Determinanty a matice v theorii a praxi

3. Věta Laplaceova

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v theorii a praxi. Část první. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. pp. 17–22.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403272

3. VĚTA LAPLACEOVA.

Determinant sestavený z r^2 prvků, v nichž se kříží libovolných r řádků s libovolnými r sloupci daného determinantu A, nazýváme r-řadovým subdeterminantem determinantu A. Subdeterminantem přidruženým v determinantu A k onomu prvému rozumíme pak onen subdeterminant $(n - r)$-řadový, jehož $(n - r)^2$ prvků je vzato z těch řádků a sloupců determinantu A, které se neúčastnily při konstrukci subdeterminantu prvého. K hlavnímu subdeterminantu (t. j. takový, jehož hlavní úhlopříčka je částí hlavní úhlopříčky determinantu původního) je přidružen zase hlavní subdeterminant.

V dalším se budeme zabývati minorem M_1 vzniklým z prvků společných prvým r řádkům a prvým r sloupcům determinantu A a minorem M_2 jemu přidruženým.

Věta 6. Znásobením obou subdeterminantů M_1, M_2 dostaneme $r!(n - r)!$ různých členů původního determinantu A.

Důkaz. Podle definice 4. je obecný člen m_1 minoru M_1:

$$m_1 = \operatorname{sgn}\Pi_1(k)\, a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{rk_r},$$

$$\Pi_1(k) = (k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_3 - k_2) \dots (k_r - k_{r-1})$$

a obecný člen m_2 minoru M_2:

$$m_2 = \operatorname{sgn}\Pi_2(k)\, a_{r+1,k_{r+1}} a_{r+2,k_{r+2}} \dots a_{nk_n},$$

$$\Pi_2(k) = (k_{r+2} - k_{r+1})(k_{r+3} - k_{r+1}) \dots (k_n - k_{n-1}).$$

Při násobení minorů M_1, M_2 se tyto obecné členy spolu násobí, takže součin $M_1 M_2$ je složen celkem (v. poznámky k definici 4.) z $r!(n - r)!$ různých sčítanců tvaru

$$m_1 m_2 = \operatorname{sgn}\Pi_1(k)\operatorname{sgn}\Pi_2(k)\, a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{rk_r}a_{r+1,k_{r+1}}\dots a_{nk_n} =$$
$$= \operatorname{sgn}\Pi_1(k)\,\Pi_2(k)\, a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{rk_r}a_{r+1,k_{r+1}}\dots a_{nk_n} =$$
$$= \operatorname{sgn}\Pi_1(k)\,\Pi_2(k)\,.\,\frac{a}{\operatorname{sgn}\Pi(k)} = a\,.\operatorname{sgn}\frac{\Pi_1(k)\,\Pi_2(k)}{\Pi(k)}.$$

Nyní však je $\Pi(k)$ dáno vzorcem (4), takže bude

$$\frac{\Pi_1(k)\,\Pi_2(k)}{\Pi(k)} =$$
$$= \frac{1}{(k_{r+1}-k_1)\dots(k_{r+1}-k_r)(k_{r+2}-k_1)\dots \dots(k_{r+2}-k_r)(k_{r+3}-k_1)\dots(k_n-k_1)\dots(k_n-k_r)};$$

protože pak značí $k_1, k_2, \dots, k_r$ permutaci čísel $1, 2, \dots, r$, kdežto $k_{r+1}, k_{r+2}, \dots, k_n$ permutaci čísel $r+1, r+2, \dots, n$, jest $k_{r+\nu} > k_\varrho (\nu = 1, 2, \dots, n-r;\ \varrho = 1, 2, \dots, r)$, takže má výraz $\frac{\Pi_1(k)\,\Pi_2(k)}{\Pi(k)}$ znaménko + a platí tedy

$$m_1 m_2 = +a,$$

kde a je obecný člen determinantu A. Tím jest věta 6. dokázána.

Definice 5. Budiž $\overline{M}_1$ minor determinantu A vzatý ze společných prvků řádků o pořadových číslech $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ a sloupců s pořadovými čísly $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ a budiž $\overline{M}_2$ minor přidružený k němu v determinantu A. Zavedeme-li označení $i_1 + i_2 + \dots + i_r = S(i)$, $k_1 + k_2 + \dots + k_r = S(k)$, nazýváme výraz $(-1)^{S(i)+S(k)}\,.\,\overline{M}_2$ *doplňkem minoru $\overline{M}_1$ v determinantu A.*

Věta 7. Násobíme-li libovolný subdeterminant r-řadový determinantu A jeho doplňkem v A, dostaneme $r!(n-r)!$ různých členů daného determinantu A.

Důkaz. Subdeterminanty, o které zde běží, buďte na př. $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ z definice 5. Upravme daný determinant vzájemnými výměnami napřed řádků a pak sloupců tak, aby řádka i_ϱ-tá přišla na místo ϱ-té a sloupec k_ϱ-tý též na místo ϱ-té ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$). Tím přejde determinant A v nový $\bar{A}$, o němž snadno dokážeme (v. větu 3.)

$$\bar{A} = (-1)^{S(i)+S(k)}A.$$

V tomto novém determinantu $\bar{A}$ však mají subdeterminanty $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ (jejich vnitřní struktura se při výše uvedeném přemisťování řad nezměnila) zcela stejný charakter, jaký měly minory M_1, M_2 z věty 6. vůči svému původnímu determinantu. Lze tedy na determinant $\bar{A}$ a minory $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ přímo aplikovati větu 6. a konstatovati, že součin $\bar{M}_1\bar{M}_2$ je roven právě součtu $r!(n-r)!$ členů determinantu $\bar{A}$, čili že součin $\bar{M}_1 \,.\, (-1)^{S(i)+S(k)}\bar{M}_2$ dává právě $r!(n-r)!$ různých členů determinantu A, jak tvrdí věta 7.

