) a (5) nulu, pokud $l \neq j$, a jednotku pro případ, že $l = j$. Součet dle l se tedy redukuje na jediný člen odpovídající indexu $l = j$ a máme

$$P_{ik}^{(2)} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\varphi_{kj}\psi_{ij}}{\lambda_j^2}.$$

Docela podobně dostaneme užívajíce rovnice (6), odst. 71 pro

$$P_{ik}^{(3)} = \sum_{s=1}^{r} P_{is}^{(2)} p_{sk} = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{s=1}^{r} \frac{\varphi_{sj}\psi_{ij}\varphi_{kl}\psi_{sl}}{\lambda_j^2\lambda_l} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\varphi_{kj}\psi_{ij}}{\lambda_j^3}$$

a obecně

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\varphi_{kj}\psi_{ij}}{\lambda_j^n}. \tag{7b}$$

Rovnice (7b) zahrnuje hořejší rovnici (7a) pro p_{ik} jako speciální případ, neboť $P_{ik}^{(1)} = p_{ik}$.

Vypišme v součtu na pravé straně poslední rovnice člen odpovídající indexu $j = 0$ zvláště; vzhledem k (6) bude

$$P_{ik}^{(n)} = P_k + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varphi_{kj}\psi_{ij}}{\lambda_j^n}. \tag{8}$$

Formuli (8) odvodil *V. Romanovsky*.

Veličiny $P_{ik}^{(n)}$, a tedy také veličiny $p_{ik} = P_{ik}^{(1)}$, jsou takto vyjádřeny jako bilineární funkce dvou řad veličin

$$P_k, \varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \ldots, \varphi_{k,r-1};$$
$$1, \psi_{i1}, \psi_{i2}, \ldots, \psi_{i,r-1};$$

veličiny první řady jsou nezávislé na i, veličiny druhé řady nezávislé na k. Z formule (8) plyne, že žádný kořen λ_j charakteristické rovnice nemůže míti absolutní hodnotu menší než 1. Abychom to dokázali, dokažme nejprve, že existuje aspoň jeden pár indexů i a k takový, že

$$\varphi_{kj}\psi_{ij} \neq 0, \; j = 1, 2, \ldots, r - 1. \tag{9}$$

Soustava homogenních rovnic (3) má totiž pro kterýkoli z kořenů nenulové řešení takové, že aspoň jedna z veličin φ_{kj}, ($k = 1, 2, \ldots, r$) se nerovná nule. Rovněž tak soustava (3a) má řešení takové, že aspoň jedna z veličin ψ_{hj}, ($h = 1, 2, \ldots, r$) se nerovná nule. Lze tedy k danému λ_j voliti i a k, aby platila nerovnost (9). Kdyby uvažovaný kořen λ_j byl co do absolutní hodnoty menší než 1, rostl by příslušný člen ve výraze (8) do nekonečna s rostoucím n. To však není možno, poněvadž veličiny $P_{ik}^{(n)}$ jsou kladné a menší než 1 vzhledem k rovnici (7), odst. 71. Jsou-li všechny kořeny λ_j, ($j = 1, 2, \ldots, r - 1$) co do absolutní hodnoty větší než 1, konverguje pravá strana rovnice (8) k P_k pro $n \to \infty$ a máme větu: *Jsou-li kořeny charakteristické rovnice $D_r(\lambda) = 0$ vesměs různy jeden od druhého a není-li žádný z nich roven -1 nebo komplexnímu číslu s absolutní hodnotou rovnou 1, má $P_{ik}^{(n)}$ limitu (když n roste do nekonečna) nezávislou na i.*

c) Kdyby některý z kořenů λ_j byl roven buď -1 nebo komplexnímu číslu s absolutní hodnotou rovnou 1, neměla by pravá strana rovnice (8) limitu pro $n \to \infty$. O takovém případě jsme uvažovali v odst. 62. Tehdy bylo

$$r = 2, \; p_{11} = 0, \; p_{22} = 0, \; p_{12} = 1, \; p_{21} = 1;$$

příslušná charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} 1, & -\lambda \\ -\lambda, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

