Počet pravděpodobnosti

1. Jednoduché úlohy a definice

In: Bohuslav Hostinský (author): Počet pravděpodobnosti. První část. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. pp. 5–29.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403258

KAPITOLA PRVNÍ

JEDNODUCHÉ ÚLOHY A DEFINICE

1. Náhodné zjevy a statistické zákonitosti. Elementární definice pravděpodobnosti. Dovedeme předvídati některé zjevy s menší nebo s větší přesností, poněvadž známe jejich příčiny nebo aspoň určitou pravidelnost v jich průběhu; jiné zjevy jsou však takové, že jich nedovedeme předvídati.

Mějme na př. kostku, jejíž stěny jsou obvyklým způsobem označeny „oky" (na jedné stěně je jedno oko, na druhé dvě oka atd.). Hodíme-li ji z větší vzdálenosti na vodorovnou rovinu (na stůl), kostka po dopadu na stůl nejprve odskočí (po případě několikrát), pak se valí po stole a na konec se zastaví. Konečný výsledek, t. j. počet ok na vrchní straně kostky v konečné poloze, závisí zajisté na její počáteční poloze a na způsobu, kterým byla vržena (krátce řečeno: na počáteční rychlosti kostky), a nelze jej předvídati. Představme si, že kostkou hodíme po druhé; i když její počáteční poloha a počáteční rychlost jen málo se liší od počátečních podmínek v předešlém hodu, přece může býti konečný výsledek po druhé docela jiný než po prvé. Konečný výsledek není možno předvídati; objeví-li se určitý předem očekávaný počet ok, pravíme, že je to *zjev náhodný*.

Opakujme pokus s kostkou mnohokrát a zaznamenávejme výsledky; ve statistice výsledků se objeví určitá pravidelnost. Hodíme-li kostkou n. př. 6000krát, padne jedno oko přibližně 1000krát, dvě oka také přibližně 1000krát atd., ovšem za předpokladu, že kostka má přesně tvar krychle, že je z homogenního materiálu a že ji házíme z větší vzdálenosti na stůl. Kdyby dřevěná kostka měla kovovou vložku poblíž jedné stěny, padala by častěji na tuto stěnu a zmíněná pravidelnost ve statistice pokusů by se tím porušila. Kdybychom kostku, která leží na stole, opatrně a jen málo zdvihli a pak pustili, dopadla by jistě na tu stěnu, na které původně ležela; za těchto podmínek zjev není náhodný a zmíněná pravidelnost ve statistice pokusů byla by vyloučena.

Pravidelnost, jevící se ve statistice dlouhé řady pokusů (házíme-li kostkou, vyjde daný počet ok přibližně tolikrát, kolik je šestina z celkového počtu pokusů; házíme-li mincí, padne přibližně v polovině případů na líc), *považujeme za důsledek určitých podmínek, za kterých se pokus koná* (kostka je přesně krychlového tvaru, je homogenní; mince je souměrná a homogenní; v obou případech je třeba házeti z větší vzdálenosti).

Míra pravděpodobnosti, se kterou očekáváme nějaký zjev, odvodí se takto: je-li n počet všech těch případů, které vůbec mohou nastati jakožto výsledek pokusu, a m počet všech těch mezi nimi, které vedou k očekávanému zjevu („případy příznivé"), je pravděpodobnost p, že zjev nastane, rovna poměru $m : n$,

$$p = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Pravděpodobnost zjevu vypočteme, dělíme-li počet případů, které jsou zjevu příznivé, počtem všech případů, které vůbec mohou nastati jakožto výsledek pokusu.

Výpočet pravděpodobnosti podle této definice předpokládá: 1. že ustanovíme, které případy považujeme za možné a 2. že spočítáme případy příznivé uvažovanému zjevu.

Pravděpodobnost, že při hodu kostkou vyjde pět ok, je $\frac{1}{6}$, neboť mezi všemi ze šesti možných případů ($n = 6$) je jediný příznivý ($m = 1$). Pravděpodobnost, že vyjde sudý počet ok je $\frac{1}{2}$, neboť zde $n = 6$, $m = 3$. Pravděpodobnost, že hozená mince padne na líc je $\frac{1}{2}$ ($n = 2, m = 1$).

Krajní případy pravděpodobnosti jsou: *nemožnost* (zjev vůbec nemůže nastati jakožto výsledek pokusu; $m = 0$, $p = 0$) a *jistota* (zjev nastane v každém z n možných případů; $m = n, p = 1$). Vždy platí, že

$$0 \leqq p \leqq 1.$$

Pravděpodobnost, že zjev nastane, budiž p; pravděpodobnost, že týž zjev nenastane, je

$$q = \frac{n - m}{n} = 1 - p,$$

neboť je celkem $n - m$ případů nepříznivých. V případě, že $p = \frac{1}{2}$, je též $q = \frac{1}{2}$; pravděpodobnost, že zjev nastane, je v tomto případě rovna pravděpodobnosti, že zjev nenastane.

Definice pravděpodobnosti (1) přihlíží jen k jedné stránce náhodného zjevu, totiž k podmínkám pokusu (v případě kostky je dáno, že pokus musí míti jeden ze šesti možných výsledků a že jen v jediném z těchto případů vyjde daný počet ok). Proto nazýváme někdy pravděpodobnost takto definovanou *pravděpodobností a priori*, lišíce ji od t. zv. *pravděpodobnosti a posteriori*, která je dána druhou stránkou náhodných zjevů, totiž pravidelností jevící se ve statistice dlouhé řady pokusů. V každé úloze, kde se vyskytují jakkoli získané číselné hodnoty pravděpodobnosti, je možná kontrola, užijeme-li dat plynoucích ze statistiky dlouhé řady pokusů.

