Počítání s neúplnými čísly

V. Lineární interpolace

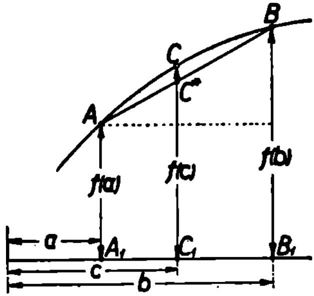
In: Karel Hruša (author): Počítání s neúplnými čísly. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1949. pp. 77–106.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403251

V. LINEÁRNÍ INTERPOLACE

19. Zbytek interpolace. Funkční hodnoty mnohých funkcí, jichž užíváme k výpočtům, bývají sestaveny v tabulky. Tabulka obsahuje vždy jen takové hodnoty funkcí, jež odpovídají argumentům vybraným nějakým přesně stanoveným způsobem, ale v praxi často potřebujeme funkční hodnoty argumentů, které v tabulce přímo obsaženy nejsou. Tuto kapitolu věnujeme postupu, jímž lze takové funkční hodnoty stanoviti, a provedeme jeho rozbor. Argumenty funkcí uvedených v tabulce jsou zpravidla čísla přesná; v dalším je budeme označovati malými písmeny.

Buď dána funkce $f(x)$ spojitá pro všecka x z intervalu $[a,b]$, při čemž předpokládáme, že $a < b$. Funkce $f(x)$ nechť má pro všecka x z tohoto intervalu první i druhou derivaci. Jejím grafickým znázorněním v pravoúhlé soustavě souřadnicové jest křivka $y = f(x)$ (obr. 7). Jsou-li dány dvě hodnoty $f(a)$, $f(b)$ této funkce a chceme-li vyjádřiti $f(c)$, kde $a < c < b$, často si pomáháme tak, že oblouk křivky $y = f(x)$ mezi body A, B nahrazujeme úsečkou $\overline{AB}$, a místo, abychom brali správnou funkční hodnotu $\overline{C_1C} = f(c)$, spokojíme se s přibližnou hodnotou $\overline{C_1C^*}$, kde C^* leží na úsečce $\overline{AB}$. Tu platí, jak je zřejmo z obrázku,



Obr. 7.

$$\overline{C_1C^*} = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a).$$

Tento postup, při němž se oblouk křivky nahrazuje částí přímky, se nazývá *lineární interpolace*. Jím se dopouštíme určité chyby v určení hodnoty $f(c)$, jež je znázorněna úsečkou $\overline{C^*C}$ a kterou budeme nazývati *zbytek interpolace*. Budeme ji označovati znakem $z(c)$. Přitom platí

$$z(c) = \overline{C_1C} - \overline{C_1C^*} = f(c) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a).$$

Nahlížíme-li na zbytek interpolace jako na funkci x, je

$$z(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Pro $x = a$ dostáváme $z(a) = 0$, pro $x = b$ dostáváme $z(b) = 0$, jak se lze dosazením přesvědčit. Proto je možno předpokládat, že $z(x)$ lze vyjádřiti ve tvaru

$$z(x) = (x - a)(x - b)v(x),$$

kde $v(x)$ je jakási vhodně zvolená funkce x;*) pro $x = c$ je $z(c) = (c - a)(c - b)v(c)$. Utvoříme-li funkci

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - (x - a)(x - b)v(c),$$

je tato funkce rovna nule pro $x = a$, $x = b$, $x = c$, při čemž $a < c < b$. Podle předpokladu, který jsme učinili o $f(x)$, je také $F(x)$ funkce spojitá pro všecka x z intervalu $[a, b]$ a má pro všecka x z tohoto intervalu prvou i druhou derivaci.

V diferenciálním počtu se dokazuje věta zvaná Rolleova: Je-li $F(a) = F(c) = 0$ a je-li $F(x)$ funkce spojitá, která má pro všecka x z intervalu $[a, c]$ derivaci, pak existuje aspoň jedna hodnota x_1, pro niž $a < x_1 < c$, taková, že derivace $F'(x_1) = 0$.**) Pro naši funkci $F(x)$ jsou předpoklady splněny, proto věta platí. Předpoklady jsou však také splněny pro všecka x z intervalu $[c, b]$, proto také existuje takové x_2,

---

*) Pro $x \neq a$, $x \neq b$ je $v(x) = \dfrac{z(x)}{(x - a)(x - b)}$; hodnoty $v(a)$, $v(b)$, jichž ostatně potřebovati nebudeme, můžeme volit libovolně.

