9. DISKRIMINANT BINÁRNÍ FORMY.

Definice. Je-li dána binární forma

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} y^i, \tag{89}$$

nazýváme resultant $R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ binárních forem $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ diskriminantem dané formy f.

Skutečný výpočet diskriminantu je v obecném případě, kdy je forma dána ve tvaru (89), dosti pracný (v. př. 24). Poměrně jednoduše se dá tento výpočet provésti, jestliže je forma f rozložena v součin svých lineárních faktorů, tedy psána ve tvaru

$$f = \prod_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu x + \delta_\nu y). \tag{90}$$

V tomto případě vyjdeme ze vztahu — v. vzorce (82) a (83) —

$$R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, y\right) . R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= (-1)^n R(y, x) . R\left(y, \frac{\partial f}{\partial x}\right) . (-1)^{n(n-1)} R\left(\frac{\partial f}{\partial y}, x\right) .$$

$$. R\left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) =$$

$$= (-1)^{n^2+(n-1)^2} R(y, x)\, R\left(y, \frac{\partial f}{\partial x}\right) R\left(\frac{\partial f}{\partial y}, x\right) R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Je však $R(y, x) = -1$ a podle vzorců (86) dále

$$R\left(y, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = (-1)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = (-1)^{n-1}n\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n,$$

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial y}, x\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, -1) = (-1)^{n+1}n\delta_1\delta_2\dots\delta_n;$$

tím dostáváme pro diskriminant $R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ dané binární formy (89) vztah

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n\delta_1\delta_2\dots\delta_n}R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial x}\right). \quad (91)$$

Nyní už běží jen o výpočet $R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Podle vzorce (87) a Eulerovy identity pro homogenní funkce platí

$$R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, nf\right). \quad \text{(a)}$$

Ze vztahu (90) však nalezneme snadno (logaritmickým derivováním)

$$x\frac{\partial f}{\partial x} = x\prod_{\nu=1}^{n}(\gamma_\nu x + \delta_\nu y)\,.\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu x + \delta_\nu y} =$$

$$= x\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu\prod_{\mu\neq\nu}(\gamma_\mu x + \delta_\mu y); \quad \text{(b)}$$

položíme-li pak

$$nf = \prod_{\nu=1}^{n}(\Gamma_\nu x + \Delta_\nu y), \quad (92)$$

dostáváme podle (86)

$$R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, nf\right) = \prod_{\nu=1}^{n}\Delta_\nu\frac{\partial f}{\partial x}(\Delta_\nu - \Gamma_\nu) =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{n}\Delta_\nu\sum_{\varrho=1}^{n}\gamma_\varrho\prod_{\mu\neq\varrho}(\gamma_\mu\Delta_\nu - \delta_\mu\Gamma_\nu). \quad \text{(c)}$$

Porovnáme-li nyní vztahy (90) a (92) navzájem, vidíme, že můžeme klásti na příklad

$$\Gamma_\nu = n^{\frac{1}{n}}\gamma_\nu,\ \Delta_\nu = n^{\frac{1}{n}}\delta_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots, n; \tag{93}$$

dosazením do (c) pak dostaneme (doporučuji provésti podrobně)

$$R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, nf\right) = \prod_{\nu=1}^{n} n\gamma_\nu\delta_\nu \prod_{\mu\neq\nu}^{1,n}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu) =$$

$$= n^n\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\prod_{\nu=1}^{n}\prod_{\mu\neq\nu}^{1,n}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu).$$

Vnitřní součin upravíme

$$\prod_{\mu\neq\nu}^{1,n}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu) = \prod_{\mu=1}^{\nu-1}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu)\prod_{\mu=\nu+1}^{n}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu) =$$

$$= \prod_{\mu=1}^{\nu-1}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu)\,(-1)^{n-\nu}\prod_{\mu=\nu+1}^{n}(\gamma_\nu\delta_\mu - \delta_\nu\gamma_\mu) =$$

$$= (-1)^{n-\nu}\prod_{\mu=1}^{\nu-1}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu)\prod_{\mu=\nu+1}^{n}(\gamma_\nu\delta_\mu - \delta_\nu\gamma_\mu)$$

a najdeme

$$R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, nf\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]}n^n\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\prod_{\mu<\nu}^{1,n}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu)^2. \tag{d}$$

Odtud pak dostaneme dosazením do vzorce (91) a vzhledem k (a) hotovou formuli pro výpočet diskriminantu formy (90):