Definice (1) není logicky bezvadná, neboť obsahuje logický kruh, jak poznamenal Poincaré. Klademe-li totiž, při daném n, veličinu p úměrnou počtu m příznivých případů, považujeme vlastně všechny možné případy za *stejně pravděpodobné*. Tak v případě kostky vede definice (1) k tomu, že každý z možných výsledků (jedno oko, dvě oka, ...) má stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{6}$. Pravíme-li zde, že je „šest případů možných", vlastně implicitně už předpokládáme, že každý ze šesti případů má stejnou pravděpodobnost. Obtíž je v pojmu „případů stejně pravděpodobných" (viz poznámky k úloze b, v odst. 2.); v každé úloze musíme rozhodnouti, které případy považujeme za stejně pravděpodobné.

Naším úkolem bude objasniti pojem pravděpodobnosti rozborem rozmanitých úloh; z toho vyplynou rozmanité doplňky a objasnění k původní definici (1) pravděpodobnosti.

2. Jednoduché úlohy. a) V osudí je m koulí bílých a m' černých, celkem $m + m'$ koulí; jak veliká je pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli? Za předpokladu, že tah kterékoliv koule má stejnou pravděpodobnost, obdržíme

$$p = \frac{m}{m + m'}.$$

b) Jak veliká je pravděpodobnost, že vrhneme dvěma kostkami daný součet ok? Uvažujme nejprve o součtu 2; ten se vyskytne jen v tom jediném případě, že na jedné i na druhé kostce se objeví 1. Označíme tento případ znakem (1, 1). Součet 3 můžeme dostati dvojím způsobem: buď (2, 1) nebo (1, 2); součet 4 třemi způsoby: (3, 1), (2, 2) nebo (1, 3) atd. Dělíce tato čísla číslem 36, které udává počet všech možných případů (případ je dán, je-li dáno, kolik ok vyjde na první kostce a kolik na druhé), dostaneme pravděpodobnosti vrhnouti součet 2, 3, 4, ... Hodnoty pravděpodobností sestavíme do tabulky:

Součet	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pravděpodobnost ..	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Předpokládáme, že každý ze třiceti šesti případů (a, b) (kde $a = 1, 2, \ldots, 6$, $b = 1, 2, \ldots, 6$) má stejnou pravděpodobnost; různé součty ok mají proto různé pravděpodobnosti, poněvadž každý se uskutečňuje jiným počtem oněch případů. Nebylo by správné usuzovati takto: poněvadž součet ok, který padne na obou kostkách, má jednu z jedenácti různých hodnot (od 2 do 12), je na př. pravděpodobnost vrhnouti součet pět rovna $\frac{1}{11}$. — Vrhneme-li několikrát dvě kostky a vyjde-li po každé jiný součet ok, mají tyto výsledky obecně různé pravděpodobnosti. Statistika velkého počtu hodů dvěma kostkami dala by výsledky odpovídající hořejší tabulce; kdybychom hodili 3600krát, vyšel by součet 2 asi

100krát, součet 3 asi 200krát, součet 4 asi 300krát, ..., součet 12 asi 100krát.

Každému, kdo chce vniknouti do počtu pravděpodobnosti, se doporučuje, aby sám pokusy s kostkami prováděl, výsledky zapisoval a srovnával je pak s theoretickými vzorci pro pravděpodobnost.

3. Permutace, variace a kombinace. K výpočtu úloh o pravděpodobnostech potřebujeme některých vzorců kombinatorických, jichž odvození zde uvádíme.

a) Je dáno n různých prvků a hledáme počet P_n *permutací*, které z nich lze utvořiti, t. j. počet všech možných způsobů, kterými lze ty prvky seřaditi.

Jsou-li dány dva prvky a, b, jsou celkem dvě permutace: *ab* a *ba*; jsou-li dány tři prvky a, b, c, je celkem šest permutací: *abc, acb, bac, bca, cab, cba.*

Je-li známo P_{n-1}, je

$$P_n = nP_{n-1},$$

neboť z každé permutace α utvořené z $n - 1$ různých prvků dostaneme permutaci z n prvků, zařadíme-li n-tý prvek do permutace α před její první nebo před druhý, ..., před $(n - 1)$-tý nebo konečně za $(n - 1)$-tý prvek; naopak každá permutace z n prvků dá se takto vytvořiti. Napišme shora uvedený vzorec postupně pro $n = 2, 3, \ldots$; poněvadž $P_1 = 1$, bude

$$P_2 = 2 \,.\, 1, P_3 = 3P_2 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3, P_4 = 4P_3 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4, \ldots$$

Obecně platí pro *počet permutací bez opakování* (t. j. z různých prvků) *z n prvků*

$$\mathrm{P}_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots, n = n! \tag{1}$$

Předpokládejme nyní, že mezi danými n prvky je n_1 stejných; počet navzájem různých permutací, které lze z n prvků utvořiti v tomto případě, je

$$P_n' = \frac{n!}{n_1!}.$$

Kdyby obecně bylo mezi n prvky k skupin takových, že první by se skládala z n_1 stejných prvků, druhá z n_2 stejných …, k-tá z n_k stejných (při čemž dva prvky vzaté ze dvou různých skupin by byly vždy různé), bylo by

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n,$$

a počet *permutací s opakováním* z n prvků, t. j. počet různých permutací, by byl roven

$$P_n' = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}. \tag{2}$$

Některá z čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$ mohou býti rovna 1; jsou-li všechna rovna 1, přechází vzorec (2) v (1).

b) *Variace bez opakování r-té třídy z n různých prvků* ($r < n$) jsou skupiny po r různých prvcích, při čemž přihlížíme k pořadí prvků ve skupině. Abychom ustanovili počet $V_r(n)$ variací bez opakování r-té třídy z n prvků, zvolíme nejprve jeden z n prvků, který dáme na první místo; pak zvolíme jeden z $(n - 1)$ zbývajících, který dáme na druhé místo; pak další z $(n - 2)$ zbývajících, který dáme na třetí místo atd. Tak najdeme, že

$$V_r(n) = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1). \tag{3}$$

Ze tří prvků a, b, c [$n = 3, r = 2, V_2(3) = 6$] je šest variací druhé třídy:

