Determinanty a matice v theorii a praxi

11. Algebraické rovnice

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v theorii a praxi. Část druhá. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. pp. 102–125.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403296

11. ALGEBRAICKÉ ROVNICE.

Také v theorii algebraických rovnic lze při mnoha důležitých otázkách s výhodou použíti theorie determinantů. Některé, sem patřící výpočty jsme provedli již dříve, takže budeme často moci výsledky tam získané prostě přenésti do „mluvy rovnic".

Základní úlohou nauky o rovnicích jest úkol nalézti nulové body polynomu s komplexními koeficienty. Lze nahlédnouti snadno, že je možno bez újmy obecnosti vyjádřiti tuto základní úlohu matematicky požadavkem: Určiti všechny hodnoty (jsou-li jaké) x tak, aby bylo

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0; \quad (161)$$

čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou komplexní.

Již dříve jsme nalezli vyjádření polynomu $f(x)$ takto:

$$f(x) = (x - x_1)\, q(x) + f(x_1); \quad (162)$$

$q(x)$ je polynom stupně $(n-1)$-ho, jehož koeficienty počítáme nejsnáze Hornerovým schematem. Je-li x_1 kořenem rovnice (161), takže platí $f(x_1) = 0$, máme

$$f(x) = (x - x_1)\, q(x); \quad (163)$$

je tedy v tomto případě $f(x)$ dělitelno výrazem (říká se také kořenovým činitelem) $x - x_1$. Jestliže jest naopak $f(x)$ dělitelno dvojčlenem $x - x_1$, lze psáti $f(x)$ ve tvaru (163), z něhož je ihned patrno $f(x_1) = 0$. Můžeme tedy vysloviti větu:

Nutnou a postačující podmínkou, aby měla rovnice (161) *kořen x_1, je dělitelnost polynomu $f(x)$ výrazem $x - x_1$, t. j. možnost vyjádřiti $f(x)$ ve tvaru* (163).

Pokud jde o základní otázku, má-li algebraická rovnice vůbec nějaké kořeny, odpovídá na ni fundamentální věta algebry. Vyslovíme ji (ovšem bez důkazu; ten je předmětem algebry, nebo, v jednoduché formě, theorie funkcí komplexní proměnné) třeba takto:

Každá algebraická rovnice n-tého stupně s komplexními koeficienty má právě n komplexních kořenů; tyto mohou býti zčásti (nebo také všechny) *navzájem stejné.*

Označíme-li kořeny rovnice (161) znaky $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dostaneme postupným užitím vztahu (163) vyjádření rovničního polynomu $f(x)$ pomocí t. zv. kořenových činitelů:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n). \tag{164}$$

Právě napsaný vztah vede k dalším zajímavým důsledkům. Provedeme-li násobení a porovnáme pak koeficienty při stejných mocninách x na obou stranách rovnosti (164), dostáváme

$$(-1)^\nu a_\nu = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n; \tag{165}$$

sčítání se provádí přes všech $\binom{n}{\nu}$ kombinací $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$, ν-té třídy z prvků $1, 2, \ldots, n$. Výrazům na pravé straně rovnic (165) se říká základní *symetrické funkce kořenů* x_1, $x_2, \ldots, x_n$ původní rovnice. Každý z nich se v matematice charakterisuje svým prvým členem (to se ostatně činí vůbec při každé symetrické funkci kořenů) a vztahy (165) se píší též ve tvaru

$$(-1)^\nu a_\nu = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{165'}$$

Ze symetrických funkcí kořenů se velmi často setkáváme s t. zv. *potenčními součty* $s_0, s_1, s_2, \ldots$; tyto jsou definovány vzorci

$$s_\nu = x_1^\nu + x_2^\nu + \ldots + x_n^\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{166}$$

a existují mezi nimi a koeficienty dané rovnice jisté vztahy, říká se jim relace Newtonovy, jež dovolují vypočísti jedny pomocí druhých. Odvodíme je z rovností

$$\Sigma x_1^{k-\varkappa}\Sigma x_1 x_2 \dots x_\varkappa = (x_1^{k-\varkappa} + x_2^{k-\varkappa} + \dots) \,.$$
$$. (x_1 x_2 \dots x_{\varkappa-1} x_\varkappa + x_1 x_2 \dots x_{\varkappa-1} x_{\varkappa+1} + \dots) =$$
$$= (x_1^{k-\varkappa+1} x_2 \dots x_\varkappa + \dots) + (x_1^{k-\varkappa} x_2 \dots x_{\varkappa+1} + \dots) =$$
$$= \Sigma x_1^{k-\varkappa+1} x_2 \dots x_\varkappa + \Sigma x_1^{k-\varkappa} x_2 \dots x_{\varkappa+1},$$

čili

$$a_\varkappa s_{k-\varkappa} = (-1)^\varkappa \Sigma x_1^{k-\varkappa+1} x_2 \dots x_\varkappa +$$
$$+ (-1)^\varkappa \Sigma x_1^{k-\varkappa} x_2 \dots x_{\varkappa+1}, \ \varkappa = 1, 2, \dots, k-2, \qquad (167)$$

sečtením

$$\Sigma a_\varkappa s_{k-\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{k-2} (-1)^\varkappa \Sigma x_1^{k-\varkappa+1} x_2 \dots x_\varkappa -$$
$$- \sum_{\varrho=2}^{k-1} (-1)^\varrho \Sigma x_1^{k-\varrho+1} x_2 \dots x_\varrho = -\Sigma x_1^k +$$
$$+ (-1)^k \Sigma x_1^2 x_2 \dots x_{k-1}$$

a dodatečným připočtením vztahu dalšího (dokažte jej)

$$a_{k-1} s_1 = (-1)^{k-1} \Sigma x_1^2 x_2 \dots x_{k-1} + (-1)^{k-1} \,.$$
$$. k \Sigma x_1 x_2 \dots x_k. \qquad (167')$$

Tak dostaneme Newtonovy vzorce ve tvaru

$$s_1 a_{k-1} + s_2 a_{k-2} + \dots + s_{k-1} a_1 + s_k = - k a_k;$$
$$k = 1, 2, 3, \dots, a_0 = 1. \qquad (168)$$

Byly sice odvozeny za předpokladu, že jest $k \leqq n$, platí však také pro všechna $k > n$, položíme-li jen $a_k = 0$ pro $k = n + 1, n + 2, \dots$