má kořeny $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -1$. Podle (3), odst. 78 je

$$P_1 = P_2 = \tfrac{1}{2};$$

rovnice (3) a (3a), odst. 79 znějí (pro $\lambda_1 = -1$)

$$\varphi_{11} + \varphi_{21} = 0, \quad \psi_{11} + \psi_{21} = 0$$

a tedy, vzhledem k (5),

$$\varphi_{11} = 1, \quad \varphi_{21} = -1, \quad \psi_{11} = \tfrac{1}{2}, \quad \psi_2 = -\tfrac{1}{2},$$

takže rovnice (7) dává v souhlase s úvahami odst. 62

$$P_{11}^{(n)} = P_1 + \frac{\varphi_{11}\psi_{11}}{\lambda_1} = \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

P_1 nemá ovšem význam limity; P_1 a P_2 jsou definovány jakožto řešení rovnic (3), odst. 78.

80. O různých methodách k výpočtu disperse. Podle odst. 75d má výraz

$$\frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)}}{n},$$

kde $x^{(k)}$ jsou veličiny přiřaděné výsledkům pokusů (odst. 72), určitou střední hodnotu a tato střední hodnota má limitu a:

$$a = \lim_{n \to \infty} E \frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)}}{n}.$$

Předpokládáme stále, že všechny pravděpodobnosti p_{ik} jsou kladné. Veličina

$$E \frac{[x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)} - na]^2}{n}$$

nazývá se *disperse* a má podle Markova určitou limitní hodnotu pro $n \to \infty$.

Markov odvodil původně vzorec pro dispersi na základě t. zv. *vytvořující funkce*; jeho vzorec pak byl různě upravován.

J. Potoček odvodil jiný vzorec užívaje úvah z theorie funkcí za předpokladu, že všechny p_{ik} jsou kladné.

Za stejného předpokladu, avšak algebraickou methodou odvodil M. Fréchet stejný výsledek.

Připustíme-li, že má charakteristická rovnice vesměs jednoduché kořeny a že mezi nimi není ani —1, ani komplexní číslo s absolutní hodnotou rovnou 1, lze odvoditi přímo vzorec pro dispersi bez předpokladu, že všechny p_{ik} jsou kladné. Tento důkaz uvedu v odst. 81.*)

81. Výpočet disperse. a) Předpokládáme, že charakteristická rovnice $D_r(\lambda) = 0$ má r jednoduchých kořenů a že mezi nimi není ani —1 ani komplexní číslo s absolutní hodnotou rovnou 1. Pak platí rovnice (8), odst. 79 a

$$\lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)} = P_k;$$

dále je podle rovnice (7a), odst. 75

$$\lim_{n\to\infty} Ex^{(n)} = a = \sum_{k=1}^{r} P_k \alpha_k.$$

Vyjdeme z rovnice

$$[\sum_{n=1}^{N}(x^{(n)} - a)]^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}(x^{(n)} - a)^2 + 2\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-n}(x^{(n)} - a)(x^{(n+m)} - a);$$

střední hodnota levé strany dělené N rovná se dispersi. Abychom utvořili střední hodnotu pravé strany, uvažme, že

$$P[x^{(n)} = \alpha_k, \text{ je-li } x^{(0)} = \alpha_i] = P_{ik}^{(n)},$$

$$P[x^{(n+m)} = \alpha_k, \text{ je-li } x^{(n)} = \alpha_i] = P_{ik}^{(m)},$$

tedy

*) Přehled prací o řetězech, které mají souvislost s theorií disperse a příslušné citáty jsou uvedeny v odst. 93 a 94.

$$E\Big[\sum_{n=1}^{N}(x^{(n)} - a)\Big]^2 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)}(\alpha_k - a)^2 +$$
$$+ 2\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-n}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} P_{ik}^{(n)} P_{kl}^{(m)}(\alpha_k - a)(\alpha_l - a). \qquad (1)$$