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

Variace s opakováním r-té třídy z n prvků jsou skupiny po r prvcích, při čemž každý prvek se může na kterýchkoli místech opakovati. Na první místo může přijíti kterýkoli z n prvků, na druhé rovněž, na třetí také atd. Počet variací $V_r'(n)$ s opakováním r-té třídy z n prvků je tedy dán vzorcem

$$V_r'(n) = n^r. \tag{4}$$

Tak na př. ze dvou prvků a, b ($n = 2, r = 3$) možno utvořiti osm variací třetí třídy s opakováním:

$$aaa,\ aab,\ aba,\ abb,\ baa,\ bab,\ bba,\ bbb.$$

c) *Kombinace bez opakování r-té třídy z n různých prvků* ($r \leqq n$) jsou skupiny po r prvcích, ve kterých se nepřihlíží k pořadí prvků. Permutujeme-li všech r prvků, tvořících určitou kombinaci, dostaneme všechny variace bez opakování, které lze utvořiti z těch r prvků. Označíme-li znakem $C_r(n)$ počet kombinací bez opakování z n prvků, máme podle (1) a (3)

$$V_r(n) = C_r(n) \,.\, r!$$

$$C_r(n) = \frac{V_r(n)}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots r}$$

nebo

$$C_r(n) = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{5}$$

Vzorec (5) vyjadřuje větu: z n prvků je tolik kombinací r-té třídy kolik je kombinací $n - r$-té třídy (na př. ze sedmi prvků je tolik kombinací čtvrté třídy kolik je kombinací třetí třídy). Dále plyne z (5), že

$$C_r(n) + C_{r+1}(n) = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!} =$$
$$= \frac{n!(r+1+n-r)}{(r+1)!\,(n-r)!} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!} = C_{r+1}\,(n+1). \tag{5a}$$

Čísla $C_r(n)$, která značíme též $(n)_r$, jsou *binomické koeficienty*, které vytvořují t. zv. *Pascalův trojúhelník*. Napišme je tak, aby v n-tém řádku byla čísla $(n)_0$, $(n)_1$, …, $(n)_n$; při tom klademe pro každé n, $(n)_0 = 1$. Dostaneme tak

$n = 1$	1, 1
$n = 2$	1, 2, 1
$n = 3$	1, 3, 3, 1
$n = 4$	1, 4, 6, 4, 1
$n = 5$	1, 5, 10, 10, 5, 1

Podle (5) je každý řádek Pascalova trojúhelníku souměrný podle středního členu; podle (5a) je každý koeficient roven součtu obou nad ním stojících.

Kombinace s opakováním r-té třídy z n různých prvků jsou skupiny po r prvcích, při čemž se prvky mohou libovolně opakovati a nepřihlíží se k jich pořadí. Abychom určili počet kombinací s opakováním druhé třídy ze čtyř prvků a, b, c, d, připojme k nim pátý prvek e a utvořme všechny kombinace bez opakování druhé třídy z těchto pěti prvků [podle (5) je jich $C_2(5) = 10$]:

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ bc,\ bd,\ be,\ cd,\ ce,\ de.$$

Nahraďme nyní prvek e v každé z těchto kombinací, kde se e vyskytuje, tak, aby vznikla kombinace s opakováním; dostaneme deset hledaných kombinací:

$$ab,\ ac,\ ad,\ aa,\ bc,\ bd,\ bb,\ cd,\ cc,\ dd.$$

Platí tedy, značíme-li znakem $C'_r(n)$ počet kombinací s opakováním r-té třídy z n prvků,

$$C_2'(4) = C_2(5).$$

Podobně, abychom dostali kombinace s opakováním třetí třídy z tří prvků a, b, c, utvořme nejprve všechny kombinace bez opakování třetí třídy z pěti prvků a, b, c, d, e [podle (5) je jich deset]:

$$abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ bcd,\ bce,\ adc,\ bde,\ cde.$$

V každé z kombinací, kde se vyskytuje některý z prvků d, e, nahraďme jej některým z těch prvků a, b, c. které se vyskytují v téže kombinaci. Tak dostaneme deset hledaných kombinací s opakováním:

$$abc,\ aab,\ abb,\ aac,\ acc,\ bbc,\ bcc,\ aaa,\ bbb,\ ccc.$$

Je tedy

$$C_3'(3) = C_3(5)$$

a obecně platí, že

$$C_r'(n) = C_r(n + r - 1) = \frac{(n + r - 1)!}{r!(n - 1)!}. \qquad (6)$$

4. Pravděpodobnost úhrnná. Věta o sčítání pravděpodobností. Budiž n počet všech případů, které mohou nastati jakožto výsledky pokusu. Z nich nechť m_1 případů je příznivo zjevu A_1, m_2 případů jinému zjevu $A_2, \ldots, m_k$ případů zjevu A_k. Pravděpodobnost, že pokus povede ke zjevu A_i, je podle definice (1) odst. 1. dána vzorcem $p_i = m_i : n$. *Pravděpodobnost úhrnná* p, že nastane *buď zjev* A_1, *nebo zjev* $A_2, \ldots,$ *nebo* A_k, jest určena vzorcem

$$p = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{n} = p_1 + p_2 + \ldots + p_k,$$

neboť příznivých případů je nyní $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$.

Smysl vzorce vyjádříme takto:

Jsou-li $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *pravděpodobnosti k vzájemně se vylučujících zjevů, které se mohou dostaviti jakožto výsledky pokusu, je pravděpodobnost, že buď první, nebo druhý, ..., nebo k-tý z nich se dostaví, rovna součtu* $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$.

Kdyby kromě uvažovaných případů (v celkovém počtu $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$), jež jsou příznivé každý jednomu ze zjevů $A_1, A_2, \ldots,, A_k$, nebylo jiných možných výsledků pokusu, bylo by

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$$

a tedy

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1;$$

bylo by jisto, že se dostaví jeden ze zjevů A_i.