**) Její důkaz je v každé učebnici diferenciálního počtu. Je to na př. věta I na str. 109 příručky E. Čecha.

pro něž $c < x_2 < b$, že $F'(x_2) = 0$. Derivace funkce $F(x)$ je

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - (2x - a - b)v(c).$$

Ježto také $F'(x)$ je funkce spojitá, a jak jsme právě dokázali, existují čísla x_1, x_2 taková, že $F'(x_1) = F'(x_2) = 0$, a ježto dále funkce $F'(x)$ má derivaci, která je rovna druhé derivaci $F''(x)$ původní funkce $F(x)$, platí věta Rolleova i pro funkci $F'(x)$. To znamená, že existuje aspoň jedno x_0 té vlastnosti, že $x_1 < x_0 < x_2$, pro něž $F''(x_0) = 0$. Číslo x_0 náleží také do intervalu $[a, b]$. Druhá derivace funkce $F(x)$ je

$$F''(x) = f''(x) - 2v(c).$$

Pro $x = x_0$ odtud plyne $f''(x_0) - 2v(c) = 0$, čili $v(c) = \frac{1}{2}f''(x_0)$. Je tedy zbytek interpolace $z(c)$ vyjádřen ve tvaru

$$z(c) = (c - a)(c - b)v(c) = \tfrac{1}{2}(c - a)(c - b)f''(x_0).$$

Provedenou úvahu lze doslova opakovati i v tom případě, když c není uvnitř intervalu $[a, b]$. Jen je třeba předpokládati, že $f(x)$ je spojitá a má prvou i druhou derivaci pro všecka x z takového intervalu $[a_1, b_1]$, v němž jsou obsažena všecka tři čísla a, b, c. Pak je x_0 vhodně vybrané číslo z intervalu $[a_1, b_1]$, které nemusí nutně náležeti do intervalu $[a, b]$.

Máme tedy výsledek: *Nechť $f(x)$ je funkce spojitá v intervalu $[a_1, b_1]$ a má pro všecka x z tohoto intervalu prvou i druhou derivaci. Jsou-li a, b, c, tři libovolná čísla z daného intervalu, je vždy*

$$\left.\begin{aligned} f(c) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a) + \\ + \tfrac{1}{2}(c - a)(c - b)f''(x_0), \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

kde x_0 je vhodně vybrané číslo z intervalu $[a_1, b_1]$.

Tabulky bývají zpravidla sestaveny pro argumenty, jež se postupně zvětšují o určitou konstantu, zvanou *krok tabulky*, která bývá pro celou tabulku nebo aspoň pro značnou její část stejná. Krok tabulky označíme písmenem h. Dva argumenty v tabulce po sobě jdoucí jsou podle toho a, $b = a + h$ a rozdíl funkčních hodnot těchto dvou argumentů se nazývá *tabulkový rozdíl (tabulková diference)*. Pro tabulkový rozdíl zavedeme stručné označení

$$f(a + h) - f(a) = \Delta f(a).$$

Hledáme hodnotu funkce odpovídající argumentu $c = a + \Theta h$, kde $0 \leqq \Theta < 1$. Přírůstek funkce odpovídající části kroku Θh dostaneme lineární interpolací jako úměrnou část tabulkového rozdílu ve tvaru

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \, . \, \Theta h = \Delta f(a) \, . \, \Theta.$$

Nahradíme-li správný přírůstek funkce $f(a + \Theta h) - f(a)$ nalezeným přibližným výrazem $\Delta f(a) \, . \, \Theta$, dopouštíme se určité chyby, kterou jsme výše nazvali zbytek interpolace. Položíme-li $b = a + h$, $c = a + \Theta h$, je podle svrchu odvozeného pravidla tento zbytek interpolace roven výrazu

$$z(a + \Theta h) = -\tfrac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)h^2 f''(x_0),$$

kde x_0 je vhodně zvolené číslo z intervalu $[a, a + h]$. Je tedy celkem

$$f(a + \Theta h) = f(a) + \Delta f(a) \, . \, \Theta - \tfrac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)h^2 f''(x_0).$$