Z jednotlivých rovnic (168) lze postupně počítati potenční součty $s_1, s_2, \dots$ a naopak zase vyjádřiti koeficienty rovničního polynomu $f(x)$ pomocí potenčních součtů kořenů příslušné rovnice. Tyto výpočty je též možno provésti použitím soustavy lineárních rovnic. Dostaneme tak přehledné formule

$$s_\nu = (-1)^\nu \begin{vmatrix} a_1, & 1, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ 2a_2, & a_1, & 1, & \ldots, 0, & 0 \\ 3a_3, & a_2, & a_1, & \ldots, 0, & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ (\nu - 1)\, a_{\nu-1}, & a_{\nu-2}, & a_{\nu-3}, & \ldots, a_1, & 1 \\ \nu a_\nu, & a_{\nu-1}, & a_{\nu-2}, & \ldots, a_2, & a_1 \end{vmatrix}, \tag{169}$$

$$\nu = 2, 3, \ldots;\ s_0 = n,\ s_1 = -a_1,$$

$$a_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \begin{vmatrix} s_1, & 1, & 0, & 0, & \ldots, 0, & 0, & 0 \\ s_2, & s_1, & 2, & 0, & \ldots, 0, & 0, & 0 \\ s_3, & s_2, & s_1, & 3, & \ldots, 0, & 0, & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ s_{\nu-1}, & s_{\nu-2}, & s_{\nu-3}, & s_{\nu-4}, & \ldots, s_2, & s_1, & \nu - 1 \\ s_\nu, & s_{\nu-1}, & s_{\nu-2}, & s_{\nu-3}, & \ldots, s_3, & s_2, & s_1 \end{vmatrix}, \tag{170}$$

$$\nu = 2, 3, 4, \ldots;\ a_1 = -s_1.$$

Další důležitá otázka, jež se při studiu algebraických rovnic naskýtá, je ta, zdali má daná rovnice vícenásobné kořeny. Abychom ji zodpověděli, stačí ve smyslu úvah odst. 9. vypočítati pro předloženou rovnici její diskriminant; je-li tento roven nule, existují kořeny vícenásobné, v opačném případě nikoli (důkaz viz v odst. 9.). Místo obecných vzorců uvedených v odst. 9. vystačíme v theorii rovnic s jednoduššími a budeme pod pojmem diskriminantu rovnice (161) rozuměti jeden z těchto tří navzájem stejných výrazů:

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} \,.\, R(f, f') = \prod_{\nu<\varrho}^{1,n} (x_\nu - x_\varrho)^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & \ldots, s_{n-1} \\ s_1, & s_2, & s_3, & \ldots, s_n \\ s_2, & s_3, & s_4, & \ldots, s_{n+1} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ s_{n-1}, & s_n, & s_{n+1}, & \ldots, s_{2n-2} \end{vmatrix}; \tag{171}$$

při tom značí $R(f, f')$ resultant polynomu $f(x)$ a jeho prvé derivace $f'(x)$.

Pouhým pohledem na druhý tvar diskriminantu ve vzorcích (171) nahlédneme nyní správnost této věty o vícenásobných kořenech rovnice:

Nutná a postačující podmínka, aby algebraická rovnice měla alespoň dva stejné kořeny, jest anulování jejího diskriminantu.

Hodnota diskriminantu jest však spolehlivým vodítkem také při podrobnějším zkoumání povahy kořenů předložené algebraické rovnice v tom případě, že má tato vesměs reálné koeficienty. O rovnicích tohoto druhu jest známo, že jejich nikoli reálné kořeny se vždy vyskytují v párech navzájem komplexně sdružených; má-li tedy rovnice s reálnými koeficienty komplexní kořen $x_1 = \xi_1 + i\eta_1$, má nutně za kořen též číslo konjugované $\bar{x}_1 = \xi_1 - i\eta_1$ a oba tyto kořeny mají stejnou násobnost (důkaz nalezne čtenář ve většině učebnic algebry; je ostatně tak jednoduchý, že si jej každý může bez nesnází provésti sám).

Nechť má rovnice s reálnými koeficienty kořeny navzájem různé. Její diskriminant je pak ovšem nenulový. Ukážeme si, že jest to reálné číslo, které dává svým znaménkem cenné informace o bližší povaze kořenů. Označme tyto kořeny (seřadivše je tak, že napřed stojí páry komplexně sdružených a teprve za nimi následují reálné) symboly

$$\begin{gathered} x_1, \bar{x}_1, x_3, \bar{x}_3, x_5, \bar{x}_5, \ldots, x_{2m+1}, \bar{x}_{2m+1}; \\ x_{2m+3}, x_{2m+4}, \ldots, x_{n-1}, x_n \end{gathered} \tag{172}$$

a vypočítejme pomocí nich diskriminant $\Delta(f)$ dané rovnice, používajíce k tomu druhého tvaru daného vzorcem (171). Snadno najdeme, že má tento diskriminant tvar

$$\Delta(f) = (-1)^{m+1}P^2, \tag{173}$$

kde jest P číslo reálné.

Odtud vyvodíme lehko tento důsledek o povaze kořenů dané algebraické rovnice:

Nutná a postačující podmínka, aby algebraická rovnice s re-

álnými koeficienty měla sudý počet párů kořenů komplexně sdružených, je ta, aby byl její diskriminant kladný.

Správnost tohoto tvrzení je zcela evidentní, když uvážíme, že má ve smyslu označení (172) rovnice právě $m + 1$ párů takovýchto komplexně sdružených kořenů, tedy právě tolik párů, kolik činí mocnitel záporné jedničky ve vzorci (173) pro diskriminant $\Delta(f)$ té rovnice.

V technických aplikacích theorie determinantů (v prvé řadě při studiu spřažených kmitových soustav) mají značnou důležitost hlavní minory $\Delta_\nu(f)$ diskriminantu $\Delta(f)$ rovnice (161), definované vztahy

$$\Delta_\nu(f) = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & \ldots, & s_{\nu-1} \\ s_1, & s_2, & s_3, & \ldots, & s_\nu \\ s_2, & s_3, & s_4, & \ldots, & s_{\nu+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{\nu-1}, & s_\nu, & s_{\nu+1}, & \ldots, & s_{2\nu-2} \end{vmatrix}; \; \nu = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (174)$$

Potřeby fysikálně-technické praxe žádají často vyjádřiti tyto veličiny $\Delta_\nu(f)$ jednak pomocí kořenů $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jednak přímo pomocí koeficientů $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dané rovnice (161).

První problém rozřešíme snadno tím, že vezmeme v úvahu čtverec matice

$$\begin{Vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, 1, & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & \ldots, x_{n-1}, & x_n \\ x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & \ldots, x_{n-1}^2, & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\nu-1}, & x_2^{\nu-1}, & x_3^{\nu-1}, & \ldots, x_{n-1}^{\nu-1}, & x_n^{\nu-1} \end{Vmatrix}$$

počítaný jako řádkový součin dvou stejných matic (definici viz v prvém svazku na str. 21).

Podle definice je čtverec právě roven determinantu $\Delta_\nu(f)$, na druhé straně však má týž čtverec podle vzorce (47) a příslušného pravidla z prvé části této knížky hodnotu

$$\Sigma \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, 1 \\ x_{\varrho_1}, & x_{\varrho_2}, & \ldots, x_{\varrho_\nu} \\ x_{\varrho_1}{}^2, & x_{\varrho_2}{}^2, & \ldots, x_{\varrho_\nu}{}^2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x_{\varrho_1}{}^{\nu-1}, & x_{\varrho_2}{}^{\nu-1}, & \ldots, x_{\varrho_\nu}{}^{\nu-1} \end{vmatrix}^2,$$

při čemž se sčítá přese všech $\binom{n}{\nu}$ kombinací $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_\nu$ ν-té třídy z čísel $1, 2, \ldots, n$.