Příklady: a) Pravděpodobnost vrhnouti jednou kostkou buď pět ok nebo šest je $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

b) Pravděpodobnost vrhnouti dvěma kostkami součet ok rovný buď pěti nebo šesti je (podle odst. 2b) $\frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{1}{4}$.

c) V osudí je b bílých koulí, c červených a m modrých. Pravděpodobnosti: p_b vytáhnouti bílou, p_c červenou a p_m modrou jsou

$$p_b = \frac{b}{b + c + m}, \quad p_c = \frac{c}{b + c + m}, \quad p_m = \frac{m}{b + c + m},$$

$$p_b + p_c + p_m = 1.$$

Pravděpodobnost vytáhnouti buď bílou nebo červenou je

$$\frac{b + c}{b + c + m} = p_b + p_c.$$

5. Pravděpodobnost složená. Věta o násobení pravděpodobností. Závislé a nezávislé veličiny. a) Budiž n_1 počet všech případů, které mohou nastati jakožto výsledek pokusu, m_1 pak počet těch z nich, které jsou příznivy zjevu A_1. Pravděpodobnost p_1, že A_1 nastane, je dána vzorcem

$$p_1 = \frac{m_1}{n_1}.$$

Označme písmeny m_2, n_2 a p_2 obdobné veličiny pro nějaký jiný pokus, který se koná za jiných podmínek než první a při kterém očekáváme zjev A_2. Pravděpodobnost, že nastane zjev A_2, je

$$p_2 = \frac{m_2}{n_2}.$$

Předpokládejme, že mezi výskyty zjevů A_1 a A_2 *není souvislosti*, že tedy A_1 a A_2 jsou *vzájemně nezávislé*. a hledejme pravděpodobnost p, že první pokus povede k A_1 a druhý k A_2. Počet všech možných případů, jež se mohou vyskytnouti jakožto výsledky obou pokusů, je $n_1 \,.\, n_2$, neboť každý z n_1 možných výsledků prvého pokusu může se kombinovati s každým z n_2 možných výsledků druhého. Počet příznivých případů je z podobného důvodu roven $m_1 \,.\, m_2$, je tedy

$$p = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$$

čili

$$p = p_1 p_2.$$

Je-li p_1 pravděpodobnost, že nastane zjev A_1 a p_2 pravděpodobnost, že nastane zjev A_2, nezávislý na A_1, je $p_1 p_2$ pravděpodobnost, že nastanou oba zjevy.

Příklady: a) Pravděpodobnost, že ve dvou hodech kostkou vyjde po každé předepsaný počet ok (na př. po každé dvě oka), je rovna $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

b) Pravděpodobnost p, že ve dvou hodech kostkou vyjde po každé týž počet ok (předem neznámý), vypočteme třemi způsoby:

1. Počet příznivých případů (= 6) dělíme počtem všech možných (= 36), tedy $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2. p jakožto pravděpodobnost úhrnná rovná se součtu pravděpodobností šesti vzájemně se vylučujících případů (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) a (6, 6); viz označení zavedené v odst. 2b. Každý z nich má pravděpodobnost $\frac{1}{36}$, tedy $p = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$.

3. Užívajíce pravidla o pravděpodobnosti složené uvažujeme takto: pravděpodobnost $p_1 = 1$ (jistota), že vůbec několik ok vyjde, kombinujeme s pravděpodobností $p_2 = \frac{1}{6}$, že právě tolik ok, kolik vyšlo v prvním hodu, vyjde také ve druhém; je tedy $p = p_1 p_2 = \frac{1}{6}$.

b) Podobně jako jsme odůvodnili pravidlo o násobení dvou pravděpodobností, odvodíme pravidlo platné pro součin libovolného počtu pravděpodobností: *Jsou-li $p_1, p_2, \ldots, p_k$ pravděpodobnosti zjevů navzájem nezávislých, je pravděpodobnost p, že všech k zjevů se uskuteční, rovna součinu $p_1 p_2 \ldots p_k$,*

$$p = p_1 p_2 \cdots p_k.$$

c) Není-li splněna podmínka nezávislosti, nelze užíti pravidla o násobení pravděpodobností (viz odst. 48. a násl.).

6. Obecnější pojem pravděpodobnosti. Dvě základní věty o počítání s pravděpodobnostmi. Ačkoli definice pravděpodobnosti podaná v odst. 1. se hodí jako základ výpočtu v mnohých úlohách, nebudeme se na ni vázati, nýbrž připustíme obecně, že pravděpodobnosti mohou býti vyjádřeny čísly $p_1, p_2, \ldots$, obsaženými v mezích $0 \ldots 1$ (při čemž $p = 0$ značí nemožnost, $p = 1$ jistotu), bez ohledu na onu definici; úkolem počtu pravděpodobnosti pak je studovati vztahy mezi pravděpodobnostmi, při čemž vycházíme z těchto dvou základních vět:

I. Věta o úhrnné pravděpodobnosti neboli o sečítání pravděpodobností: Jsou-li $p_1, p_2, \ldots, p_k$ pravděpodobnosti zjevů *vzájemně se vylučujících*, je $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ pravděpodobnost, že aspoň jeden z těch zjevů nastane.

II. Věta o složené pravděpodobnosti neboli o násobení pravděpodobností: Jsou-li $p_1, p_2, \ldots, p_k$ pravděpodobnosti k zjevů *vzájemně nezávislých*, je $p_1 p_2 \ldots p_k$ pravděpodobnost, že všech k zjevů se uskuteční.

Tyto dvě věty bereme za *axiomy*. V případě, že užijeme definice (1) odst. 1., dají se obě věty na základě této definice dokázati (viz odst. 4. a 5.); připouštíme však s obecnějšího stanoviska, že lze s pravděpodobnostmi počítati (algebraicky), i když jejich číselné hodnoty nejsou známé a když tedy nemůžeme tvrditi, že byly odvozeny užitím definice (1) odst. 1.