Nám půjde o absolutní hodnotu zbytku interpolace. Pro tu platí

$$|z(a + \Theta h)| = \tfrac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)h^2 |f''(x_0)|,$$

neboť výraz $\Theta(1 - \Theta)$ není pro $0 \leqq \Theta < 1$ nikdy záporný. Maximální hodnoty dosáhne pro $\Theta = \frac{1}{2}$, a to rovné $\frac{1}{4}$. Je tedy vždy $\Theta(1 - \Theta) \leqq \frac{1}{4}$. Druhá derivace $f''(x)$ nabývá pro různá x z intervalu $[a, a + h]$ různých hodnot; označme znakem x_0' takový argument z tohoto intervalu, pro který je $|f''(x_0')|$ maximální, pak je $|f''(x_0)| \leqq |f''(x_0')|$. Je tedy vždy

$$|z(a + \Theta h)| \leqq \tfrac{1}{8}h^2 |f''(x_0')|. \qquad (**)$$

Tohoto výrazu lze použíti pro odhad horní hranice chyby, které se dopustíme, jestliže správnou hodnotu funkce

$f(a + \Theta h)$ nahradíme hodnotou $f(a) + \Delta f(a) \,.\, \Theta$ vzniklou lineární interpolací.

Zpravidla žádáme, aby absolutní hodnota zbytku interpolace nebyla větší než jakési pevně zvolené číslo ζ, t. j. aby $|z(a + \Theta h)| \leqq \zeta$. To nastane zcela jistě, bude-li

$$\tfrac{1}{8}h^2|f''(x_0')| \leqq \zeta.$$

Toho lze dosáhnouti vhodnou volbou kroku tabulky. Stačí voliti h tak, aby

$$h \leqq \sqrt{\frac{8\zeta}{|f''(x_0')|}}.$$

Chceme-li naopak k dané funkční hodnotě y určiti argument x, t. j. chceme-li rozřešiti rovnici $y = f(x)$ podle x, užíváme zpravidla téže tabulky, jíž užíváme k určení hodnoty funkce. Je-li y rovno některé funkční hodnotě $f(a)$ uvedené v tabulce, je $x = a$ a úloha je rozřešena. Není-li tomu tak, najdeme takový argument a, aby platilo $f(a) < < y < f(a + h)$, jde-li o funkci rostoucí, nebo $f(a) > y > > f(a + h)$, jde-li o funkci klesající. Tu musí platit

$$y = f(a) + \Delta f(a) \,.\, \Theta + z(a + \Theta h).$$

Odtud vypočteme

$$\Theta - \frac{y - f(a)}{\Delta f(a)} = - \frac{z(a + \Theta h)}{\Delta f(a)}.$$

Položíme-li $|z(a + \Theta h)| \leqq \zeta$, je

$$\left|\Theta - \frac{y - f(a)}{\Delta f(a)}\right| \leqq \frac{\zeta}{|\Delta f(a)|}.$$

To znamená: Číslo $\dfrac{y - f(a)}{\Delta f(a)}$ je střední aproximací čísla Θ a číslo $a + \dfrac{y - f(a)}{\Delta f(a)} \,.\, h$ je střední aproximací čísla x, které řeší rovnici $y = f(x)$, při čemž horní hranice prosté chyby argumentu x nepřesáhne $\zeta h : |\Delta f(a)|$. Odtud dále plyne, že argument funkce určíme tím přesněji, čím větší je absolutní hodnota tabulkového rozdílu, čili čím funkce rychleji stoupá nebo klesá.

Poznámka. Ježto zpravidla zaokrouhlujeme horní hranici zbytku interpolace jen na jedno nebo nejvýše na dvě místa, lze v předcházejících vzorcích s dostatečnou přesností položiti $|f''(a)|$ místo $|f''(x_0')|$, neboť tyto hodnoty se navzájem liší zcela nepatrně.

Cvičení. **49**. Nalezněte horní hranice pro zbytky lineární interpolace v intervalu $[a, a + h]$, jakož i horní hranice poměrných chyb, s nimiž je funkční hodnota v daném intervalu stanovena, u funkcí: a) x^2, b) x^3, c) $\sqrt{x}$, d) $\sqrt[3]{x}$. — $\Big[$a) $\frac{1}{4}h^2$, $\frac{h^2}{4a^2}$, b) $\frac{3}{4}(a + h)h^2$, $\frac{3h^2}{4a^2}\left(1 + \frac{h}{a}\right)$, c) $\frac{h^2}{32\sqrt{a^3}}$, $\frac{h^2}{32a^2}$, d) $\frac{h^2}{36\sqrt[3]{a^5}}$, $\frac{h^2}{36a^2}$.$\Big]$

50. Druhou a třetí odmocninu lze stanoviti také z tabulek druhých a třetích mocnin tak, že k dané hodnotě funkce $y = x^2$, resp. $y = x^3$ hledáme příslušný argument. Stanovte horní hranici poměrné chyby, jíž se dopustíme použitím lineární interpolace a porovnejte ji s výsledkem předcházejícího cvičení. — [Je zhruba a) čtyřikrát, b) devětkrát větší.]