Věta 8. *(Laplaceova): Násobíme-li všechny subdeterminanty r-řadové utvořené z libovolných r řádků (nebo sloupců) daného determinantu A jejich doplňky v A, je součet všech součinů takto vzniklých roven původnímu determinantu A.*

Důkaz. Tato důležitá věta je jednoduchým důsledkem věty 7. Z r rovnoběžných řad lze vzíti celkem $\binom{n}{r}$ subdeterminantů r-řadových a každý z nich dá, násoben svým doplňkem, vznik $r!(n-r)!$ různým členům determinantu A. Postupujíce podle věty 8. dostaneme tedy celkem $\binom{n}{r} r! \,.\, (n-r)! = n!$ různých členů determinantu A, t. j. právě všechny jeho členy.

Poznámka. Věta Laplaceova nám dává možnost rozvésti determinant podle daných r řad. Srovnejte s tímto výsledkem poznatky vyjádřené větami 4. a 5.

Věta 9. *Součin dvou n-řadových determinantů* $A = |a_{ik}|$, $B = |b_{ik}|$ *je roven n-řadovému determinantu* $C = |c_{ik}|$, *kde jest*

$$c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \ldots + a_{in}b_{kn};$$
$$i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Důkaz. Podle věty Laplaceovy (rozvedením podle prvých n řádků) máme

$$A \,.\, B = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots, & a_{1n}, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, \ldots, & a_{2n}, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, & a_{nn}, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ 1, & 0, \ldots, & 0, & b_{11}, & b_{21}, \ldots, & b_{n1} \\ 0, & 1, \ldots, & 0, & b_{12}, & b_{22}, \ldots, & b_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, \ldots, & 1, & b_{1n}, & b_{2n}, \ldots, & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tvar (nikoli však hodnotu, v. věty 3., 4., 5. a poznámky k nim) tohoto determinantu pozměníme tak, že od sloupce $(n + \nu)$-tého odečteme prvních n sloupců násobených po řadě čísly $b_{\nu 1}, b_{\nu 2}, \ldots, b_{\nu n}$. Tento sloupec $(n + \nu)$-tý tedy bude míti místo původního tvaru $0, 0, \ldots, 0, b_{\nu 1}, b_{\nu 2}, \ldots, b_{\nu n}$ tvar nový: $-c_{1\nu}, -c_{2\nu}, \ldots, -c_{n\nu}, 0, 0, \ldots, 0$; to učiníme postupně pro $\nu = 1, 2, \ldots, n$ a máme:

$$A \,.\, B = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots, & a_{1n}, & -c_{11}, & -c_{12}, \ldots, & -c_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, \ldots, & a_{2n}, & -c_{21}, & -c_{22}, \ldots, & -c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, & a_{nn}, & -c_{n1}, & -c_{n2}, \ldots, & -c_{nn} \\ 1, & 0, \ldots, & 0, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ 0, & 1, \ldots, & 0, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, \ldots, & 1, & 0, & 0, \ldots, & 0 \end{vmatrix}.$$

Rozvedením podle posledních n sloupců pak obdržíme (doporučuji provést podrobně pomocí vět 8., 3., 4. a 5.):

$$A \,.\, B = \begin{vmatrix} -c_{11}, & -c_{12}, \ldots, & -c_{1n} \\ -c_{21}, & -c_{22}, \ldots, & -c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -c_{n1}, & -c_{n2}, \ldots, & -c_{nn} \end{vmatrix} . \, (-1)^n \begin{vmatrix} 1, & 0, \ldots, & 0 \\ 0, & 1, \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, \ldots, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2n} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, & \dots, & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \dots, & c_{nn} \end{vmatrix} = |c_{ik}|.$$

Poznámky. 1. Je-li $m < n$, převedeme determinant m-řadový snadno na n-řadový podle vzorce:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1m} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1m}, & 0, & \dots, & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2m}, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mm}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & \dots, & 1 \end{vmatrix}.$$

Tento poznatek nám dává možnost násobiti spolu podle věty 9. i determinanty různých stupňů, když je napřed uvedeme na stejný stupeň.

2. Stejně jako jsme vytvořili obecný prvek c_{ik} součinu C dvou n-řadových determinantů A, B znásobením i-tého řádku determinantu A a k-tého řádku determinantu B, mohli jsme vyjádřiti c_{ik} také součinem: buď i-tého řádku v A s k-tým sloupcem v B, nebo i-tého sloupce v A s k-tým řádkem v B, anebo konečně i-tého sloupce A a k-tého sloupce v B. Poznáme to snadno, když event. v jednom, nebo v obou z daných determinantů před prováděním násobení podle věty 9., vzorce (14), vyměníme spolu řádky a sloupce navzájem.

Definice 6. Řádkovým součinem dvou matic

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} b_{11}, & b_{12}, & \dots, & b_{1n} \\ b_{21}, & b_{22}, & \dots, & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}, & b_{m2}, & \dots, & b_{mn} \end{matrix} \right\|$$

o stejném počtu (m) řádků a stejném počtu (n) sloupců rozumíme *m-řadový determinant*, jehož obecný element c_{ik} je dán vzorcem

$$c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \ldots + a_{in}b_{kn};$$
$$i, k = 1, 2, \ldots, m. \tag{14,1}$$