Máme tedy hledané vyjádření determinantů (174) pomocí kořenů $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dané rovnice (161) ve tvaru

$$\Delta_\nu(f) = \Sigma \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, 1 \\ x_{\varrho_1}, & x_{\varrho_2}, & \ldots, x_{\varrho_\nu} \\ x_{\varrho_1}{}^2, & x_{\varrho_2}{}^2, & \ldots, x_{\varrho_\nu}{}^2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x_{\varrho_1}{}^{\nu-1}, & x_{\varrho_2}{}^{\nu-1}, & \ldots, x_{\varrho_\nu}{}^{\nu-1} \end{vmatrix}^2 ; \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{175}$$

Tento vzorec platí i pro $\nu = n$ a dává pak ovšem hodnotu diskriminantu $\Delta(f)$ dané rovnice (161).

Abychom zavedli do výrazů $\Delta_\nu(f)$ koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rovnice (161), nabízí se vzhledem k platnosti Newtonových relací (168) přímo tento postup: K $(\varrho + 1)$-mu sloupci $s_\varrho, s_{\varrho+1}, s_{\varrho+2}, \ldots, s_{\varrho+\nu-1}$ determinantu $\Delta_\nu(f)$ přičtěme lineární kombinaci všech sloupců předchozích prvým počínajíce a to kombinaci se součiniteli $a_\varrho, a_{\varrho-1}, a_{\varrho-2}, \ldots, a_1$. Prvek $d_{\sigma,\varrho+1} = s_{\varrho+\sigma-1}$, který stál původně na σ-tém místě onoho $(\varrho + 1)$-vého sloupce ($\sigma = 2, 3, \ldots, \nu$), přejde touto úpravou podle Newtonových formulí v nový

$$\begin{aligned} e_{\sigma,\varrho+1} &= -a_{\varrho+1}s_{\sigma-2} - a_{\varrho+2}s_{\sigma-3} - \ldots - a_{\varrho+\sigma-2}s_1 - \\ &\quad - (\varrho + \sigma - 1)\, a_{\varrho+\sigma-1}; \\ e_{1,\varrho+1} &= s_\varrho + a_\varrho s_0 + a_{\varrho-1}s_1 + a_{\varrho-2}s_2 + \ldots + a_1 s_{\varrho-1} = \\ &= (n - \varrho)\, a_\varrho. \end{aligned} \tag{176}$$

Provedeme-li popsanou operaci postupně pro $\varrho = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, objeví se determinant $\Delta_\nu(f)$ ve tvaru

$$\Delta_\nu(f) = \begin{vmatrix} s_0, & (n-1)\,a_1, \dots, (n-\nu+1)\,a_{\nu-1} \\ s_1, & e_{22}, \qquad \dots, e_{2\nu} \\ s_2, & e_{32}, \qquad \dots, e_{3\nu} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_{\nu-1}, & e_{\nu 2}, \qquad \dots, e_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Tento determinant podrobíme obdobné úpravě, jaká byla právě provedena s původním tvarem $\Delta_\nu(f)$: K jeho $(\tau+1)$-vému řádku $s_\tau, e_{\tau+1,2}, e_{\tau+1,3}, \dots, e_{\tau+1,\nu}$ přičteme lineární kombinaci všech řádků předcházejících druhým počínajíce a to kombinaci s koeficienty $a_{\tau-1}, a_{\tau-2}, a_{\tau-3}, \dots, a_1$. Tam, kde stál v determinantu $\Delta_\nu(f)$ prvek $e_{\tau+1,\omega}$ $(\omega = 2, 3, \dots, \nu)$, bude nyní nový

$$\begin{aligned} h_{\tau+1,\omega} &= e_{\tau+1,\omega} + a_1 e_{\tau\omega} + a_2 e_{\tau-1,\omega} + \dots + \\ &\quad + a_{\tau-2} e_{3\omega} + a_{\tau-1} e_{2\omega}; \\ h_{\tau+1,1} &= s_\tau + a_1 s_{\tau-1} + a_2 s_{\tau-2} + \dots + \\ &\quad + a_{\tau-2} s_2 + a_{\tau-1} s_1 = -\tau a_\tau. \end{aligned} \tag{177}$$

Provedeme-li právě zmíněnou úpravu postupně pro $\tau = 2, 3, \dots, \nu-1$, dostáváme původní determinant ve tvaru

$$\Delta_\nu(f) = \begin{vmatrix} s_0, & (n-1)\,a_1, \dots, (n-\nu+1)\,a_{\nu-1} \\ s_1, & e_{22}, \qquad \dots, e_{2\nu} \\ -2a_2, & h_{32}, \qquad \dots, h_{3\nu} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -(\nu-1)\,a_{\nu-1}, & h_{\nu 2}, \qquad \dots, h_{\nu\nu} \end{vmatrix};$$

$$\nu = 3, 4, \dots, n-1; \tag{178}$$

vztahy (178) budeme považovati za řešení našeho problému, ježto lze veličiny h, e zde figurující snadno vyjádřiti použitím vzorců (176) a (177) pomocí koeficientů $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Tak dostáváme obecně

$$\begin{gathered} h_{\tau+1,\omega} = -\sum_{\varkappa=0}^{\tau-1} (\omega + \tau - 1 - 2\varkappa)\, a_\varkappa a_{\omega+\tau-1-\varkappa}; \\ \tau = 2, 3, \dots, \nu-1, \ \ \omega = 2, 3, \dots, \nu; \\ e_{2\omega} = -\,\omega a_\omega; \ \ \omega = 2, 3, \dots, \nu; \ s_0 = n, \ s_1 = -\,a_1. \end{gathered} \tag{179}$$

Výsledek daný vzorci (178) a (179) — ty ostatně platí i pro $\nu = n$ a vedou pak přímo k vyjádření diskriminantu $\Delta(f)$ dané rovnice (161) — zcela postačí pro potřeby běžné praxe a nebudeme se proto zabývati další jeho úpravou. V rámci tohoto svazku raději použijeme právě získané skutečnosti k důkazu této důležité věty (L. Baur, Math. Ann. 50, 241, 1898):

Nutná a postačující podmínka, aby měla rovnice (161) právě ν navzájem různých kořenů, jest vyjádřena vztahy

$$\Delta_{\nu+1}(f) = \Delta_{\nu+2}(f) = \ldots = \Delta_{n-1}(f) = \Delta(f) = 0,$$
$$\Delta_{\nu}(f) \neq 0. \qquad (180)$$

Má-li totiž rovnice (161) právě ν různých kořenů, obsahuje každý sčítanec ve výrazu utvořeném podle vzorce (175) pro $\Delta_{\nu+\mu}(f)$, $\mu = 1, 2, \ldots$ alespoň dva stejné sloupce, takže je roven nule a tím i determinant $\Delta_{\nu+\mu}(f)$ samotný. Naproti tomu není roven nule determinant $\Delta_{\nu}(f)$, ježto jest součtem samých navzájem stejných nenulových sčítanců — každý z nich je čtvercem Vandermondeova determinantu utvořeného z ν různých kořenů rovnice (161), podle předpokladu existujících.