20. Tabulková chyba. Funkční hodnoty uvedené v tabulkách jsou zpravidla zaokrouhleny na určitý počet desetinných míst. Jsou-li zaokrouhleny na k desetinných míst, mluvíme o k-místné tabulce. Zaokrouhlování se děje nejčastěji s opravou podle zásad vyložených v odst. **3**. Podle toho čísla uvedená v tabulce jsou čísla neúplná s chybou, jejíž horní hranice je polovina jednotky posledního ponechaného místa, t. j. $0{,}5 \cdot 10^{-k}$. Tuto chybu budeme v dalším označovati názvem *tabulková chyba*. Její vliv se projevuje jako sekundární chyba výpočtu. S čísly vyčtenými z tabulek musíme proto zacházeti jako s čísly neúplnými a počítati s nimi podle pravidel odvozených v kapitole II. Musíme si být jasně vědomi toho, že výsledek nemůže být přesný, i když jsou daná čísla přesná.

Tabulková chyba má ovšem také vliv na výpočet tabulkového rozdílu funkčních hodnot dvou argumentů v tabulce po sobě jdoucích. Přesná hodnota $f(a)$ buď zaokrouhlena na $f_1(a)$ a přesná hodnota $f(a + h)$ buď zaokrouhlena na $f_1(a + h)$. Tabulkovou chybu čísla $f(a)$ označíme písmenem τ_1 a tabulkovou chybu čísla $f(a + h)$ písmenem τ_2, t. j. položíme

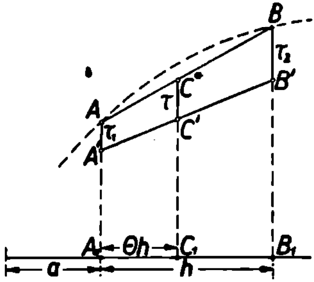
$$f(a) - f_1(a) = \tau_1, \quad f(a + h) - f_1(a + h) = \tau_2.$$

Tabulkový rozdíl, který vyčteme z tabulky, je $f_1(a + h) - f_1(a)$ místo správné hodnoty $f(a + h) - f(a)$, při čemž

$$|[f(a + h) - f(a)] - [f_1(a + h) - f_1(a)]| \leqq |\tau_1| + |\tau_2|.$$

Ježto $|\tau_1| \leqq 0{,}5 \,.\, 10^{-k}$, $|\tau_2| \leqq 0{,}5 \,.\, 10^{-k}$, lze z tabulky stanoviti tabulkový rozdíl s chybou, jejíž horní hranice je 10^{-k}.

Tabulková chyba se také projevuje, provádíme-li v tabulce lineární interpolaci. Jestliže místo správné hodnoty $\overline{A_1A} = f(a)$ bereme $\overline{A_1A'} = f_1(a)$ a místo správné hodnoty $\overline{B_1B} = f(a + h)$ bereme $\overline{B_1B'} = f_1(a + h)$, znamená to, že místo podél přímky AB interpolujeme podél přímky $A'B'$ (viz obr. 8). Přírůstek funkce odpovídající části kroku Θh, kde $0 \leqq \Theta < 1$, je podle odst. 19 roven $[f(a + h) - f(a)] \,.\, \Theta$, takže $\overline{C_1C^*} = f(a) + [f(a + h) - f(a)] \,.\, \Theta$. Dosadíme-li sem $f(a) = f_1(a) + \tau_1$, $f(a + h) = f_1(a + h) + \tau_2$, dostaneme $\overline{C_1C^*} = \overline{C_1C'} + \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) \,.\, \Theta$, neboť $\overline{C_1C'} = f_1(a) + [f_1(a + h) - f_1(a)] \,.\, \Theta$. Je tedy chyba interpolované hodnoty rovna výrazu $\tau = \overline{C_1C^*} - \overline{C_1C'} = (1 - \Theta)\tau_1 + \Theta\tau_2$, takže



Obr. 8.

$$|\tau| \leqq (1 - \Theta)|\tau_1| + \Theta|\tau_2| \leqq 0{,}5 \,.\, 10^{-k},$$

neboť, jak víme, $|\tau_1| \leqq 0{,}5 \,.\, 10^{-k}$, $|\tau_2| \leqq 0{,}5 \,.\, 10^{-k}$.