Počítejme postupně oba členy na pravé straně rovnice (1). Dosadíme-li do prvního členu za $P_{ik}^{(n)}$ pravou stranu rovnice (8), odst. 79, obdržíme po úpravě součet dvou výrazů; první z nich je

$$N \cdot \sum_{k=1}^{r} P_k(\alpha_k - a)^2 \qquad (\alpha)$$

a druhý je

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{r-1}\frac{\varphi_{kj}\psi_{ij}}{\lambda_j^n}(\alpha_k - a)^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{r-1}\frac{1-\lambda_j^{-N}}{\lambda_j - 1}\,.$$
$$\cdot\, \varphi_{kj}\psi_{ij}(\alpha_k - a)^2. \qquad (\beta)$$

Druhý člen na pravé straně rovnice (1) nabude, dosadíme-li příslušné výrazy za $P_{ik}^{(n)}$ a $P_{kl}^{(n)}$, tvaru

$$2\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-n}\sum_{k=1}^{r}\left[P_k + \sum_{j=1}^{r-1}\frac{\varphi_{kj}\psi_{sj}}{\lambda_j^n}\right](\alpha_k - a)\,.$$
$$\cdot \sum_{l=1}^{r}\left[P_l + \sum_{s=1}^{r-1}\frac{\varphi_{ls}\psi_{ks}}{\lambda_s^m}\right](\alpha_l - a).$$

Proveďme násobení dvojčlenů v lomených závorkách; dostaneme celkem čtyři výrazy:

První výraz

$$2\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-n}\sum_{k=1}^{r} P_k(\alpha_k - a)\sum_{l=1}^{r} P_l(\alpha_l - a)$$

rovná se nule, poněvadž podle (7a) a (10) v odst. 75

$$\sum_{k=1}^{r} P_k(\alpha_k - a) = \sum_{k=1}^{r} P_k\alpha_k - a\sum_{k=1}^{r} P_k = a - a = 0.$$

Druhý výraz, provedeme-li v něm sečítání dle m a dle n:

$$\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-n}\lambda_s^{-m} = \frac{\lambda_s^{-N+1}-1}{(\lambda_s-1)^2}+\frac{N-1}{\lambda_s-1},$$

redukuje se na

$$2\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}\sum_{s=1}^{r-1}P_k\varphi_{ls}\psi_{ks}(\alpha_k-a)(\alpha_l-a)\left[\frac{\lambda_s^{-N+1}-1}{(\lambda_s-1)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{N-1}{\lambda_s-1}\right]. \qquad (\gamma)$$

Třetí výraz

$$2\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-n}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}\sum_{j=1}^{r-1}P_l\frac{\varphi_{kj}\psi_{lj}}{\lambda_j^n}(\alpha_k-a)(\alpha_l-a)$$

rovná se nule; o tom se přesvědčíme, provedeme-li nejprve sečítání dle l.

Čtvrtý výraz redukuje se, provedeme-li sečítání:

$$\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-n}\lambda_j^{-n}\lambda_s^{-m} = \frac{\lambda_j^{-N+1}-\lambda_s^{-N+1}}{(1-\lambda_s)(\lambda_s-\lambda_j)}+\frac{1-\lambda_j^{-N+1}}{(1-\lambda_s)(1-\lambda_j)}$$

na

$$2\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{s=1}^{r-1}\varphi_{kj}\psi_{lj}\varphi_{ls}\psi_{ks}(\alpha_k-a)(\alpha_l-a)\,.$$
$$\cdot\left[\frac{\lambda_j^{-N+1}-\lambda_s^{-N+1}}{(1-\lambda_s)(\lambda_s-\lambda_j)}+\frac{1-\lambda_j^{-N+1}}{(1-\lambda_s)(1-\lambda_j)}\right] \qquad (\delta)$$

za předpokladu, že $s \neq j$. V případě, že $s = j$, musíme nahraditi výraz v hranaté závorce výrazem

$$\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-n}\lambda_j^{-m-n} = \frac{(N-1)\,\lambda_j^{-N}}{1-\lambda_j}+\frac{1-\lambda_j^{-N+1}}{(1-\lambda_j)^2}.$$