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]}n^{n-2}\prod_{\mu<\nu}^{1,n}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu)^2. \tag{94}$$

Vzorec (94) podává návod, jak se určí diskriminant formy f, je-li tato dána jako součin svých lineárních faktorů. S tímto tvarem diskriminantu souvisí úzce tvar další, k němuž dospějeme takto: Vzorec (23′) pro hodnotu Vandermondeova determinantu (23) z dílu prvého píšeme ve formě

$$V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} \prod_{\mu<\nu}^{1,n} (x_\mu - x_\nu),$$

položíme v něm $x_\nu = \dfrac{\gamma_\nu}{\delta_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ a povýšíme pak na druhou. Dostaneme

$$V_n^2\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}, \frac{\gamma_2}{\delta_2}, \ldots, \frac{\gamma_n}{\delta_n}\right) = \prod_{\mu<\nu}^{1,n} \frac{(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu)^2}{(\delta_\mu\delta_\nu)^2} =$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} n^{2-n} \frac{1}{\prod\limits_{\mu<\nu}^{1,n} \delta_\mu^2\delta_\nu^2} R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

takže můžeme resultant $R\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ psáti ve tvaru

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} n^{n-2} \prod_{\mu<\nu}^{1,n} \delta_\mu^2\delta_\nu^2 \,.\, V_n^2\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}, \frac{\gamma_2}{\delta_2}, \ldots, \frac{\gamma_n}{\delta_n}\right). \qquad \text{(e)}$$

Nyní však jest — v. vzorec (23) v dílu prvém —

$$V_n\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}, \frac{\gamma_2}{\delta_2}, \ldots, \frac{\gamma_n}{\delta_n}\right) = \frac{1}{(\delta_1\delta_2 \ldots \delta_n)^{n-1}} \,.$$

$$. \begin{vmatrix} \delta_1^{n-1}, & \gamma_1\delta_1^{n-2}, & \gamma_1^2\delta_1^{n-3}, & \ldots, \gamma_1^{n-1} \\ \delta_2^{n-1}, & \gamma_2\delta_2^{n-2}, & \gamma_2^2\delta_2^{n-3}, & \ldots, \gamma_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_n^{n-1}, & \gamma_n\delta_n^{n-2}, & \gamma_n^2\delta_n^{n-3}, & \ldots, \gamma_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

zdvojmocnění, jehož potřebujeme, abychom mohli dosaditi do vztahu (e), provedeme tak, že násobíme determinant právě napsaný sebou samým po sloupcích. Dostaneme determinant S s obecným členem

$$c_{ik} = \sum_{\varrho=1}^{n} \gamma_\varrho^{i+k-2} \delta_\varrho^{2n-i-k} = s_{i+k-2,2n-i-k}; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

takže můžeme psáti

$$V_n^2\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}, \frac{\gamma_2}{\delta_2}, \ldots, \frac{\gamma_n}{\delta_n}\right) = \frac{1}{(\delta_1\delta_2 \ldots \delta_n)^{2n-2}} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} s_{0,2n-2}, & s_{1,2n-3}, & s_{2,2n-4}, & \ldots, & s_{n-1,n-1} \\ s_{1,2n-3}, & s_{2,2n-4}, & s_{3,2n-5}, & \ldots, & s_{n,n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1,n-1}, & s_{n,n-2} & s_{n+1,n-3}, & \ldots, & s_{2n-2,0} \end{vmatrix}.$$

Dosazením tohoto výsledku do vztahu (e) dostáváme po maličké úpravě definitivní vzorec:

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} n^{n-2} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} s_{0,2n-2}, & s_{1,2n-3}, & \ldots, & s_{n-1,n-1} \\ s_{1,2n-3}, & s_{2,2n-4}, & \ldots, & s_{n,n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1,n-1}, & s_{n,n-2}, & \ldots, & s_{2n-2,0} \end{vmatrix}. \qquad (95)$$

Nalezli jsme tak vyjádření diskriminantu formy (90) pomocí determinantu, který je typu persymetrického — v. odst. 8. dílu prvého.