Že jsou podmínky (180) pro existenci právě ν navzájem různých kořenů rovnice (161) postačující, dokáže si čtenář zcela snadno sám — stačí ukázat, že by důsledky existence jiného počtu různých kořenů, než jest ν, byly ve sporu s předpokládanými vztahy (180).

Když jsme se pomocí diskriminantu $\Delta(f)$ dané rovnice přesvědčili o tom, zdali tato má vícenásobné kořeny a když nám, v případě, že vícenásobné kořeny existují, ukázala řada minorů $\Delta_{\nu}(f)$, kolik má rovnice celkem navzájem různých kořenů, můžeme ještě snadno sestrojiti novou rovnici, která má tytéž kořeny, jako rovnice daná, každý však pouze jednoduchý.

Je-li $f(x) = 0$ rovnice původní, má tato nová rovnice tvar

$$\frac{f(x)}{d(x)} = 0, \tag{181}$$

při čemž jest $d(x)$ největším společným dělitelem původního rovničního polynomu $f(x)$ a jeho prvé derivace $f'(x)$.

Správnost této konstrukce jest důsledkem známé skutečnosti (čtenář si ji ostatně dokáže zcela snadno sám), že jest každý kořen rovnice $f(x) = 0$ také kořenem rovnice $f'(x) = 0$, avšak s násobností o jedničku nižší.

Zajímavé úvahy se pojí k otázce společných kořenů dvou algebraických rovnic

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0 \tag{182}$$

stupňů resp. m, n.

O tom, mají-li takové rovnice vůbec nějaký společný kořen, nás informuje resultant (99) polynomů $f(x)$, $g(x)$. Je-li roven nule, existuje takový společný kořen alespoň jeden. Může jich ovšem býti více a o tom, kolik jich vskutku jest, se poučíme vhodným použitím věty 11., kterou snadno přeneseme na případ rovnic a vyslovíme ji zde, vzhledem k její důležitosti, ještě jedenkráte takto:

Mají-li rovnice (182) alespoň $r + 1$ společných kořenů (počítáme je i co do násobnosti — tedy na příklad kořen trojnásobný jako tři kořeny), jest hodnost matice $\boldsymbol{M}_r$, vzniklé z resultantu $R(f, g)$ způsobem popsaným ve větě 11. (str. 66), menší než $m + n - 2r$ a naopak.

Důkazy všech těchto tvrzení byly už provedeny, nebo aspoň dostatečně naznačeny v odst. 8. a bylo by zbytečné je zde opakovati. Místo toho si raději ukážeme, jak je principielně možno nalézti číselnou hodnotu společného kořene ξ rovnic (182) v případě, že je takový společný kořen jediný a jednoduchý.

Tu platí zřejmě rovnice

$$\begin{aligned} &f(\xi) = 0, \quad \xi f(\xi) = 0, \quad \xi^2 f(\xi) = 0, \ldots, \xi^{n-2} f(\xi) = 0 \\ &g(\xi) = 0, \quad \xi g(\xi) = 0, \quad \xi^2 g(\xi) = 0, \ldots, \xi^{m-2} g(\xi) = 0, \end{aligned} \tag{183}$$

které představují systém $m + n - 2$ homogenních rovnic pro $m + n - 1$ veličin $1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{m+n-2}$ a podle příkladu 11., vzorce (22) je možno tyto veličiny jednoznačně stanoviti.

V obecném případě ovšem určíme společné kořeny rovnic (182) tím, že stanovíme nulové body největšího společného dělitele obou rovničních polynomů $f(x)$, $g(x)$. Tyto nulové body jsou pak hledanými společnými kořeny.

Nyní si ještě všimneme jisté skupiny algebraických rovnic, které mají zásadní důležitost nejen v celé řadě otázek čistě matematických, ale také v mnoha případech fysikálních a technických. S příslušnými aplikacemi se obeznámíme v dalších svazcích této knížky, zde prozatím upozorníme zcela namátkou alespoň na některé případy, kdy se zmíněných rovnic a jejich vlastností s výhodou používá: V theorii kmitových soustav, při fysikálním použití tensorového počtu, při řešení některých úloh z theorie pružnosti, v nebeské mechanice atd.

Základní úlohou pro nás bude studium vlastností kořenů rovnice $D(x) = 0$, při čemž vznikne rovniční polynom $D(x)$ tím, že ke všem hlavním prvkům Hermiteova determinantu (definici a základní vlastnosti nalezne čtenář v prvém svazku na str. 45) $A = |a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$ přidáme neznámou veličinu x.

Tato rovnice — nazýváme ji rovnicí Hermiteovou — nemá kořenů ryze imaginárních. Ze vztahu $D(i\xi) = 0$, ξ reálné, by totiž plynulo $D(i\xi) \,.\, D(-i\xi) = 0$, to jest — provedeme-li naznačené zde násobení tak, že kombinujeme řádky determinantu prvého se sloupci druhého —

$$\begin{vmatrix} c_{11} + \xi^2, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22} + \xi^2, & \ldots, & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots, & c_{nn} + \xi^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{a}$$

při čemž jest

$$c_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} a_{\nu k}; \; i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{b}$$

Právě napsaný vztah (a) je však možno podle vzorců (85) a (87) v prvém svazku vyjádřiti také rovností

$$f(\xi) \equiv \xi^{2n} + \gamma_1\xi^{2(n-1)} + \gamma_2\xi^{2(n-2)} + \ldots + \gamma_{n-1}\xi^2 + \gamma_n = 0, \tag{c}$$

v níž značí γ_r součet všech r-řadových hlavních minorů determinantu C z relace (a).

