Determinanty a matice v theorii a praxi

4. Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v theorii a praxi. Část druhá. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. pp. 23–27.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/403289`

4. SOUSTAVA m LINEÁRNÍCH ROVNIC O n NEZNÁMÝCH.

Soustavu m rovnic pro neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_n$ píšeme ve tvaru

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{23}$$

a předpokládáme, že *není homogenní*, t. j., že aspoň jedno z čísel $b_1, b_2, \ldots, b_m$ je různé od nuly.

Připojíme-li k matici soustavy ještě $(n+1)$-ní sloupec tvořený čísly $b_1, b_2, \ldots, b_m$, dostaneme t. zv. matici rozšířenou a platí pak o řešitelnosti soustavy (23) tato všeobecná

věta 7. (Frobeniova): *Nutná a postačující podmínka pro řešitelnost soustavy* (23) *je ta, aby matice soustavy a matice rozšířená měly stejnou hodnost.*

Důkaz. Je-li soustava řešitelná, ukazují rovnice (23), že $(n + 1)$-ní sloupec rozšířené matice je lineární kombinací prvých n jejích sloupců, takže jsou opravdu hodnosti obou matic, o nichž věta Frobeniova mluví, stejné (v. věta 11, část prvá).

Mají-li naopak obě matice stejnou hodnost h, pak také matice

$$\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \ldots & a_{m1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \ldots, & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \ldots, & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \ldots, & a_{m1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \ldots, & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \ldots, & a_{mn} \\ b_1, & b_2 & \ldots, & b_m \end{Vmatrix}$$

mají tutéž hodnost h a v prvé z nich lze nalézti podle věty 1. právě h nezávislých řádků, jichž jsou všechny její ostatní řádky lineárními kombinacemi. Těchto h řádků je ovšem nezávislých také, když je počítáme k matici druhé a ježto také tato má hodnost h, je každý její další řádek lineární kombinací oněch h spolu nezávislých. Také řádek $b_1, b_2, \ldots, b_m$ je tedy jejich lineární kombinací a tudíž také lineární kombinací všech řádků matice prvé. To však značí (v. definici lineární kombinace, vzorec v prvém (11) dílu), že je soustava (23) řešitelná.

Případ, kdy soustava (23) nemá řešení, necháváme stranou a obrátíme se k tomu, kdy obě matice, o nichž mluví věta 7., mají stejnou hodnost h, takže rovnice (23) jsou řešitelné. Jak určíme jejich řešení?

Zavedeme-li si také pro soustavu (23) pojem redukované soustavy — děje se to doslova tak, jako při systému rovnic homogenních — můžeme ihned udati jedno řešení rovnic (23) a to tímto způsobem: V redukované soustavě změníme pořadí neznámých tak, aby byl splněn předpoklad (5) (označíme je v tomto pořadí opět znaky $x_1, x_2, \ldots, x_n$), neznámým $x_{h+1}, \ldots, x_n$ přidělíme zcela libovolné číselné hodnoty a vypočítáme pak Cramerovým pravidlem hodnoty zbylých neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_h$. Soustava

$$x_1, x_2, \ldots, x_h \tag{24}$$

vypočteno při libovolně zvolených $x_{h+1}, \ldots, x_n$ je pak řešením také oněch rovnic (23), které nepatří k uvažovanému redukovanému systému, protože je každá z nich lineární kombinací rovnic soustavy redukované.

Lze nyní ukázat, že všechna možná řešení systému (23) vůbec lze zbudovati z čísel (24) a z řešení homogenního systému, vzniklého tím, že v rovnicích (23) položíme všechna b_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ rovna nule. Dokážeme si totiž

větu 8. Obecné řešení systému (23) získáme, když k obecnému řešení příslušné soustavy homogenní přičteme nějaké speciální řešení rovnic (23).

Důkaz. Budiž $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ obecné řešení homogenní soustavy, o níž mluví věta 8. a položme $X_1 = \xi_1 + x_1$,

$X_2 = \xi_2 + x_2, \ldots, X_n = \xi_n + x_n$, kde je $x_1, x_2, \ldots, x_n$ speciální řešení rovnic (23), na př. řešení (24). Pak jest

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} X_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}(\xi_\nu + x_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}\xi_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = 0 + b_i = b_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

takže je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ řešením systému (23). Zbývá ještě dokázati, že vůbec každé řešení rovnic (23) lze takto vyjádřiti. Je-li však $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n$ zcela libovolné řešení těchto rovnic, položme $\overline{X}_1 - x_1 = \overline{\xi}_1, \overline{X}_2 - x_2 = \overline{\xi}_2, \ldots, \overline{X}_n - x_n = \overline{\xi}_n$. Potom platí

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}\overline{\xi}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}(\overline{X}_\nu - x_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}\overline{X}_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = b_i - b_i = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

takže je $\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \ldots, \overline{\xi}_n$ řešením homogenní soustavy příslušné k rovnicím (23) a jest $\overline{X}_1 = \overline{\xi}_1 + x_1$, $\overline{X}_2 = \overline{\xi}_2 + x_2, \ldots, \overline{X}_n = \overline{\xi}_n + x_n$.