7. Příklady na užití základních vět. a) Budiž p pravděpodobnost, že nějaký pokus se zdaří. Vykonáme-li řadu k pokusů, je pravděpodobnost, že všech k pokusů se zdaří, rovna p^k. Je-li p malé číslo, ubývá p^k rychle s rostoucím k.

b) Je-li p pravděpodobnost, že se pokus zdaří, kolik je třeba vykonati pokusů, aby pravděpodobnost, že aspoň jeden z nich se zdaří, se rovnala danému číslu r $(0 \leq r \leq 1)$? — Pravděpodobnost, že se pokus nezdaří, je $1 - p$. Pravděpodobnost, že ani jeden z k pokusů se nezdaří, je $(1 - p)^k$. Tato poslední pravděpodobnost doplňuje se s danou pravděpodobností r na jistotu (buď se ani jeden pokus nepodaří, nebo se podaří aspoň jeden), takže

$$(1 - p)^k + r = 1$$

a tedy
$$k = \frac{\log(1 - r)}{\log(1 - p)}.$$

Tento výraz není obecně roven celému číslu. Je-li počet pokusů menší než číslo k zde vypočtené, bude pravděpodobnost, že se aspoň jeden pokus podaří, o něco menší než r; je-li počet pokusů větší než k, bude ona pravděpodobnost větší než r.

Házíme-li na př. dvěma kostkami, je pravděpodobnost, že na každé z obou se objeví jedno oko, rovna $\frac{1}{36}$. Kolikrát musíme hoditi, abychom se stejnou pravděpodobností mohli čekati, že aspoň jednou se objeví po jednom oku současně na obou kostkách, i že se to nestane ani jednou?

Zde je
$$p = \tfrac{1}{36},\ r = \tfrac{1}{2}$$
a tedy
$$n = \frac{\log(1 - \frac{1}{2})}{\log(1 - \frac{1}{36})} = 24{,}6.$$

Musili bychom tedy hoditi 25krát.

c) Pravděpodobnost p, že ve třech vrzích dvěma kostkami vrhneme součty ok 5 a 7, každý jen jednou, vypočte se takto:

Pravděpodobnost, že v jednom hodu vyjde součet 5, je $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, pravděpodobnost, že v jednom hodu vyjde součet 7, je $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, pravděpodobnost, že v jednom hodu nevyjde ani 5 ani 7, je rovna $1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$.

Označme písmenem a jakýkoli součet ok, jenž není roven ani 5 ani 7; v serii tří vrhů mohou se vyskytnouti tyto příznivé případy:

$$5, 7, a;\ \ 5, a, 7;\ \ a, 5, 7;\ \ 7, 5, a;\ \ 7, a, 5;\ \ a, 7, 5.$$

Každý z nich má (při neurčitém a) pravděpodobnost
$$\tfrac{1}{9} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{13}{18};$$
hledaná pravděpodobnost p je šestkrát větší, tedy
$$p = 6 \cdot \tfrac{1}{9} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{13}{18} = \tfrac{13}{162}.$$

d) Hodíme pět peníz̊u. Pravděpodobnost, že tři z nich padnou na líc a dva na rub, je

$$(5)_3 : 2^5 = \tfrac{5}{16}.$$

e) Pravděpodobnost, že k kostkami vrhneme součet ok N, rovná se koeficientu při x^N v rozvoji (uspořádaném podle mocnin veličiny x) výrazu

$$\frac{1}{6^k}(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^k.$$

f) Bílé a černé koule jsou ve třech osudích. V prvním je m_1 koulí bílých a n_1 černých; ve druhém m_2 a n_2, ve třetím pak m_3 a n_3. Pravděpodobnost voliti i-té osudí je $p_i (i = 1, 2, 3)$. Volíme jedno osudí a vytáhneme kouli; jak velká je pravděpodobnost p, že vytáhneme bílou? — p určíme jakožto pravděpodobnost úhrnnou. Bylo-li zvoleno n-té osudí, je pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli, rovna $\dfrac{m_i}{m_i + n_i}$; pravděpodobnost, že jsme volili i-té osudí a pak z něho vytáhli bílou kouli, je $p_i \dfrac{m_i}{m_i + n_i}$.

Volby jednotlivých osudí jsou případy vzájemně se vylučující, takže

$$p = p_1 \frac{m_1}{m_1 + n_1} + p_2 \frac{m_2}{m_2 + n_2} + p_3 \frac{m_3}{m_3 + n_3}.$$

Kdyby všechny koule byly smíchány v jediném osudí, byla by pravděpodobnost p', že vytáhneme bílou kouli, určena vzorcem

$$p' = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + n_1 + n_2 + n_3}.$$

8. Matematická naděje neboli střední hodnota proměnné veličiny závislé na náhodě. a) Osoba A hází kostkou a získá, padne-li jedno oko, výhru 1 Kčs. V řadě 6000 hodů padne jedno oko přibližně 1000krát, takže A může očekávati výhru přibližně 1000 Kčs. Na jeden hod připadá tedy *průměrně* výhra $\frac{1000}{6000}$ Kčs $= \frac{1}{6}$ Kčs, t. j. šestina z výhry možné v jediném hodu.

Je-li obecně p pravděpodobnost, že se nějaký pokus zdaří, a dostane-li osoba A za každý zdařilý pokus k korun, jest očekávati, že po provedení N pokusů získá celkem přibližně Npk korun.

Z toho připadá na jediný pokus *průměrně* pk korun; kterážto částka se nazývá matematickou nadějí osoby A (nebo také m. n. zisku) pro jeden pokus.

Pojem matematické naděje rozšiřujeme na všechny úlohy o pravděpodobnostech takto: Předpokládejme nejprve, že nějaká veličina x nabude určité hodnoty x_1, zdaří-li se pokus a že p je pravděpodobnost, že se pokus podaří; matematická naděje veličiny x je pak rovna součinu px_1. V nejobecnějším případě budiž x *„náhodná veličina"* t. j. veličina, která může nabýti kterékoli z n hodnot

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

každé s určitou pravděpodobností; nechť jsou

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

příslušné pravděpodobnosti; p_i je tedy pravděpodobnost rovnice $x = x_i$*). Za předpokladu, že x nemůže nabýti jiných hodnot než $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, platí

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \tag{1}$$

a matematická naděje veličiny x je dána vzorcem

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n. \tag{2}$$

Slovy: *matematická naděje (nebo: střední hodnota, pravděpodobná hodnota) veličiny x se vypočte, násobíme-li každou*

---

*) Zkráceně označeno: $P(x = x_i) = p_i$. Obecně znamená $P(R)$ pravděpodobnost, že vztah R platí.

hodnotu, které ta veličina může nabýti, pravděpodobností, že oné hodnoty nabude, a sečteme-li všechny součiny tak utvořené.