Každý takovýto r-řadový hlavní minor $|c_{i_\varrho i_\sigma}|$; $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r$ však jest řádkovým součinem matice

$$\left\|\begin{matrix} a_{i_1 1}, & a_{i_1 2}, & \ldots, & a_{i_1 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r 1}, & a_{i_r 2}, & \ldots, & a_{i_r n} \end{matrix}\right\|$$

s maticí, která z ní vznikne vzájemnou výměnou obou indexů u jednotlivých prvků [tuto skutečnost si čtenář s použitím vzorců (b) snadno ověří podle definice řádkového součinu dvou matic ve svazku prvém] a podle vzorce (47) prvého dílu tohoto spisu lze tedy každý takový r-řadový hlavní minor $|c_{i_\varrho i_\sigma}|$ psáti ve tvaru

$$|c_{i_\varrho i_\sigma}| = \Sigma \begin{vmatrix} a_{i_1\nu_1}, & a_{i_1\nu_2}, & \ldots, & a_{i_1\nu_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r\nu_1}, & a_{i_r\nu_2}, & \ldots, & a_{i_r\nu_r} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{\nu_1 i_1}, & a_{\nu_2 i_1}, & \ldots, & a_{\nu_r i_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\nu_1 i_r}, & a_{\nu_2 i_r}, & \ldots, & a_{\nu_r i_r} \end{vmatrix},$$

při čemž se sčítá přese všech $\binom{n}{r}$ kombinací $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ čísel $1, 2, \ldots, n$.

Podle definice Hermiteova determinantu však platí zcela obecně $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$ (číslem $\bar{z}$ označujeme, jak jest zvykem, komplexní číslo sdružené s číslem z) a proto jest každý sčítanec ve výrazu $|c_{i_\varrho i_\sigma}|$ číslo nezáporné (jakožto součin dvou čísel, zde determinantů, komplexně spolu sdružených); tuto vlastnost pak má též minor $|c_{i_\varrho i_\sigma}|$ samotný a tudíž také součinitel γ_r ve vztahu (c).

Má tudíž pro každé reálné $\xi \neq 0$ funkce $f(\xi)$, jak jsme ji zavedli v (c), zcela jistě hodnotu kladnou a docházíme tak ke sporu se vztahem (c), jenž byl důsledkem předpokladu existence ryze imaginárního kořene $i\xi$ Hermiteovy rovnice $D(x) = 0$. Tato tedy opravdu nemá ryze imaginárních kořenů.

Pomocí této skutečnosti a na základě toho, že vznikne z původního Hermiteova determinantu A přičtením libovolného reálného čísla k elementům hlavním zřejmě opět determinant typu Hermiteova, nahlédneme snadno, že nemůže míti Hermiteova rovnice $D(x) = 0$ ani žádných kořenů komplexních a proto jest všech jejích n kořenů reálných. Tuto důležitou skutečnost vyslovíme

větou 13. Všech n kořenů Hermiteovy rovnice

$$D(x) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} + x, & a_{12}, & \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} + x, & \ldots, a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, a_{nn} + x \end{vmatrix} = 0, \quad (184)$$

$$a_{ik} = \bar{a}_{ki}; \; i, k = 1, 2, \ldots, n$$

jsou čísla reálná.

Prvým skoro bezprostředním důsledkem této věty jest fakt, že má rovnice obdobná ku (184), při níž však jest základní determinant A determinantem polosouměrným s reálnými prvky (definice a hlavní vlastnosti jsou uvedeny v prvním svazku), kořeny vesměs ryze imaginární (také nulu pokládáme v případě potřeby za číslo ryze imaginární).

Zvláštní pozornosti zasluhuje ten případ, kdy jsou každé dva sdružené prvky a_{ik}, a_{ki} determinantu ze vztahu (184) stejné, takže jest základní determinant příslušné rovnice determinantem souměrným s elementy vesměs reálnými. Rovnici se pak říká sekulární (saeculum — století; rovnice má svou roli při studiu stoletých poruch v pohybu oběžnic) a její kořeny jsou ovšem podle věty 13. všechny reálné.

Abychom se mohli věnovati důležité otázce vícenásobných kořenů rovnice sekulární, připomeneme si jisté jednoduché skutečnosti z theorie determinantů.

Maticí h-řadových subdeterminantů daného determinantu $A = |a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$ nazveme každou $\binom{n}{h}$-řadovou čtverečnou matici, v jejíž obecné řádce stojí jako elementy všechny h-řadové subdeterminanty, které lze vytvořiti z týchž h řádků determinantu A a v obecném sloupci všech $\binom{n}{h}$ subdeterminantů, které lze sestaviti z určitých h sloupců daného determinantu A.

Používajíce tohoto pojmu, dokážeme si tuto důležitou

větu 14. Matice h-řadových subdeterminantů n-řadového determinantu A o hodnosti h menší než n má hodnost 1.

Bez újmy obecnosti lze u takového determinantu A totiž pokládati za navzájem nezávislé řádky s pořadovými čísly $1, 2, \ldots, h$ a podle definice závislosti číselných soustav (viz odst. 1.) psáti

$$a_{\varrho\sigma} = \sum_{s=1}^{h} \lambda_{s\varrho} a_{s\sigma};\ \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n, \tag{d}$$

při čemž má ovšem pro $\varrho = 1, 2, \ldots, h$ veličina $\lambda_{s\varrho}$ hodnotu Kroneckerova symbolu $\delta_{s\varrho}$ (definice ve svazku prvém na str. 14).

V důsledku vztahu (b) jest h-řadový subdeterminant $M_h = |a_{i_\varkappa k_\iota}|$; $\varkappa, \iota = 1, 2, \ldots, h$ determinantu A součinem determinantu $\Lambda_h = |\lambda_{\mu i_\nu}|$; $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, h$ a subdeterminantu $A_h = |a_{\omega k_\tau}|$; $\omega, \tau = 1, 2, \ldots, h$ téhož determinantu A a to součinem vzatým po sloupcích. Platí tedy

$$M_h = \Lambda_h A_h, \tag{e}$$

takže jest každý h-řadový subdeterminant M_h determinantu A úměrný subdeterminantu A_h stejnolehlému s ním v matici prvých h (navzájem nezávislých) řádků determinantu A. Koeficient úměrnosti jest pro všech $\binom{n}{h}$ subdeterminantů vzatých z týchž řádků (u nás to jsou řádky s pořadovými čísly $i_1, i_2, \ldots, i_h$) determinantu A týž a roven A_h; mění se pouze v tom případě, že tvoříme subdeterminanty M_h' z prvků jiných h řádků daného determinantu A.

Odtud jest platnost věty 14. vzhledem k známým větám o hodnosti matice (speciálně viz větu 11., svazek prvý, str. 24) ihned patrna.

Je-li ve zvláštním případě daný determinant A souměrný s reálnými prvky (tak jako právě u rovnice sekulární), vede věta 14. k tomuto důležitému a často používanému důsledku:

V souměrném determinantu $A = |a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$ s reálnými prvky a s hodností h existují nenulové hlavní minory h-řadové a jsou všechny téhož znaménka.

