1. PERMUTACE.

Definice 1. V řadě čísel

$$1, 2, 3, \ldots, n - 1, n \tag{1}$$

změňme libovolným způsobem pořadí členů. Nová řada

$$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{n-1}, k_n, \tag{2}$$

kterou tím dostaneme, se jmenuje *permutací* čísel řady (1).

Věta 1. Z n navzájem různých prvků $1, 2, 3, \ldots, n - 1, n$ lze vytvořiti celkem

$$P_n = 1 . 2 . 3 \ldots . (n - 1) . n = n! \tag{3}$$

rozličných permutací.

Důkaz. Předpokládejme, že jsme si nějakým způsobem (na př. přímým výpočtem) ověřili správnost vzorce (3) pro určitý počet k elementů a ukažme, že za tohoto předpokladu platí onen vzorec i pro počet o 1 větší, tedy pro $k + 1$ prvků. Všechny permutace z $k + 1$ čísel $1, 2, 3, \ldots, k, k + 1$ lze rozdělit na $k + 1$ skupin: první obsahuje všechny ty, v nichž je element $k + 1$ na prvém místě, kdežto ostatní prvky se navzájem přemisťují všemi $k!$ možnými způsoby; je tedy těchto permutací prvé skupiny celkem $k!$ Druhá skupina obsahuje všechny permutace, v nichž je prvek $k + 1$ stále na druhém místě, kdežto ostatní elementy se opět všemi $k!$ způsoby permutují; je tedy také v této druhé skupině $k!$ permutací. Tak pokračujeme, až dojdeme ke $(k + 1)$-mu souboru, který má element $k + 1$ na posledním místě a obsahuje zase $k!$ permutací. V těchto $k + 1$ skupinách po $k!$ permutacích jsou obsaženy zřejmě všechny možné permutace prvků $1, 2, 3, \ldots, k, k + 1$, takže jich je celkem $(k + 1) . k! = (k + 1)!$

Platí-li tedy věta 1. pro určitý počet k prvků, platí též pro počet o jednotku větší. Protože pak je zřejmě správná pro jeden element, platí i pro prvky 2, proto i pro 3 atd. Je tudíž její platnost obecná.

Definice 2. Permutace (2) elementů (1) se nazývá sudou, je-li výraz

$$\Pi(k) = (k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)(k_4 - k_1) \dots (k_n - k_1)(k_n - k_2) \dots (k_n - k_{n-1}) \tag{4}$$

kladný; je-li záporný, je permutace (2) lichou.

Věta 2. Pro $n \geqq 2$ je polovina ze všech $n!$ permutací elementů $1, 2, 3, \dots, n - 1, n$ sudých, polovina lichých.

Důkaz. Z definice 2. snadno nahlédneme (v. také poznámku 3. na konci tohoto paragrafu), že vzájemnou výměnou libovolných dvou prvků se lichá permutace stane sudou a naopak. Představme si nyní všech $n!$ permutací rozděleno na dvě skupiny: první obsahuje všechny sudé — budiž jich celkem s, druhá všechny liché — těch budiž l, takže jest $s + l = n!$ Ve všech těchto permutacích vyměňme navzájem tytéž dva elementy. Tím přejde každá z s permutací původně sudých v lichou a naopak, takže je po této výměně lichých permutací s a sudých l. Protože se však jedná o tytéž permutace daných n prvků (pouze v jiném pořadí), zůstává poměrné zastoupení sudých i lichých stále stejné. Je tedy nový počet s lichých permutací stejný, jako byl původní l, t. j. $s = l$; ze vztahu $s + l = n!$ pak dostaneme opravdu $s = l = \frac{1}{2}n! = 3 . 4 . 5 \dots . (n - 1)\, n$.

Poznámky. 1. Permutaci $k_1, k_2, \dots, k_n$ elementů $1, 2, \dots, n$ budeme někdy označovati symbolem $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, nebo stručně (k). Podobně budeme mluviti o permutacích (i), (r), (s), ... těchto prvků.

2. O dvou daných permutacích stejných prvků říkáme, že jsou téže třídy, jsou-li obě sudé, nebo obě liché. Jinak jsou tříd opačných.

3. Vyměníme-li v libovolné permutaci čísel $1, 2, \ldots, n$ kterékoli dva členy navzájem, říkáme, že jsme provedli transposici. Tím dostaneme z původní permutace novou, jejíž třída je zřejmě opačná, než byla u prvé [dokažte podrobně pomocí výrazu $\Pi(k)$]; jednoduchým důsledkem je skutečnost, že se třída permutace sudým počtem transposic nemění, lichým naproti tomu přejde sudá permutace v lichou a lichá v sudou. Dále je dobře při této příležitosti si uvědomiti, že lze libovolnou permutaci $(r) \equiv (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ elementů $1, 2, \ldots, n$ převésti transposicemi v každou jinou předem danou $(s) \equiv (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Převedení samo se může díti nejrozmanitějším způsobem, avšak počet transposic, jichž je k němu zapotřebí, je vždy buď sudý nebo vždy lichý podle toho, jsou-li obě permutace (r), (s) třídy stejné, či tříd navzájem opačných.