Znaky pro matematickou naději veličiny x jsou s. h. (x) nebo $E(x)$.

b) Pojem matematické naděje se shoduje v podstatě s pojmem aritmetického středu. Měříme na př. nějakou délku n-krát a obdržíme tak n hodnot (obecně různých, poněvadž se vyskytují pozorovací chyby) $x_1, x_2, \ldots, x_n$; za „pravou hodnotu" x měřené délky bereme obyčejně aritmetický střed hodnot x_k

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Při tom předpokládáme, že každé jednotlivé z n měření zaslouží stejnou důvěru jako kterékoli jiné z nich. Kdybychom však z jakýchkoli důvodů přisoudili veličinám x_k kladné „váhy" s_k, počítali bychom pak „pravou hodnotu" měřené délky podle obecnějšího vzorce *(zobecněný aritmetický střed)*:

$$\xi = \frac{s_1x_1 + s_2x_2 + \ldots + s_nx_n}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n};$$

je-li $s_1 = s_2 = \ldots = s_n$, je hodnota ξ totožná s obyčejným aritmetickým středem, který jsme shora nazvali x.

Položme

$$\frac{s_k}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} = p_k \geqq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

takže

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Střední hodnota ξ veličiny x bude, jak plyne z předchozích vzorců, rovna

$$\xi = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n.$$

(2) jest *obecná definice střední hodnoty* veličiny x za těchto předpokladů:

1. x nemůže nabývati jiných hodnot než některé z řady $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Hodnotě x_k přisuzujeme váhu úměrnou nezápornému koeficientu p_k.

3. Součet všech těchto koeficientů rovná se jedné.

Jsou-li všechny hodnoty p_k kladné a jsou-li mezi veličinami x_i aspoň dvě různé, platí nerovnosti

$$x_{min} < \text{s. h. } (x) < x_{max},$$

kde x_{min} a x_{max} značí nejmenší resp. největší z čísel $x_1 \ldots x_n$. Neboť nahradíme-li v součtu $p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$ každou veličinu x_i hodnotou x_{min}, zmenší se tím hodnota součtu na x_{min} vzhledem k (1); podobně se dokáže druhá nerovnost.

c) Příklady: Házíme kostkou; jaká je s. h. počtu ok? Zde je patrně

$$x_i = i,\ p_i = \tfrac{1}{6}(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

a tedy

$$\text{s. h. } (x) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{6} + \tfrac{3}{6} + \tfrac{4}{6} + \tfrac{5}{6} + \tfrac{6}{6} = \tfrac{7}{2}.$$

Házíme dvěma kostkami; jaká je s. h. součtu ok? Podle odst. 2b máme zde

$$\text{s. h. } (x) = \frac{M}{N} = 7, \text{kde } M = 2 . 1 + 3 . 2 + 4 . 3 + 5 . 4 +$$

$$+ 6 . 5 + 7 . 6 + 8 . 5 + 9 . 4 + 10 . 3 + 11 . 2 + 12 . 1; N = 36.$$

Ve velkém počtu hodů dvěma kostkami je průměrná hodnota součtu ok rovna sedmi.

Kdybychom házeli m kostkami, byla by střední hodnota součtu x ok rovna

$$\text{s. h. } (x) = m . \tfrac{7}{2},$$

neboť

$$x = \xi + \eta + \zeta + \ldots,$$

kde ξ značí počet ok na první kostce, η na druhé, ζ na třetí atd.; podle obecné věty (viz odst. 10a)

$$\text{s. h. }(x) = \text{s. h. }(\xi) + \text{s. h. }(\eta) + \text{s. h. }(\zeta) + \ldots,$$

kde každý sčítanec se rovná $\frac{1}{2}$.

9. Matematická naděje při hazardních hrách. Hra je hazardní, je-li výhra či prohra podmíněna náhodnými zjevy. Hazardní hra je *spravedlivá*, mají-li všichni hráči stejné matematické naděje na výhru, čili jsou-li střední hodnoty zisků, jež mohou jednotliví hráči očekávati, navzájem rovny. Předpokládejme, že hrají dva hráči; budiž p_1 pravděpodobnost, že vyhraje první, a p_2 pravděpodobnost, že vyhraje druhý; a_1 a a_2 nechť jsou případné výhry prvého resp. druhého. Podmínka spravedlivé hry zní

$$p_1 a_1 = p_2 a_2,$$

čili

$$a_1 : a_2 = p_2 : p_1.$$

Rozumí se, že výhra jednoho hráče je vždy na účet druhého; a_2 je tedy vklad, který dává první hráč do hry, a_1 pak vklad, který dává druhý hráč. Podmínka spravedlivé hry dá se vyjádřiti také takto (platí pro jakýkoli počet hráčů): *střední hodnota zisku pro každého hráče rovná se nule*; přihlíží se ke všem možným výsledkům jedné partie, zisky se počítají kladně a ztráty jako záporné zisky. Budiž x zisk prvního hráče (máme na mysli stále případ dvou hráčů); podle obecné formule o střední hodnotě máme

$$\text{s. h. }(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2,$$

při čemž $x_1 = a_1$, $x_2 = -a_2$. x_2 je záporné číslo, poněvadž udává ztrátu prvního hráče při prohře. Hledaná podmínka zní tedy

$$\text{s. h. }(x) = 0, \text{ čili } p_1 a_1 - p_2 a_2 = 0,$$

ve shodě s hořejším výsledkem. Poslední rovnice vyjadřuje zároveň podmínku, že zisk y druhého hráče má střední hodnotu rovnou nule; neboť pravděpodobnost, že druhý hráč prohraje částku a_1, je p_1 a pravděpodobnost, že vyhraje částku a_2, je p_2, tedy

$$\text{s. h. } (y) = -p_1 a_1 + p_2 a_2.$$

Příklad 1. Hází se dvěma kostkami. Je-li součet ok 7 výhrou pro prvního hráče a součet 8 výhrou pro druhého, je

$$p_1 = \tfrac{1}{6}, \quad p_2 = \tfrac{5}{36}$$

a podmínka spravedlivé hry zní

$$\tfrac{1}{6}a_1 = \tfrac{5}{36}a_2 \text{ aneb } a_1 : a_2 = 5 : 6.$$

Hra bude tedy spravedlivá, zaplatí-li druhý hráč prvému 5 Kčs, padne-li součet 7, a první druhému 6 Kčs, padne-li součet 8.