Pomocí diskriminantu formy (89) lze snadno rozhodnouti, zdali má tato vícenásobné lineární faktory. Provedeme to předpokládajíce diskriminant ve tvaru (94). Má-li forma (89) alespoň dvojnásobný lineární faktor, je zřejmě podle (94) její diskriminant roven nule. Je-li naopak tento diskriminant nulový, musí nutně existovati alespoň dva indexy $\mu_0 < \nu_0$ tak, že je $\gamma_{\mu_0}\delta_{\nu_0} - \delta_{\mu_0}\gamma_{\nu_0} = 0$, t. j. $\gamma_{\nu_0} = \varrho\gamma_{\mu_0}$, $\delta_{\nu_0} = \varrho\delta_{\mu_0}$; pak jsou oba činitelé $\gamma_{\mu_0}x + \delta_{\mu_0}y$ a $\gamma_{\nu_0}x + \delta_{\nu_0}y$ navzájem stejné a forma má alespoň dvojnásobný lineární faktor. Lze tedy vysloviti

větu 12. Nutná a postačující podmínka, aby binární forma měla vícenásobný lineární faktor, jest anulování jejího diskriminantu.

Položíme-li ve formě (89) hodnotu proměnné y rovnou 1, dostaneme zvláštní její případ — mnohočlen $f(x)$ proměnné x (stupeň budiž m):

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}. \tag{96}$$

Všechny pojmy a úvahy tohoto paragrafu se ovšem přenášejí také na tento polynom — jenom jest nutno je přizpůsobiti poměrům zde panujícím. Také pojem resultantu dvou binárních forem f a g a vše, co s ním souvisí, lze přenésti na případ dvou polynomů $f(x)$, $g(x)$, jež z daných forem f, g vzniknou, položíme-li v nich $y = 1$. Naznačíme zde stručně, jak se modifikují dříve uvedené pojmy a poznatky, přejdeme-li od forem dvou proměnných x, y k polynomům proměnné x.

Buďtež dány dva polynomy

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k}. \tag{97}$$

Také zde platí věta, že lze každý z nich rozložiti jediným způsobem v součin lineárních faktorů, tedy

$$f(x) = \prod_{\mu=1}^{m} (\gamma_\mu x + \delta_\mu), \quad g(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (\varkappa_\nu x + \lambda_\nu). \tag{98}$$

Důkaz tohoto tvrzení se provádí zcela analogicky, jako se stalo v odst. 8. — jsou zde jen nepatrné změny zcela přiměřené povaze věci.

Resultant $R(f, g)$ obou polynomů (97) se definuje stejně, jako se stalo u dvou binárních forem, takže

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots, & a_m, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & a_0, & \ldots, & a_{m-1}, & a_m, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_m \\ b_0, & b_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0, & b_0, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & b_1, & b_2, & \ldots, & b_n \end{vmatrix}. \tag{99}$$

Také zde je anulování resultantu nutnou a postačující podmínkou pro soudělnost obou polynomů (97). Důkaz se provádí stejně jako při formách binárních.

Pro resultant polynomu f a lineární funkce $l = \alpha x + \beta$ nacházíme stejně, jako v odst. 8., výraz

$$R(f, l) = a_0\beta^m - a_1\alpha\beta^{m-1} + a_2\alpha^2\beta^{m-2} - \ldots + (-1)^m a_m\alpha^m, \tag{100}$$

pouze je nutno jej nyní jinak interpretovat, než se stalo ve vzorci (81). Najdeme snadno

$$R(f, l) = (-\alpha)^m f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right). \tag{101}$$

Vzorec (82), tedy

$$R(f, lg) = R(f, l) \,.\, R(f, g), \tag{102}$$

podrží svou platnost i když jsou f, g, l polynomy. Důkaz se provádí analogicky, jako v odst. 8.

Také vztah (83) platí beze změny, takže je

$$R(f, g) = (-1)^{mn} R(g, f) \tag{103}$$

a stejně také

$$R(f, g) = \prod_{\mu, \nu} (\gamma_\mu \lambda_\nu - \delta_\mu \varkappa_\nu); \; \mu = 1, 2, \ldots, m, \; \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{104}$$

Tomuto poslednímu vzorci lze dáti zajímavý tvar. Nulové body polynomů $f(x)$, $g(x)$ označme znaky resp. α_μ, β_ν. Pak je zřejmě

$$\alpha_\mu = -\frac{\delta_\mu}{\gamma_\mu}, \; \delta_\mu = -\alpha_\mu \gamma_\mu; \beta_\nu = -\frac{\lambda_\nu}{\varkappa_\nu}, \; \lambda_\nu = -\beta_\nu \varkappa_\nu;$$
$$\mu = 1, 2, \ldots, m, \; \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{105}$$

a vztah (104) můžeme postupně upraviti takto:

$$R(f, g) = \prod_{\mu, \nu} (\gamma_\mu \lambda_\nu - \delta_\mu \varkappa_\nu) = \prod_{\mu, \nu} \gamma_\mu \varkappa_\nu (\alpha_\mu - \beta_\nu) =$$
$$= a_0{}^n b_0{}^m \prod_{\mu, \nu} (\alpha_\mu - \beta_\nu).$$