Každý dvouřadový determinant matice h-řadových subdeterminantů našeho determinantu A je totiž podle věty 14. roven nule. Totéž tedy platí i o těch dvouřadových determinantech oné matice, v jichž hlavní úhlopříčce stojí elementy rovné nějakým dvěma hlavním minorům h-řadovým M_h, N_h daného determinantu A. Ježto je tento podle předpokladu symetrický, jsou pak zbývající dva prvky každého takového dvouřadového determinantu sobě rovny — jejich společnou hodnotu (tato je ovšem reálná) označme P_h. Platí tedy

$$M_h N_h = P_h^2 \tag{f}$$

a kdyby byly hlavní h-řadové minory determinantu A všechny rovny nule, měl by tento determinant nulové vůbec všechny h-řadové subdeterminanty a jeho hodnost by byla menší než h, což odporuje předpokladu. Existují tedy vskutku v determinantu A nenulové hlavní minory h-řadové a tyto mají pak ovšem vzhledem ku vztahu (f) všechny totéž znaménko.

Nyní už snadno dokážeme tuto důležitou větu o vícenásobných kořenech sekulární rovnice $D(x) = 0$:

Reálné číslo ξ jest $(n - h)$-násobným kořenem sekulární rovnice $D(x) = 0$, když a jen když má determinant $D(\xi)$ hodnost h.

Je-li totiž ξ kořenem oné rovnice a to s násobností $n - h$, platí (jak známo z nauky o algebraických rovnicích) současně vztahy

$$D(\xi) = 0,\ D'(\xi) = 0,\ D''(\xi) = 0, \ldots, D^{(n-h-1)}(\xi) = 0,$$
$$D^{(n-h)}(\xi) \neq 0. \tag{g}$$

Úvahy obdobné těm, které byly provedeny v souvislosti se vztahem (86) v prvém svazku, nás vedou ke konstatování, že jest ν-tá derivace $D^{(\nu)}(x)$ rovničního polynomu $D(x)$ úměrna součtu $S_{n-\nu}(x)$ všech $(n-\nu)$-řadových hlavních minorů determinantu $D(x)$ a proto jest možno psáti vztahy (g) také ve tvaru

$$D(\xi) = 0,\ S_{n-1}(\xi) = 0,\ S_{n-2}(\xi) = 0, \ldots, S_{h+1}(\xi) = 0,$$
$$S_h(\xi) \neq 0. \tag{k}$$

Tyto relace jsaně ukazují, že nemůže býti hodnost determinantu $D(\xi)$ vyšší než h, ježto by pak podle věty o hlavních minorech souměrného determinantu platilo $S_r(\xi) \neq 0$ pro $r > h$, což odporuje vztahům (k). Že nemůže býti ona hodnost nižší než h, je patrno ihned z poslední relace (k); podmínka uvedená v naší větě jest tedy nutná.

Má-li determinant $D(\xi)$ hodnost h, platí zřejmě vztahy (k) a tedy i relace (g). To ovšem značí, že je ξ právě $(n-h)$-násobným kořenem rovnice $D(x) = 0$ a věta jest dokázána v celém rozsahu.

Nakonec si ještě všimneme rovnice

$$F(x) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}x + b_{11}, & a_{12}x + b_{12} & \ldots, & a_{1n}x + b_{1n} \\ a_{21}x + b_{21}, & a_{22}x + b_{22}, & \ldots, & a_{2n}x + b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x + b_{n1}, & a_{n2}x + b_{n2}, & \ldots, & a_{nn}x + b_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{185}$$

v níž jsou a_{ik}, b_{ik} reálná čísla, o kterých opět platí

$$a_{ik} = a_{ki},\ b_{ik} = b_{ki};\ i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{l}$$

Také tato rovnice (právě studovaná rovnice sekulární jest zřejmě jejím zvláštním případem) se často vyskytuje v aplikacích fysikálních a technických.

Za předpokladu, že jest

$$F(\alpha + \mathrm{i}\beta) = 0, \tag{m}$$

má systém

$$\sum_{\varrho=1}^{n}[(\alpha + \mathrm{i}\beta)\, a_{\nu\varrho} + b_{\nu\varrho}]\, x_\varrho = 0;\ \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{n}$$

n homogenních rovnic rozhodně nenulové řešení $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Píšeme-li takové řešení obecně ve tvaru

$$x_\varrho = \xi_\varrho + \mathrm{i}\eta_\varrho;\ \varrho = 1, 2, \ldots, n,$$

dávají soustavy (n) tyto dva důsledky

$$\sum_{\varrho=1}^{n}[(\alpha a_{\nu\varrho} + b_{\nu\varrho})\, \xi_\varrho - \beta a_{\nu\varrho}\eta_\varrho] = 0;\ \nu = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{\varrho=1}^{n}[\beta a_{\nu\varrho}\xi_\varrho + (\alpha a_{\nu\varrho} + b_{\nu\varrho})\, \eta_\varrho] = 0;\ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Násobíme-li rovnice prvé soustavy po řadě čísly $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ a pak sečteme, rovnice druhé soustavy čísly $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ a opět sečteme, dostaneme odečtením takto získaných výsledků vzhledem k platnosti vztahů (l) postupně

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\nu=1}^{n}\ \sum_{\varrho=1}^{n}[(\alpha a_{\nu\varrho} + b_{\nu\varrho})\, \xi_\varrho\eta_\nu - \beta a_{\nu\varrho}\eta_\varrho\eta_\nu] - \\ &- \sum_{\nu=1}^{n}\ \sum_{\varrho=1}^{n}[\beta a_{\nu\varrho}\xi_\varrho\xi_\nu + (\alpha a_{\nu\varrho} + b_{\nu\varrho})\, \eta_\varrho\xi_\nu] = \\ &= -\beta[\sum_{\varrho=1}^{n} a_{\varrho\varrho}(\xi_\varrho^2 + \eta_\varrho^2) + 2\sum_{\varrho\neq\sigma}^{1,n} a_{\varrho\sigma}(\xi_\varrho\xi_\sigma + \eta_\varrho\eta_\sigma)]. \end{aligned}$$

Za dodatečného předpokladu, že jest kvadratická forma $\sum_{i,k}^{1,n} a_{ik}z_iz_k$ definitní (viz odst. 12.), odtud plyne $\beta = 0$ a rovnice (185) tedy má vesměs reálné kořeny.

Příklady.

Obecné vývody tohoto odstavce si ozřejmíme vzhledem k jejich zvláštní důležitosti pro fysikální i technickou praxi na několika příkladech.

Příklad 29. Má rovnice

$$f(x) \equiv x^5 - 6x^3 + 28x^2 - 43x + 20 = 0 \qquad (186)$$

celistvé kořeny?

Tato rovnice jest algebraická, stupně pátého s reálnými koeficienty, takže má podle fundamentální věty algebry pět kořenů, z nichž komplexní se mohou vyskytovat pouze v párech navzájem sdružených. Protože je daná rovnice dále přímo typu (161), platí vzorce (165), tedy speciálně pro $\nu = 5$ vztah

$$-a_5 = -20 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5,$$

při čemž značí $x_1, \ldots, x_5$ kořeny naší rovnice (186).