Hraje-li se mnoho partií, bude z celkového jich počtu asi $\frac{1}{6}$ těch, ve kterých vyhrává první hráč, a asi $\frac{5}{36}$ těch, ve kterých vyhrává druhý. Je-li na př. všech partií 3600, vyhraje první asi 600krát, druhý pak asi 500krát. Každý hráč může očevati, že během 3600 partií přijme asi $5.600 = 6.500 = 3000$ Kčs a že asi zrovna tolik vyplatí.

Kdyby výhry v jednotlivé partii nebyly v poměru 5 : 6, nebyla by hra spravedlivá; byla by výhodnější pro jednoho z hráčů než pro druhého, což by se ukázalo ziskem jednoho po velikém počtu partií.

Příklad 2. Loterie má 10 000 losů a jsou čtyři výhry po 5000 Kčs. Jakou cenu má jeden los? Pravděpodobnost, že určitý los vyhraje, je

$$p = \frac{(9999)_3}{(10\,000)_4} = \frac{9999 \,.\, 9998 \,.\, 9997 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}{10\,000 \,.\, 9999 \,.\, 9998 \,.\, 9997 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \frac{4}{10\,000}.$$

Cena losu se rovná matematické naději, kterou má majitel losu vzhledem k očekávané výhře; tato naděje čili střední hodnota výhry je $p \,.\, 5000 = 2$ Kčs a to je právě cena losu. —

Jiný způsob výpočtu: Úhrnná cena všech výher je 20 000 Kčs; to je zároveň úhrnná cena všech losů, takže na jeden los připadá 20 000 Kčs : 10 000 = 2 Kčs.

Takováto loterie je spravedlivá; podnikatel loterie má zde jistotu (prodá-li ovšem všechny losy), že sám nemůže nic ani získati ani ztratiti, neboť na čtyři vyhrávající losy vyplatí celkem 20 000 Kčs, což je právě částka stržená za všechny losy. Má-li loterie podnikateli něco vynésti, musí býti ceny losů vyšší; loterie není pak spravedlivá hra.

10. Dvě obecné věty o středních hodnotách. a) Budiž x veličina závislá na náhodě; x může nabýti každé z hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_h$ s pravděpodobnostmi po řadě $p_1, p_2, \ldots, p_h$. Podle (2) odst. 8. platí, že

$$\text{s. h. } (x) = \sum_{\alpha=1}^{h} p_\alpha x_\alpha .$$

Budiž y jiná veličina, která může nabýti každé z hodnot $y_1, y_2, \ldots, y_k$ s pravděpodobnostmi po řadě $p_1', p_2', \ldots, p_k'$, a z třetí veličina, která může nabýti hodnot $z_1, z_2, \ldots, z_l$ s pravděpodobnostmi $p_1'', p_2'', \ldots, p_l''$. Budiž pak $p_{\alpha\beta\gamma}$ pravděpodobnost, že současně platí

$$x = x_\alpha,\ y = y_\beta,\ z = z_\gamma,$$

kde

$$\alpha = 1, 2, \ldots, h;\ \beta = 1, 2, \ldots, k;\ \gamma = 1, 2, \ldots, l.$$

Úhrnná pravděpodobnost p_α, že $x = x_\alpha$, je dána vzorcem

$$p_\alpha = \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{\gamma=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma};$$

podobně pravděpodobnost p_β', že $y = y_\beta$, je

$$p'_\beta = \sum_{\alpha=1}^{h} \sum_{\gamma=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma}$$

a pravděpodobnost p_γ'', že $z = z_\gamma$, je

$$p''_\gamma = \sum_{\alpha=1}^{h} \sum_{\beta=1}^{k} p_{\alpha\beta\gamma}.$$

Podle definice je

$$\text{s. h.}\,(x + y + z) = \sum_{\alpha=1}^{h} \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{\gamma=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma}\,(x_\alpha + y_\beta + z_\gamma) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{h} p_\alpha x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{k} p_\beta' y_\beta + \sum_{\gamma=1}^{l} p_\gamma'' z_\gamma =$$

$$= \text{s. h.}\,(x) + \text{s. h.}\,(y) + \text{s. h.}\,(z).$$

Platí tedy věta (a to pro libovolný počet sčítanců), že *střední hodnota součtu několika veličin rovná se součtu jejich středních hodnot.*

Příklad: Hodíme-li jednou kostkou, je střední hodnota počtu ok rovna $\frac{7}{2}$. Hodíme-li m kostkami, je střední hodnota součtu ok rovna součtu středních hodnot pro jednotlivé kostky, tedy $m \,.\, \frac{7}{2}$; (srv. odst. 8c).

b) Počítejme nyní střední hodnotu součinu tří veličin x, y, z podržujíce zavedené označení. Výraz

$$\text{s. h.}\,(xyz) = \sum_{\alpha=1}^{h} \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{\gamma=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma}\, x_\alpha y_\beta z_\gamma,$$

nedá se obecně redukovati na střední hodnotu jednotlivých veličin x, y, z. Jen ve zvláštním případě, že veličiny x, y, z jsou *navzájem nezávislé*, platí podle věty o složené pravděpodobnosti, že

$$p_{\alpha\beta\gamma} = p_\alpha \cdot p_\beta' \cdot p_\gamma''$$

a tedy

$$\text{s. h.}\,(xyz) = \left(\sum_{\alpha=1}^{h} p_\alpha x_\alpha\right) \left(\sum_{\beta=1}^{k} p_\beta' y_\beta\right) \left(\sum_{\gamma=1}^{l} p_\gamma'' z_\gamma\right) =$$

$$= [\text{s. h.}\,(x)] \,.\, [\text{s. h.}\,(y)] \,.\, [\text{s. h.}\,(z)].$$

Střední hodnota součinu několika veličin navzájem nezávislých rovná se součinu jejich středních hodnot (srv. též odst. 38).