Příklady.

12. Řešte, je-li to možno, rovnice

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 \phantom{{}- 4x_3} + 3x_4 &= 2 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= -1 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= \varrho. \end{aligned} \tag{25}$$

Aby soustava byla řešitelná, je nutno a stačí, aby matice soustavy a matice rozšířená měly stejnou hodnost. Protože však má matice soustavy hodnost $h = 2$ (v. př. 1.), musí také matice rozšířená míti hodnost 2 a to také stačí. Prvé dva řádky této matice jsou lineárně nezávislé, takže je nutno určit ϱ tak, aby poslední řádek byl lineární kombinací prvých dvou. Z příkladu 1. však už známe koeficienty této lineární kombinace — jsou to čísla $-1, 1, 2$ — a proto je nutno, aby $(-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2\varrho = 0$, t. j. $\varrho = \frac{3}{2}$.

Redukovaná soustava je

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 3x_4 &= 2 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= -1; \end{aligned}$$

x_3, x_4 jsou zcela libovolná, takže je obecně

$$\begin{aligned} 44x_1 &= \quad 10 + \ \ 8x_3 - 32x_4 \\ 44x_2 &= -19 + 20x_3 - 14x_4. \end{aligned}$$

Zvolíme-li si ku př. $x_3 = x_4 = 0$, dostáváme jedno řešení rovnic (25), ve kterých ovšem je $\varrho = \frac{3}{2}$, ve tvaru:

$$x_1 = \tfrac{5}{22}, \ x_2 = -\tfrac{19}{44}, \ x_3 = x_4 = 0. \tag{25'}$$

Obecné řešení homogenní soustavy příslušné k soustavě (25) jsme už nalezli v příkladě 10., vzorce (21″) a proto mají rovnice (25) podle věty 8. obecné řešení

$$\begin{aligned} x_1 = \tfrac{5}{22} + 8(\lambda_3 - 4\lambda_4), \ x_2 = -\tfrac{19}{44} + 2(10\lambda_3 - 7\lambda_4), \\ x_3 = 44\lambda_3, \ x_4 = 44\lambda_4; \end{aligned} \tag{25''}$$

λ_3, λ_4 jsou libovolná reálná čísla.

13. Provedeme výpočet hodnoty determinantu reciprokého k nulovému. V oddílu prvém jsme bez důkazu vyslovili poznatek, že i v tomto případě je v platnosti vzorec (33); přihlédneme nyní blíže k poměrům, které zde mohou nastati.

První možný případ, že je $A = 0$ a že má hodnost $h \leqq n - 2$, je triviální. V reciprokém determinantu a jsou pak všechny prvky — to jsou, nehledě k znaménkům, $(n-1)$-řadové minory determinantu A — rovny nule, tedy a samo, v souhlase se vzorcem (33) z dílu prvého, rovno nule a to tak, že je také jeho hodnost nulová.

Zajímavý je druhý možný případ, kdy nulový determinant A má hodnost $h = n - 1$. Potom je fundamentální systém soustavy

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

tvořen jediným nezávislým (t. j. nenulovým) řešením — označíme je

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n.$$

Každé jiné řešení — tedy také n řešení

$$A_{r1}, A_{r2}, \ldots, A_{rn}, \; r = 1, 2, \ldots, n$$

lze pak z onoho fundamentálního lineárně zkombinovati; existují tedy konstanty λ_r (ne všechny nulové) tak, že jest

$$A_{rs} = \lambda_r \xi_s, \; r = 1, 2, \ldots, n; \; s = 1, 2, \ldots, n. \qquad (26)$$

Pak ale dostáváme pro libovolný dvouřadový minor determinantu a vztah

$$\begin{vmatrix} A_{rs}, & A_{rt} \\ A_{us}, & A_{ut} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_r \xi_s, & \lambda_r \xi_t \\ \lambda_u \xi_s, & \lambda_u \xi_t \end{vmatrix} = \lambda_r \lambda_u \xi_s \xi_t \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (26')$$

Výsledek vyslovíme takto:

Determinant reciproký k nulovému má hodnotu rovněž nulovou. Jeho hodnost je buď nula nebo 1 podle toho, zdali hodnost původního determinantu byla menší než $n - 1$ nebo rovna $n - 1$.