Je tedy každý kořen dělitelem čísla 20, takže stačí k zodpovědění uvedené otázky vyzkoušeti, vyhovuje-li rovnici některá z hodnot: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$. Příslušné výpočty provádíme ovšem Hornerovým schematem a snadno se přesvědčíme, že z těchto dvanácti čísel splňují rovnici (186) dvě, totiž -4 a 1. To jsou tedy dva kořeny naší rovnice a z nich jest kořen 1 dvojnásobný, ježto platí vedle $f(1) = 0$ také ještě $f'(1) = 0$, avšak $f''(1) \neq 0$.

Zbývající dva kořeny si už čtenář snadno určí sám.

Příklad 30. Vyšetřiti vlastnosti kořenů kubické rovnice

$$f(x) \equiv x^3 + 3\alpha_1 x^2 + 3\alpha_2 x + \alpha_3 = 0, \qquad (187)$$

jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ čísla reálná.

Pomocí Newtonových vzorců (168) nebo přímo podle vzorce (169) si určíme napřed potenční součty s_0, s_1, s_2, s_3, s_4. Jednoduchý počet dává

$$s_0 = 3, \; s_1 = -3\alpha_1, \; s_2 = 9\alpha_1^2 - 6\alpha_2,$$
$$s_3 = -27\alpha_1^3 + 27\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_3,$$
$$s_4 = 81\alpha_1^4 - 108\alpha_1^2\alpha_2 + 12\alpha_1\alpha_3 + 18\alpha_2^2$$

a řada (174) hlavních minorů $\Delta_1(f)$, $\Delta_2(f)$ diskriminantu $\Delta(f)$ rovnice (187) zde jest:

$$\Delta_1(f) = 3, \ \Delta_2(f) = 18(\alpha_1^2 - \alpha_2).$$

Diskriminant $\Delta(f)$ samotný má pak podle vzorce (171) hodnotu

$$\Delta(f) = 27(-4\alpha_1^3\alpha_3 + 3\alpha_1^2\alpha_2^2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_2^3 - \alpha_3^2). \tag{188}$$

Podle vztahů (180) a věty k nim patřící dostaneme po malém počítání nutné a postačující podmínky, aby měla rovnice trojnásobný kořen:

$$\alpha_1^2 = \alpha_2, \ \alpha_1^3 = \alpha_3. \tag{189}$$

Tento kořen jest pak ovšem reálný a roven číslu $-\alpha_1$.

K tomu, aby měla rovnice (187) právě dva různé kořeny, jest nutno a stačí, aby bylo

$$4\alpha_1^3\alpha_3 - 3\alpha_1^2\alpha_2^2 - 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\alpha_2^3 + \alpha_3^2 = 0,$$
$$\alpha_1^2 - \alpha_2 \neq 0. \tag{190}$$

V tomto případě má naše rovnice kořeny vesměs reálné a jeden z nich je dvojnásobný.

Podmínka

$$4\alpha_1^3\alpha_3 - 3\alpha_1^2\alpha_2^2 - 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\alpha_2^3 + \alpha_3^2 \neq 0 \tag{191}$$

je konečně nutnou a postačitelnou k tomu, aby byly všechny tři kořeny rovnice (187) navzájem různé. Je-li výraz (191) záporný, jsou kořeny vesměs reálné, je-li kladný, existuje pár kořenů komplexně sdružených; to jest důsledkem vzorce (173) a věty k němu patřící.

Příklad 31. Studovati povahu kořenů rovnice bikvadratické

$$f(x) \equiv x^4 + 4\alpha_1x^3 + 6\alpha_2x^2 + 4\alpha_3x + \alpha_4 = 0 \tag{192}$$

s reálnými součiniteli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Pro hlavní determinanty $\Delta_1(f)$, $\Delta_2(f)$ máme zde podle vzorců (174) a Newtonových vztahů (168) přímo hodnoty

$$\Delta_1(f) = 4,\ \Delta_2(f) = s_0 s_2 - s_1^2 = 48(\alpha_1^2 - \alpha_2), \qquad (193)$$

$\Delta_3(f)$ a diskriminant $\Delta(f) = \Delta_4(f)$ určíme podle vztahů (178) a (179).

Předně vypočítáme podle vzorců (179) hodnoty

$$\begin{aligned}
&e_{22} = -12\alpha_2,\ e_{23} = -12\alpha_3,\ e_{24} = -4\alpha_4;\\
&h_{32} = -12(\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2),\ h_{33} = -4(\alpha_4 + 8\alpha_1\alpha_3),\\
&h_{34} = -12\alpha_1\alpha_4;\\
&h_{42} = -4(\alpha_4 + 8\alpha_1\alpha_3),\ h_{43} = -12(\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_3),\\
&h_{44} = -12\alpha_2\alpha_4
\end{aligned}$$

a pomocí nich nacházíme, používajíce vzorce (178), pro $\Delta_3(f)$ a $\Delta_4(f)$ dlouhé výrazy, jimž však lze dáti aplikací pokročilejší theorie invariantů jednoduchý tvar

$$\Delta_3(f) = 192(3J - 2IH),\ \Delta_4(f) = \Delta(f) = 256(I^3 - 27J^2). \qquad (194)$$

Při tom jest význam zkratek H, I, J určen formulemi

$$\begin{aligned}
H &= \alpha_2 - \alpha_1^2,\\
I &= \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2, \qquad (195)\\
J &= \alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_3^2 - \alpha_1^2\alpha_4 - \alpha_2^3.
\end{aligned}$$

Tyto výsledky nám už dovolují činiti závěry o povaze kořenů rovnice (192) s reálnými koeficienty. Příslušné možnosti sestavíme v tabulku:

I. $\Delta(f) \neq 0$; všechny čtyři kořeny rovnice (192) jsou navzájem různé, jak ukazuje věta navazující na vzorec (171).

IA. $\Delta(f) < 0$; existuje jeden pár kořenů komplexně sdružených a dva navzájem různé kořeny reálné. Je to důsledek vzorce (173).

IB. $\Delta(f) > 0$; kořeny jsou buď všechny reálné, nebo všechny komplexní. Podrobnější theorie ukazuje, že prvý případ nastane, platí-li současně nerovnosti

$$H < 0,\ I - 12H^2 < 0,$$

druhý pro

$$H > 0,\ I - 12H^2 > 0.$$

II. $\Delta(f) = 0$; existují kořeny vícenásobné, jak ukazují vzorce (171).

IIA. Všechny čtyři kořeny jsou stejné, když a jen když platí $H = I = J = 0$, jak ukazují věta a vzorce (180).

IIB. Rovnice (192) má jen dva různé kořeny, když a jen když jest $H \neq 0$, $3J = 2IH$, $I^3 = 27J^2$; opět v důsledku vzorců (180).

IIC. Tři navzájem různé kořeny existují, když a jen když platí současně vztahy

$$3J - 2IH \neq 0,\ I^3 = 27J^2.$$

Ačkoli není tato klasifikace provedena do všech podrobností (body IIB. a IIC. lze ještě dále rozvésti), přece zcela stačí — kombinujeme-li ji eventuelně vhodným způsobem s výsledky předchozího příkladu — ve všech běžných případech fysikální a technické praxe.