Poznamenejme, že věta a) platí zcela obecně *i pro navzájem závislé veličiny*.

c) Je-li a konstanta, je s. h. $(a) = a$, neboť a je veličina, která s jistotou ($p = 1$) se rovná a. Je-li a konstanta a x veličina závislá na náhodě, je s. h. $(ax) = a$ s. h. (x), neboť a a x lze považovati za veličiny *navzájem nezávislé*, takže podle odst. b) platí

$$\text{s. h. } (ax) = \text{s. h. } (a) \,.\, \text{s. h. } (x) = a \,.\, \text{s. h. } (x).$$

11. Střední hodnota druhé mocniny. Budiž zase x veličina závislá na náhodě, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nechť jsou její možné hodnoty a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ příslušné pravděpodobnosti. Je tedy s. h. $(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots p_nx_n$; $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Pro libovolná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ platí Lagrangeova identita

$$(a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a_n{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2 + \ldots + b_n{}^2) -$$
$$- (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 +$$
$$+ (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \ldots + (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1})^2.$$

Dosaďme sem

$$a_i = \sqrt{p_i},\ b_i = \sqrt{p_i}x_i;\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1;$$

vychází

$$\sum_{i=1}^{n} p_ix_i{}^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} p_ix_i\right]^2 = \sum_i \sum_k p_ip_k(x_i - x_k),$$

kde poslední součet se vztahuje ke všem různým dvojicím indexů i a k ($i, k = 1, 2, \ldots, n$). Tento součet rovnal by se nule jen tehdy, kdyby všechny hodnoty x_i byly si navzájem rovny. Obecně je kladný a proto

$$\sum_{i=1}^{n} p_ix_i{}^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} p_ix_i\right]^2 \geqq 0$$

aneb

$$\text{s. h. } (x^2) \geqq [\text{s. h. } (x)]^2.$$

Uveďme příklad: Je-li x počet ok, který vyjde při hodu kostkou, je podle odst. 8c

$$\text{s. h. } (x) = \tfrac{7}{2};$$

střední hodnota veličiny x^2 je

$$\text{s. h. } (x^2) = \tfrac{1}{6}[1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36] = \tfrac{91}{6} = 15{,}16\ldots$$

a tedy

$$\text{s. h. } (x^2) = 15{,}16\ldots, \quad [\text{s. h. } (x)]^2 = \tfrac{49}{4} = 12{,}25.$$

12. Věta Bienayméova-Čebyševova. Budiž x veličina, která nabývá *nezáporných* hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s resp. pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Je-li α kladné číslo, je

$$\text{s. h. } (x^\alpha) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^\alpha.$$

Označme znakem $\sum\limits_i{}'$ součet, jenž se vztahuje k těm a jen k těm indexům i, pro které platí, že $x_i \geqq A$; A je dané kladné číslo. Pak je

$$\text{s. h. } (x^\alpha) \geqq \sum_i{}' p_i x_i^\alpha \geqq A^\alpha \sum_i{}' p_i = A^\alpha P(A \leqq x),$$

kde $P(A \leqq x)$ značí pravděpodobnost, že $A \leqq x$, a tedy

$$\left.\begin{aligned} P(A \leqq x) &\leqq \frac{\text{s. h. } (x^\alpha)}{A^\alpha}, \\ \text{aneb} \qquad P(x < A) &\geqq 1 - \frac{\text{s. h. } (x^\alpha)}{A^\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Jedna nebo druhá nerovnost (1) vyjadřuje *větu Bienayméovu-Čebyševovu* poněkud zobecněnou dle Chinčina.

Čebyšev původně uvažoval o případě, že $\alpha = 2$. Pak jest*)

aneb

$$\left.\begin{aligned} P(A \leqq x) &\leqq \frac{\text{s. h. } (x^2)}{A^2}, \\ P(x < A) &\geqq 1 - \frac{\text{s. h. } (x^2)}{A^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Těmto nerovnostem (2) dáme poněkud jinou úpravu tím, že zavedeme proměnnou x, která po případě nabývá též záporných hodnot. Pak bude

$$\left.\begin{aligned} P(|x| \geqq A) &\leqq \frac{\text{s. h. } (x^2)}{A^2}, \\ P(|x| < A) = P(-A < x < A) &\geqq 1 - \frac{\text{s. h. } (x^2)}{A^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Poslední rovnici lze psáti též v tvaru

$$P\left(\frac{|x|}{A} < 1\right) \geqq 1 - \text{s. h.} \left(\frac{x^2}{A^2}\right).$$

Důkaz nerovností (3) provede se zcela obdobně jako pro (2): Značí-li $\sum\limits_i''$ součet, jenž se vztahuje k těm a jen k těm indexům, pro které platí $|x_i| \geqq A$ je

$$\text{s. h. } (x^2) \geqq \sum_i'' p_i x_i^2 \geqq A^2 \sum_i'' p_i = A^2 P(x \geqq A),$$

z čehož plynou nerovnosti (3).

Píšeme-li pro stručnost

$$\text{s. h. } (x^2) = u^2, \; A = tu, \; t > 0, \; u > 0,$$

*) Dvě znaménka $\leqq$ v první nerovnosti (2) jsou nezávislá; pravděpodobnost $P(A \leqq x)$ že x je buď větší než A nebo rovna A je vyjádřena určitým číslem a toto číslo může býti buď menší než s. h. $(x^2) : A^2$, anebo může býti rovno s. h. $(x^2) : A^2$. Podobně je tomu ve druhém vzorci (2) i ve vzorcích (3) a (4).

je

$$\left.\begin{aligned} P(tu \leqq |x|) &\leqq \frac{1}{t^2}, \\ P(tu > |x|) &\geqq 1 - \frac{1}{t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

a

Je-li u^2 střední hodnota veličiny x^2, je pravděpodobnost, že $|x| < tu$, buď rovna číslu $1 - \frac{1}{t^2}$, nebo větší.