Determinanty a matice v theorii a praxi

3. Soustava homogenních lineárních rovnic

3. SOUSTAVA HOMOGENNÍCH LINEÁRNÍCH ROVNIC.

Budiž dána soustava m *homogenních* lineárních rovnic o n neznámých

$$f_i \equiv \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m. \tag{18}$$

Rovnice tohoto systému nazýváme nezávislými, jsou-li nezávislé soustavy (1), t. j. soustavy jejich koeficientů; obecně nazýváme hodnost h matice koeficientů rovnic (18) hodností soustavy (18).

Budiž hodnost této soustavy h a ptejme se, jaký má tento fakt důsledek pro rovnice samotné. Podle věty 1. lze v matici $\|a_{ik}\|$ soustavy nalézti h řádků lineárně nezávislých, jichž jsou všechny ostatní lineárními kombinacemi. Upravíme-li pořadí rovnic (18) a neznámých v nich tak, aby h-řadový nenulový determinant, který v matici $\|a_{ik}\|$ jistě existuje, byl determinant A_h daný vztahem (5), existují tedy čísla $c_{l1}, c_{l2}, \ldots, c_{lh}$, která nejsou všechna rovna nule, tak, že platí rovnice

$$a_{l\nu} = \sum_{k=1}^{h} c_{lk} a_{k\nu}, \; \nu = 1, 2, \ldots, n, \; l = h + 1, \ldots, m. \tag{a}$$

Násobíme-li je po řadě $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a sečteme, dostáváme

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{l\nu} x_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \sum_{k=1}^{h} c_{lk} a_{k\nu} = \sum_{k=1}^{h} c_{lk} \sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu} x_\nu = \sum_{k=1}^{h} c_{lk} f_k,$$

t. j. rovnice

$$f_l = c_{l1} f_1 + c_{l2} f_2 + \ldots + c_{lh} f_h, \; l = h + 1, \ldots, m. \tag{b}$$

Je-li tedy hodnost soustavy (18) h, lze v ní nalézti (alespoň jedním způsobem) h rovnic navzájem lineárně nezávislých;

levé strany zbývajících $m - h$ rovnic jsou lineárními kombinacemi levých stran oněch prvých h rovnic. Každou soustavu h navzájem nezávislých rovnic nazýváme redukovanou. Je pak zřejmo, že se při vyhledávání řešení systému rovnic (18) můžeme omeziti na řešení soustavy redukované, t. j. v našem případě soustavy

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_h = 0. \tag{19}$$

Frobenius konstruoval systém $n - h$ navzájem nezávislých řešení soustavy (19), z nichž lze každé jiné řešení této soustavy — a tedy také systému (18) — lineárně zkombinovati. Tento „*fundamentální systém*" řešení najdeme tím, že v n-řadovém determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1h}, & a_{1,h+1}, & \ldots, & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{h1}, & a_{h2}, & \ldots, & a_{hh}, & a_{h,h+1}, & \ldots, & a_{hn} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{vmatrix}, \tag{20}$$

který má hodnotu $A_h \neq 0$, napíšeme $n - h$ soustav doplňků prvků posledních $n - h$ řádků:

$$D_{\varrho 1}, D_{\varrho 2}, \ldots, D_{\varrho n}, \quad \varrho = h + 1, \ldots, n. \tag{20'}$$

Každá z těchto soustav je řešením rovnic (19). Je totiž skutečně

$$f_k(D_{\varrho 1}, \ldots, D_{\varrho n}) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu} D_{\varrho\nu} = 0$$

$$\text{pro } k = 1, 2, \ldots, h, \quad \varrho = h + 1, \ldots, n;$$

to plyne z formulí (12) v prvém dílu. Téměř na první pohled je patrno, že i každá lineární kombinace soustav (20') je řešením rovnic (19).

Dále jsou řešení (20') navzájem nezávislá v tom smyslu, jak jsme tento pojem definovali v odst. 1. Rovnice

$$\sum_{\varrho=h+1}^{n} c_\varrho D_{\varrho\nu} = 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{a}$$

lze totiž splniti pouze tím, že položíme $c_{h+1} = c_{h+2} = \ldots = = c_n = 0$. Označíme-li totiž σ-tou ($\sigma = h + 1, \ldots, n$) řádku determinantu D řadou $d_{\sigma 1}, d_{\sigma 2}, \ldots, d_{\sigma n}$ (jsou to samé nuly, až na jediný prvek rovný 1) a sečteme rovnice (a) znásobené po řadě těmito čísly $d_{\sigma\nu}$, najdeme