Máme tedy výsledek: *Veličina*

$$E[x^{(1)}+x^{(2)}+\ldots+x^{(N)}-Na]^2$$

rovná se součtu čtyř výrazů (α), (β), (γ) a (δ); *dělíme-li ji číslem* N, *dostáváme dispersi.*

Podle odst. 79b jsou kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}$ vesměs co do absolutní hodnoty větší než 1. Dělíme-li součet zmíněných čtyř výrazů číslem N a přejdeme-li pak k limitě $N \to \infty$, vychází *vzorec pro limitu disperse*:

$$\lim_{N\to\infty} E \frac{[x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(N)} - Na]^2}{N} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} P_k(\alpha_k - a)^2 + 2\sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} \sum_{s=1}^{r-1} \frac{\varphi_{ls}\psi_{ks}}{\lambda_s - 1} P_k(\alpha_k - a)(\alpha_l - a). \tag{2}$$

b) Dáme pravé straně rovnice jiný tvar; zavedeme veličiny

$$s_{ik} = \sum_{n=1}^{\infty}(P_{ik}^{(n)} - P_k), \quad i, k = 1, 2, \ldots, r,$$

které vzhledem k (8), odst. 79 vyjádříme takto:

$$s_{ik} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\psi_{ij}\varphi_{kj}}{\lambda_j^n} = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\psi_{ij}\varphi_{kj}}{\lambda_j - 1}.$$

Pravá strana rovnice (2) může se tedy psáti takto:

$$\sum_{k=1}^{r} P_k(\alpha_k - a)^2 + 2\sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} \sum_{s=1}^{r-1} s_{lk} P_k(\alpha_k - a)(\alpha_l - a). \tag{2a}$$

c) *Levá strana rovnice* (2) *je totožná s limitou*

$$\lim_{n\to\infty} E \frac{[x^{(1)} - a_i^{(1)} + x^{(2)} - a_i^{(2)} + \ldots + x^{(n)} - a_i^{(n)}]^2}{n}. \tag{3}$$

Zde $a_i^{(k)}$ značí střední hodnotu veličiny $x^{(k)}$ definovanou v odst. 74; předpokládáme, že $x^{(0)} = \alpha_i$. Abychom dokázali, že limita (3) se shoduje s limitou na levé straně rovnice (2), pišme n na místo N a utvořme rozdíl R obou výrazů v čitatelích:

$$R = [\sum_{k=1}^{n} x^{(k)} - na]^2 - [\sum_{k=1}^{n} (x^{(k)} - a_i^{(k)})]^2 =$$

$$= [\sum_{k=1}^{n} (2x^{(k)} - a_i^{(k)}) - na][\sum_{k=1}^{n} (a_i^{(k)} - a)].$$

Poněvadž $E(x^{(k)}) = a_i^{(k)}$, je

$$E(R) = [\sum_{r=1}^{n} a_i^{(k)} - na]^2.$$

Podle odst. 75a je a mezi největší a nejmenší z hodnot $a_1^{(k)}$, $a_2^{(k)}, \ldots, a_r^{(k)}$ a platí

$$|a_i^{(k)} - a| < H^{k-1} \, . \, \Delta^{(1)}, \; |H| < 1.$$

Proto je

$$E(R) < [\Delta^{(1)} \sum_{r=0}^{n-1} H^k]^2 = \left[\frac{\Delta^{(1)}(1 - H^n)}{1 - H}\right]^2$$

a tedy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E(R)}{n} = 0,$$

čímž je věta dokázána.