Příklad 32. Eliminace neznámé ze dvou rovnic.

Soustava dvou algebraických rovnic o dvou neznámých x, y má obecný tvar

$$f(x, y) = 0,\ g(x, y) = 0; \tag{196}$$

f, g jsou polynomy.

Budiž x_0, y_0 nějaké řešení systému (196) a dosaďme do obou rovnic místo y hodnotu y_0. Dostaneme dvě rovnice $f(x, y_0) = 0$, $g(x, y_0) = 0$ s neznámou veličinou x a o těch víme, že mají společný kořen — je to právě číslo x_0. Má tedy jejich resultant nulovou hodnotu a vztah tuto skutečnost vyjadřující obsahuje vedle koeficientů daných rovnic (196) už jenom veličinu y_0. Vzniká nám tak algebraická určovací rovnice pro y_0 a obdobným způsobem bychom dospěli také k rovnici pro určení x_0.

Podrobnějším rozváděním těchto myšlenek se zde nebudeme zabývati a ukážeme si raději na důležitém příkladě dvou rovnic druhého stupně se dvěma neznámými, jak se zmíněná eliminace skutečně provádí. Při tom použijeme už dříve zavedeného označení

$$(ab) = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Chceme-li z daných rovnic

$$a_ix^2 + b_ixy + c_iy^2 + d_ix + e_iy + f_i = 0; \; i = 1, 2 \quad (197)$$

vyloučiti na příklad neznámou y, píšeme je ve tvaru

$$c_iy^2 + (b_ix + e_i)\, y + a_ix^2 + d_ix + f_i = 0; \; i = 1, 2$$

a položíme-li rovný nule jejich resultant, pokládajíce jejich levé strany za polynomy v y.

Vznikne nám tak rovnice

$$\begin{vmatrix} c_1, & b_1x + e_1, & a_1x^2 + d_1x + f_1, & 0 \\ 0, & c_1, & b_1x + e_1, & a_1x^2 + d_1x + f_1 \\ c_2, & b_2x + e_2, & a_2x^2 + d_2x + f_2, & 0 \\ 0, & c_2, & b_2x + e_2, & a_2x^2 + d_2x + f_2 \end{vmatrix} = 0,$$

kterou snadno (třeba rozvojem daného determinantu pomocí Laplaceovy věty) uvedeme na tento výsledný tvar

$$\begin{gathered}[(ab)(bc) - (ac)^2]\, x^4 + \{-(ab)(ce) + 2(ac)(cd) - \\ - (bc)[-(ae) + (bd)]\}\, x^3 + \{2(ac)(cf) - (bc)\,[(bf) - (de)] - \\ - (cd)^2 + (ce)\,[-(ae) + (bd)]\}\, x^2 + \\ + \{-(bc)(ef) - 2(cd)(cf) + (ce)[(bf) - (de)]\}\, x + \\ + (ce)(ef) - (cf)^2 = 0.\end{gathered} \quad (198)$$

Analogicky si čtenář odvodí výsledek eliminace neznámé x z obou daných rovnic (196) (ostatně jej lze přímo napsati už na základě formule (198) — jak?):

$$\begin{gathered}[(ab)(bc) - (ac)^2]\, y^4 + \{(ab)[(be) - (cd)] - \\ - 2(ac)(ae) + (ad)(bc)\}\, y^3 + \{(ab)[(bf) + (de)] - \\ - 2(ac)(af) + (ad)[(be) - (cd)] - (ae)^2\}\, y^2 + \\ + \{(ab)(df) + (ad)[(bf) + (de)] - 2(ae)(af)\}\, y + \\ + (ad)(df) - (af)^2 = 0.\end{gathered} \quad (199)$$

Příklad 33. Nakonec se budeme zabývati soustavou

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = \lambda \varkappa_i x_i; \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{200}$$

n homogenních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ za těchto předpokladů:

$a_{i\nu} = a_{\nu i}$ $(i, \nu = 1, 2, \ldots, n)$ jsou daná reálná čísla;

$\varkappa_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jsou daná reálná čísla vesměs různá od nuly a téhož znaménka;

λ jest parametr.

Nutnou a postačující podmínkou pro existenci netriviálních řešení našeho (technicky důležitého) systému (200) jest anulování jeho determinantu, takže má soustava (200) nenulová řešení jen pro zcela určité hodnoty parametru λ. Rovnici pro tato λ dostaneme tím, že do determinantu naší soustavy zavedeme místo koeficientů $a_{i\nu}$ nové $\alpha_{i\nu}$ rovnicemi

$$a_{i\nu} = \sqrt{\varkappa_i \varkappa_\nu}\, \alpha_{i\nu}; \; i, \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{201}$$

a tento pak položíme rovný nule.

Tím se objeví podmínka pro určení λ ve tvaru sekulární rovnice

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} - \lambda, & \ldots, & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, & \ldots, & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{202}$$

která má n reálných kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; říká se jim charakteristické konstanty problému (200).

Ke každé charakteristické konstantě λ_ω $(\omega = 1, 2, \ldots, n)$ přísluší pak řešení $x_{\omega 1}, x_{\omega 2}, \ldots, x_{\omega n}$ soustavy (200) a to řešení určené až na libovolnou multiplikativní konstantu. Stanovíme-li ji tak, aby pro příslušné řešení platil vztah

$$\sum_{i=1}^{n} x_{\omega i}^2 \varkappa_i = 1, \tag{203}$$

dospíváme tím ku ω-tému normovanému řešení úlohy (200). Takováto normovaná řešení budeme v dalším mlčky předpokládati.

Mezi dvěma řešeními

$$x_{\omega i}, x_{\sigma i};\ i = 1, 2, \ldots, n$$

patřícími ke dvěma různým charakteristickým konstantám λ_ω, λ_σ (nejsou-li ovšem všechny tyto konstanty navzájem stejné) platí důležitý vztah

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i x_{\omega i} x_{\sigma i} = 0. \tag{204}$$

Takováto dvě řešení jsou tedy navzájem orthogonální.

Důkaz se provede zcela snadno pomocí rovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} x_{\sigma i} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_{\omega\nu} = \sum_{i=1}^{n} x_{\omega i} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_{\sigma\nu}$$

a za použití rovnic (200) tímto výpočtem:

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i x_{\omega i} x_{\sigma i} = \frac{1}{\lambda_\sigma} \sum_{i=1}^{n} x_{\omega i} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_{\sigma\nu} = \frac{1}{\lambda_\omega} \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma i} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_{\omega\nu}.$$

Protože jest podle předpokladu $\lambda_\omega \neq \lambda_\sigma$, dostáváme odtud jako nutný důsledek právě vzorec (204).

Otázkami souvisícími s případy, kdy má charakteristická rovnice (202) problému (200) vícenásobné kořeny, se budeme zabývati až později.