Máme tedy resultant dvou polynomů vyjádřen jejich nulovými body:

$$R(f, g) = a_0{}^n b_0{}^m \prod_{\mu, \nu} (\alpha_\mu - \beta_\nu). \tag{106}$$

Stejně snadno zjistíme, jak se modifikují vzorce (86). Upravujíce vztah (104), najdeme

$$R(f, g) = \prod_{\nu=1}^{n} [\prod_{\mu=1}^{m} (-\varkappa_\nu)(\gamma_\mu \beta_\nu + \delta_\mu)] = \prod_{\nu=1}^{n} (-\varkappa_\nu)^m f(\beta_\nu) =$$
$$= (-1)^{mn} b_0{}^m f(\beta_1)\, f(\beta_2) \ldots f(\beta_n),$$

anebo druhým způsobem

$$R(f, g) = \prod_{\mu=1}^{m} [\prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\mu (\varkappa_\nu \alpha_\mu + \lambda_\nu)] = \prod_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu^n g(\alpha_\mu) =$$
$$= a_0{}^n g(\alpha_1)\, g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_m).$$

Vzorce pro resultant dvou polynomů, analogické vztahům (86), tedy znějí

$$R(f, g) = (-1)^{mn} b_0{}^m f(\beta_1)\, f(\beta_2) \ldots f(\beta_n),$$
$$R(f, g) = a_0{}^n g(\alpha_1)\, g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_m). \tag{107}$$

Také všechny ostatní úvahy z odst. 8. se přenášejí z forem na polynomy; zvláště důležitá je z nich věta 11. a vzorec (87).

Pokud jde o diskriminant $D(f)$ polynomu (96), nemůžeme jej ovšem definovati tak, jak jsme učinili pro binární formu na počátku tohoto paragrafu (ježto polynom má pouze proměnnou x, nelze mluvit o jeho parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}$ podle y). Zato však jsou schopny přenesení vztahy (91) a potom (a). Užívajíce jich, definujeme diskriminant $D(f)$ takto:

$$D(f) = \frac{1}{m^2 a_0 a_m} R(xf', mf), \quad f' = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{108}$$

Tento definiční vztah lze ovšem upraviti. Podle dosavadních výsledků totiž máme

$$R(xf', mf) = m^m R(xf', f) = (-1)^{m^2} m^m R(f, x) \,.\, R(f, f') =$$
$$= (-1)^{m^2} m^m (-1)^m f(0)\, R(f, f') = m^m a_m R(f, f'),$$

takže můžeme vzorec pro diskriminant polynomu (96) napsati ve tvaru

$$D(f) = \frac{1}{a_0} m^{m-2} R(f, f'). \tag{109}$$

Použitím vzorců (107) dostáváme pak diskriminant v jiném tvaru

$$D(f) = (ma_0)^{m-2} f'(\alpha_1)\, f'(\alpha_2) \ldots f'(\alpha_m). \tag{110}$$

Existuje ještě další vyjádření diskriminantu $D(f)$ pomocí kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ polynomu $f(x)$. Od rozkladu (98) snadno dospějeme pomocí vzorců (105) k rozkladu na „kořenové činitele“:

$$f(x) = a_0 \prod_{\mu=1}^{m} (x - \alpha_\mu) = a_0 (x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m); \tag{111}$$

odtud pak nacházíme

$$f'(x) = f(x) \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{x - \alpha_\mu},$$

takže bude

$$f'(\alpha_\varrho) = a_0 \prod_{\mu \neq \varrho}^{1,\, m} (\alpha_\varrho - \alpha_\mu)$$

a vzorec (110) nabývá tvaru

$$D(f) = m^{m-2} a_0^{2m-2} \prod_{\varrho=1}^{m} \prod_{\mu \neq \varrho}^{1,\, m} (\alpha_\varrho - \alpha_\mu). \tag{110'}$$