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} d_{\sigma\nu} \sum_{\varrho=h+1}^{n} c_\varrho D_{\varrho\nu} = \sum_{\varrho=h+1}^{n} c_\varrho \sum_{\nu=1}^{n} d_{\sigma\nu} D_{\varrho\nu} = c_\sigma D = c_\sigma A_h,$$

tedy (protože je $A_h \neq 0$) nutně

$$c_\sigma = 0,\ \sigma = h + 1, \ldots, n. \tag{b}$$

Zbývá ještě ukázati, že libovolné řešení $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ systému (19) lze z lineárně nezávislých řešení (20′) lineárně zkombinovati, t. j., že lze nalézt konstanty λ_ϱ ($\varrho = h + 1, \ldots, n$) tak, že platí rovnice

$$\xi_\nu = \sum_{\varrho=h+1}^{n} \lambda_\varrho D_{\varrho\nu},\ \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{c}$$

Tyto konstanty určíme z požadavku, aby výrazy $\xi_\nu - \sum_{\varrho=h+1}^{n} \lambda_\varrho D_{\varrho\nu}$ byly všechny (t. j. pro $\nu = 1, 2, \ldots, n$) řešením oněch $n - h$ homogenních rovnic, které mají posledních $n - h$ řádků determinantu (20) za matici svých koeficientů, tedy rovnic

$$d_{\sigma 1} x_1 + d_{\sigma 2} x_2 + \ldots + d_{\sigma n} x_n = 0,\ \sigma = h + 1, \ldots, n. \tag{d}$$

Musí tudíž platit

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} d_{\sigma\nu} \left(\xi_\nu - \sum_{\varrho=h+1}^{n} \lambda_\varrho D_{\varrho\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} d_{\sigma\nu} \xi_\nu - \sum_{\varrho=h+1}^{n} \lambda_\varrho \sum_{\nu=1}^{n} d_{\sigma\nu} D_{\varrho\nu} = \xi_\sigma - \lambda_\sigma D,$$

t. j. pro λ_σ máme vztahy

$$\lambda_\sigma = \frac{\xi_\sigma}{D} = \frac{\xi_\sigma}{A_h},\ \sigma = h + 1, \ldots, n. \tag{e}$$

Výsledky, k nimž jsme tu dospěli, vyslovíme souborně větou 6. *Soustavu m lineárních homogenních rovnic o n neznámých a hodnosti h řešíme tak, že vyhledáme h rovnic lineárně nezávislých a podle vzorce (20') stanovíme fundamentální systém řešení. Z nich pak lze všechna řešení dané soustavy lineárně zkombinovati.*

Příklady.

10. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 \phantom{{}-4x_3} + 3x_4 &= 0 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Hodnost soustavy jest (v. př. 1.) rovna $h = 2$. Redukovaná soustava jest

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 \phantom{{}-4x_3} + 3x_4 &= 0 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a determinant D pak:

$$D = \begin{vmatrix} 5, & -2, & 0, & 3 \\ 7, & 6, & -4, & 7 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}.$$

Jednoduchý výpočet vede k hodnotám

$$D_{31} = 8,\ D_{32} = 20,\ D_{33} = 44,\ D_{34} = 0;$$
$$D_{41} = -32,\ D_{42} = -14,\ D_{43} = 0,\ D_{44} = 44.$$

Fundamentální systém se skládá ze dvou lineárně nezávislých řešení

$$\begin{aligned} &x_1 = 8, && x_2 = 20, && x_3 = 44, && x_4 = 0 \\ &x_1 = -32, && x_2 = -14, && x_3 = 0, && x_4 = 44, \end{aligned} \tag{21'}$$

z nichž lze každé jiné řešení soustavy (21) lineárně zkombinovati. Má tedy soustava (21) nekonečně mnoho řešení, jež lze všechna vyjádřiti vzorci

$$x_1 = 8(\lambda_3 - 4\lambda_4),\ x_2 = 2(10\lambda_3 - 7\lambda_4),\ x_3 = 44\lambda_3,\ x_4 = 44\lambda_4; \qquad (21'')$$

v nich jsou λ_3, λ_4 libovolná čísla reálná.

11. Případ $n - 1$ homogenních rovnic o n neznámých a hodnosti $h = n - 1$.

Rovnice tvoří zřejmě redukovanou soustavu. Označíme-li znakem A_ν determinant matice, která vznikne z matice soustavy vynecháním ν-tého sloupce, má fundamentální systém (20′) tvar

$$D_{n\nu} = (-1)^{n+\nu} A_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

takže lze řešení psáti ve tvaru

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A_1 : -A_2 : \ldots : (-1)^{n+1} A_n. \qquad (22)$$