d) Výpočtem disperse zde provedeným lze verifikovati výsledky, které jsme odvodili pro řetěz se dvěma eventualitami v odst. 64. Tak na př. v odst. 64b jsme vypočetli dispersi za předpokladu, že

$$p_{12} = p_{21}, \; p_{11} = p_{22}.$$

V tomto zvláštním případě má charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda p_{11}, & -\lambda(1 - p_{11}) \\ -\lambda(1 - p_{11}), & 1 - \lambda p_{11} \end{vmatrix} = 0$$

kořeny

$$\lambda_0 = 1, \; \lambda_1 = \frac{1}{2p_{11} - 1}.$$

Podmínka různosti kořenů je splněna, takže dispersi dostaneme jakožto součet výrazů (α), (β), (γ) a (δ) kladouce do nich (srov. odst. 79)

$$r = 2,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ p_{22} = p_{11},\ p_{12} = p_{21} = 1 - p_{11},$$

$$P_1 = P_2 = \tfrac{1}{2},\ a = \tfrac{1}{2},\ \lambda_1 = \frac{1}{2p_{11} - 1},\ \varphi_{11} = 1,$$

$$\varphi_{21} = -1,\ \psi_{11} = \tfrac{1}{2},\ \psi_{21} = -\tfrac{1}{2}.$$

Provedeme-li výpočet, shledáme, že součet

$$(\alpha) + (\beta) + (\gamma) + (\delta)$$

se skutečně rovná pravé straně rovnice (10), odst. 64.

82. Stacionární řetěz. a) Řetěz o r eventualitách je *stacionární*, je-li absolutní pravděpodobnost $p_k^{(n)}$, že n-tý pokus vede ke zjevu E_k, nezávislá na indexu n. Podmínky stacionárnosti jsou tedy

$$p_k^{(0)} = p_k^{(1)} = p_k^{(2)} = \ldots = p_k^{(n)} = \ldots,\ k = 1, 2, \ldots, r. \quad (1)$$

Dosaďme do rovnice (8), odst. 71

$$n = 1,\ P_{jk}^{(1)} = p_{jk},\ p_k^{(1)} = p_k^{(0)}.$$

Vychází

$$p_k^{(0)} - \sum_{j=1}^{r} p_j^{(0)} p_{jk} = 0,\ k = 1, 2, \ldots, r. \quad (2)$$

Připojíme-li k těmto rovnicím podmínku (10), odst. 71, totiž

$$\sum_{k=1}^{r} p_k^{(0)} = 1, \quad (3)$$

jsou pravděpodobnosti $p_k^{(0)}$ jednoznačně určeny rovnicemi (2) a (3); rovnice (2) a (3) jsou totožné se vztahy (9) a (10), odst. 75, kterými byly určeny veličiny $P_1, P_2, \ldots, P_r$. V případě, že existují limity

$$P_k = \lim_{n \to \infty} P_{ik}^{(n)},\ k = 1, 2, \ldots, r,$$

je P_k totožná s $p_k^{(0)}$. Pravděpodobnosti $p_k^{(0)}$ určené rovnicemi (2) a (3) vyhovují podmínkám (1). Tak na př. dává rovnice (8), odst. 71 pro $n = 2$

$$p_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{r} p_j^{(0)} P_{jk}^{(2)} = \sum_{i=1}^{r} p_i^{(0)} p_{ik} = p_k^{(0)}$$

a obecně se dokáže stejným postupem, že

$$p_k^{(n)} = p_k^{(n-1)} = \ldots = p_k^{(1)} = p_k^{(0)}.$$

Absolutní pravděpodobnost že m-tý pokus vede k E_i a $(m + n)$-tý k E_k, je v případě stacionárního řetězu

$$p_i^{(m)} P_{ik}^{(n)} = p_i^{(0)} \,.\, P_{ik}^{(n)}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, r,$$

závisí tedy na n, nikoli na m.

b) Stacionární řetěz se realisuje tahy z r osudí, v nichž jsou smíchány koule r různých barev a která jsou zevně označena týmiž r barvami (viz odst. 71a). Tahy se konají za těchto podmínek: vyjde-li při n-tém tahu koule i-té barvy, koná se $(n + 1)$-tý tah z osudí i-té barvy; předběžný (nultý) tah se koná z pomocného osudí, ve kterém jsou koule oněch r barev v takovém poměru, že pravděpodobnost vytáhnouti kouli j-té barvy je rovna $p_j^{(0)}$, $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Pravděpodobnost, že koule vytažená z i-tého osudí má k-tou barvu, je rovna p_{ik}. Absolutní pravděpodobnosti $p_j^{(0)}$ jsou určeny na základě daných pravděpodobností p_{ik} rovnicemi (2).