Postupem zcela stejným, jakého bylo použito při odvozování formule (94), najdeme také zde

$$D(f) = (-1)^{\frac{1}{2}[m(m-1)]}\, m^{m-2} a_0^{2m-2} \prod_{\mu < \varrho}^{1,\, m} (\alpha_\mu - \alpha_\varrho)^2 \tag{112}$$

a zavedením Vandermondeova determinantu dále

$$D(f) = (-1)^{\frac{1}{2}[m(m-1)]} m^{m-2} a_0^{2m-2} \begin{vmatrix} 1, & \alpha_1, & \alpha_1^2, & \ldots, & \alpha_1^{m-1} \\ 1, & \alpha_2, & \alpha_2^2, & \ldots, & \alpha_2^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \alpha_m, & \alpha_m^2, & \ldots, & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}^2 . \tag{113}$$

Provedeme-li zdvojmocnění determinantu zde figurujícího po sloupcích a označíme-li

$$s_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_m^k, \tag{114}$$

dostaneme další, velmi známý tvar diskriminantu polynomu $f(x)$:

$$D(f) = (-1)^{\frac{1}{2}[m(m-1)]} m^{m-2} a_0^{2m-2} \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \ldots, & s_{m-1} \\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m-1}, & s_m, & \ldots, & s_{2m-2} \end{vmatrix} . \tag{115}$$

Determinant ze vzorce (115) je orthosymetrický (v. odst. 8. dílu prvého).

Fakt, že má polynom $f(x)$ vícenásobné kořeny, když a jen když je jeho diskriminant roven nule, je nyní zřejmý z pouhého pohledu na vzorec (112) nebo (113).

S pojmem diskriminantu souvisí ovšem ještě zákonitosti povahy mnohem hlubší, než ty, které jsme tu probrali. S některými z nich se seznámíme v odstavci jednajícím o aplikaci determinantů v theorii rovnic (v. odst. 11.).

Poznámky. 1. Pojem resultantu byl dokonale znám už Eulerovi (Introductio in analysin infinitorum, Lausanne 1748); methoda, které jsme zde užili pro jeho konstrukci, je známa pode jménem „dialytická" a pochází od Sylvestera (Phil. Mag., 1840). Souvislost diskriminantu dvou polynomů s jejich nulovými body studovali po prvé Euler (Hist. de l'acad. de Berlin, 1748) a Cramer (Introduction à l'analyse des lignes courbes, Génève 1750). Vyjádření resultantu dvou forem binárních téhož stupně ve tvaru symetrického determinantu (jak jsme se o něm zmínili na konci př. 23) provedl jako prvý Bézout (Mém. Acad. de Paris 1764), zvláště pak elegantní způsob pochází od Cayleya (Journ. f. Math., 1857).

2. Pojem „diskriminant polynomu“ pochází od Sylvestera (Philos. Mag., 1851). V učebnicích algebry se definuje diskriminant poněkud odchylně, než se stalo ve vzorci (108); tato odlišnost má důsledek v tom, že místo vztahu (109) vychází pro $D(f)$ jiný:

$$D(f) = (-1)^{\frac{1}{2}[m(m-1)]} \cdot \frac{1}{a_0} R(f, f'). \tag{116}$$

Pak je ovšem nutno patřičně pozměnit i další vzorce pro určení $D(f)$.

Příklady.

24. Diskriminant binární formy 4. stupně

$$f(x, y) = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4. \tag{117}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4a_0x^3 + 3a_1x^2y + 2a_2xy^2 + a_3y^3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a_1x^3 + 2a_2x^2y + 3a_3xy^2 + 4a_4y^3.$$

Pro diskriminant dostáváme

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} 4a_0, & 3a_1, & 2a_2, & a_3, & 0, & 0 \\ 0, & 4a_0, & 3a_1, & 2a_2, & a_3, & 0 \\ 0, & 0, & 4a_0, & 3a_1, & 2a_2, & a_3 \\ a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 0 \\ 0, & 0, & a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4 \end{vmatrix}. \tag{118}$$

Skutečný výpočet se provede tak, že pořadí řádek změníme z daného — označme je 1, 2, 3, 4, 5, 6 — na nové: 1, 4, 2, 5, 3, 6 (v. př. 22). Determinant, který tak dostaneme, jeho hodnota je podle př. 22 rovna $-R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, pak vypočítáme způsobem naznačeným v př. 22. Najdeme po dosti dlouhém počítání