c) Všimněme si ještě *stacionárního řetězu v případě* $r = 2$. Absolutní pravděpodobnost, že veličina $x^{(m)}$, přiřaděná m-tému pokusu, má hodnotu α_i a že současně $x^{(m+n)} = \alpha_k$ budiž $p_{ik}^{(n)}$, tedy

$$P[x^{(m)} = \alpha_i,\ x^{(m+n)} = \alpha_k] = p_{ik}^{(n)}; \quad i, k = 1, 2, \ldots, r.$$

Tato veličina nezávisí na m, neboť

$$p_{ik}^{(n)} = p_i^{(m)} \,.\, P_{ik}^{(n)} = p_i^{(0)} \,.\, P_{ik}^{(n)}. \tag{4}$$

Podle rovnic (2) a (3), odst. 65 je

$$P_{12}^{(n)} = 1 - P_{11}^{(n)} = p_{12}\frac{1-\delta^n}{1-\delta},\ P_{21}^{(n)} = p_{21}\frac{1-\delta^n}{1-\delta},$$

$$p_1^{(0)} = \frac{p_{21}}{1-\delta},\ \delta = p_{11} - p_{21},$$

přihlížíme-li k tomu, že $p_{11} + p_{12} = 1$. Rovnice (4) dává

$$p_{21}^{(n)} = p_{21}p_{12}\frac{1-\delta^n}{1-\delta} = p_{21}^{(n)},\ p_{11}^{(n)} = p_1^{(0)}P_{11}^{(n)},\ p_{22}^{(n)} = p_2^{(0)}P_{22}^{(n)}. \tag{5}$$

Počítejme nyní *koeficient korelace R mezi veličinami $x^{(m)}$* a $x^{(m+n)}$. Srovnejme označení, kterého užíváme v kap. VI a VII s tím, kterého jsme užili v rovnici (3), odst. 56 pro R; abychom přešli k hledané hodnotě R, musíme na místo dřívějších znaků

$$p_1,\ p_2,\ p_{11},\ p_{12},\ p_{21},\ p_{22},\ x_1,\ x_2$$

psáti po řadě

$$p_1^{(0)},\ p_2^{(0)},\ p_{11}^{(n)},\ p_{12}^{(n)},\ p_{21}^{(n)},\ p_{22}^{(n)},\ \alpha,\ \beta.$$

Rovnice (4), odst. 56 jsou splněny, neboť přecházejí, zkrátíme-li první dva zlomky činitelem $p_1^{(0)}$ a třetí činitelem $p_2^{(0)}$, v

$$\frac{P_{11}^{(n)} - p_1^{(0)}}{1 - p_1^{(0)}} = \frac{P_{12}^{(n)} - p_2^{(0)}}{-p_2^{(0)}} = \frac{P_{22}^{(n)} - p_2^{(0)}}{1 - p_2^{(0)}}. \tag{6}$$

Tyto tři výrazy jsou identické, což poznáme vyjádříce podle (5) všechny veličiny zde se vyskytující pomocí δ a p_{21}:

$$P_{11}^{(n)} = \delta^n + p_{21}\frac{1-\delta^n}{1-\delta},\ P_{12}^{(n)} = 1 - P_{11}^{(n)},$$

$$P_{22}^{(n)} = 1 - p_{21}\frac{1-\delta^n}{1-\delta},\ p_1^{(0)} = \frac{p_{21}}{1-\delta},\ p_2^{(0)} = 1 - p_1^{(0)}.$$

Společná hodnota tří zlomků (6) je δ^n, tedy

$$R = \delta^n = (p_{11} - p_{21})^n.$$

Je-li jednoduchý řetěz o dvou eventualitách stacionární a je-li n-tému pokusu přiřaděna veličina $x^{(n)}$, která má hodnotu α (β) pro zdařený (nezdařený) pokus, je koeficient korelace mezi $x^{(m)}$ a $x^{(m+n)}$ kvalitativní, nezávislý na α a β, a rovná se $(p_{11} - p_{21})^n$.