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (3a_1^2 - 8a_0a_2)\,[(9a_1a_3 - 4a_2^2)(8a_2a_4 - \\ - 3a_3^2) - (12a_1a_4 - 2a_2a_3)^2 + (8a_2a_4 - 3a_3^2)(16a_0a_4 - a_1a_3)] + \\ + (12a_0a_3 - 2a_1a_2)[(12a_0a_3 - 2a_1a_2)(8a_2a_4 - 3a_3^2) + \\ + (a_1a_3 - 16a_0a_4)(12a_1a_4 - 2a_2a_3)] + (a_1a_3 - 16a_0a_4)\,. \\ .\,[(8a_0a_2 - 3a_1^2)(8a_2a_4 - 3a_3^2) - (16a_0a_4 - a_1a_3)^2] = \\ = 8(3a_1^2 - 8a_0a_2)(16a_0a_2a_4^2 - 6a_0a_3^2a_4 - \\ - 18a_1^2a_4^2 + 14a_1a_2a_3a_4 - 3a_1a_3^3 - 4a_2^3a_4 + a_2^2a_3^2) + \\ + 8(6a_0a_3 - a_1a_2)(-48a_0a_1a_4^2 + 32a_0a_2a_3a_4 - 9a_0a_3^3 + \\ + a_1a_2a_3^2 - 4a_1a_2^2a_4 + 3a_1^2a_3a_4) + 8(a_1a_3 - 16a_0a_4)\,. \\ .\,(-32a_0^2a_4^2 + 4a_0a_1a_3a_4 + 8a_0a_2^2a_4 - 3a_0a_2a_3^2 - \\ - 3a_1^2a_2a_4 + a_1^2a_3^2).$$

Provedeme naznačená násobení a dostaneme

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 16(256a_0^3a_4^3 - 192a_0^2a_1a_3a_4^2 - 128a_0^2a_2^2a_4^2 + \\ + 144a_0^2a_2a_3^2a_4 - 27a_0^2a_3^4 + 144a_0a_1^2a_2a_4^2 - 6a_0a_1^2a_3^2a_4 - \\ - 80a_0a_1a_2^2a_3a_4 + 18a_0a_1a_2a_3^3 + 16a_0a_2^4a_4 - \\ - 4a_0a_2^3a_3^2 - 27a_1^4a_4^2 + 18a_1^3a_2a_3a_4 - 4a_1^2a_2^3a_4 + \\ + a_1^2a_2^2a_3^2 - 4a_1^3a_3^3). \tag{119}$$

Sečteme-li v každém členu všechny indexy u veličin a, dostáváme vždy součet 12. Vyjadřujeme to rčením, že je diskriminant binární formy 4. stupně isobarickou funkcí koeficientů a to funkcí váhy 12.

25. Má binární forma

$$f = 2x^4 - 9x^3y + 17x^2y^2 - 16xy^3 + 6y^4$$

vícenásobné lineární faktory?

Diskriminant této formy (vypočítejte jej přímo podle definice a také podle vzorce odvozeného v př. 24) má hodnotu — 1600, takže lze formu f rozložiti na součin čtyř lineárních navzájem různých faktorů. Koeficienty těchto faktorů nemohou ovšem býti vesměs reálné, ježto by v tomto případě musil býti diskriminant podle vzorce (94) kladný. Skutečně lze psáti

$$f = (x - y)(2x - 3y)[x - (1 - i)\, y][x - (1 + i)\, y],$$

kde i značí imaginární jednotku. Vypočítejte odtud znovu podle vzorce (94) hodnotu diskriminantu dané formy.

26. Rozhodněte otázku soudělnosti polynomů

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3, \quad g(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9.$$

Snadno vypočítáme, že má resultant obou mnohočlenů nulovou hodnotu, takže jsou tyto soudělné. Mají tedy alespoň jeden lineární faktor společný. Ve smyslu věty 11., jejíž platnost se přenáší, jak bylo výše uvedeno, také na polynomy, sestrojíme matici M_1 a zkoumáme její hodnost h_1.

Máme zde

$$M_1 = \begin{Vmatrix} 1, & -1, & -5, & -3, & 0 \\ 0, & 1, & -1, & -5, & -3 \\ 1, & -5, & 3, & 9, & 0 \\ 0, & 1, & -5, & 3, & 9 \end{Vmatrix}$$

a snadno najdeme $h_1 = 3$, takže mají polynomy podle věty 11. alespoň dva společné lineární faktory. Sestavíme ještě matici M_2

$$M_2 = \begin{Vmatrix} 1, & -1, & -5, & -3 \\ 1, & -5, & 3, & 9 \end{Vmatrix};$$

její hodnost je $h_2 = 2$ a polynomy mají největší společný dělitel právě stupně druhého. Určete jej známým Euklidovým postupem a rozložte pak oba mnohočleny na lineární faktory.