Počítáme-li přírůstek funkce, vyčteme z tabulky $f_1(a)$ a $f_1(a+h)$, utvoříme tabulkový rozdíl a násobíme jej číslem Θ. Zpravidla však nevyjde číslo obsahující celistvý počet jednotek posledního (k-tého) desetinného místa. Proto vypočtenou opravu zaokrouhlujeme na jednotky k-tého desetinného místa, čímž se dopouštíme další chyby, jejíž horní hranice je opět $0{,}5 \cdot 10^{-k}$; může se tedy stát, že celková chyba se značně přibližuje k horní hranici, která jest $0{,}5 \cdot 10^{-k} + 0{,}5 \cdot 10^{-k} = 10^{-k}$.

Abychom zbytečně nezvyšovali horní hranici chyby čísla stanoveného lineární interpolací z k-místné tabulky, zaokrouhlíme opravu vzniklou při interpolaci raději o jedno desetinné místo přesněji, než je počet desetinných míst tabulky (tedy až na $k+1$ desetinné místo). Takto vypočtená funkční hodnota nemá horní hranici chyby zcela jistě větší než 0,55 jednotky k-tého desetinného místa. Přitom neuděláme příliš velkou chybu, budeme-li pro zjednodušení oceňovati tuto horní hranici jen polovinou jednotky posledního desetinného místa. Nesmíme se ovšem nechat mást tím, že funkční hodnota vyčtená podle toho pravidla má o jedno desetinné místo více než hodnoty uvedené v tabulce. Proto toto přidané desetinné místo zpravidla označujeme drobnější číslicí.

Tabulky, v nichž se často provádí lineární interpolace, mívají pro urychlení výpočtu násobky desetiny tabulkového rozdílu (a u měr úhlových někdy i násobky šedesátiny tabulkového rozdílu) již předem vypočteny a sestaveny ve zvláštní pomocné tabulce nadepsané P. P. (partes proportionales = = části úměrné). Ve Valouchových pětimístných tabulkách*) jsou v této pomocné tabulce u logaritmů čísel uvedeny přesné hodnoty a u logaritmů goniometrických funkcí hodnoty zaokrouhlené na jedno desetinné místo. Jejich poslední číslice (desetiny) představují šesté (přidané) místo desetinné. Naproti tomu tabulka čtyrmístná (str. 2—3)

*) *Valouch*, Tabulky logaritmické 10.—12. vyd., str. 10—76.

obsahuje tyto hodnoty zaokrouhlené na jednotky čtvrtého desetinného místa tabulky, takže tabulková chyba se užíváním pomocné tabulky zbytečně zvětšuje.

I při opačném výkonu se projevuje vliv tabulkové chyby. Nebudeme-li přihlížet ke zbytku interpolace, jehož vliv jsme vyšetřili dříve, a označíme-li $f(a + \Theta h) - z(a + \Theta h) = y$, dostaneme vzorec pro lineární interpolaci z odst. 19 ve tvaru

$$y = f(a) + \Delta f(a) \,.\, \Theta.$$

Odtud vypočteme

$$\Theta = \frac{y - f(a)}{\Delta f(a)}.$$

Ponecháme dřívější označení $f(a) = f_1(a) + \tau_1$, $f(a + h) = f_1(a + h) + \tau_2$, kde τ_1, τ_2 jsou tabulkové chyby čísel $f(a)$, $f(a + h)$, a tabulkový rozdíl zaokrouhlených hodnot z tabulky vyčtených označíme $\Delta f_1(a) = f_1(a + h) - f_1(a)$. Pak je $\Delta f(a) = \Delta f_1(a) + \tau_2 - \tau_1$. Za střední aproximaci čísla Θ budeme považovati podíl $[y - f_1(a)] : \Delta f_1(a)$, utvořený z čísel vyčtených z tabulky. Chyba této aproximace je rovna rozdílu

$$\frac{y - f(a)}{\Delta f(a)} - \frac{y - f_1(a)}{\Delta f_1(a)} = - \frac{\tau_1[f_1(a + h) - y] + \tau_2[y - f_1(a)]}{[\Delta f_1(a) + \tau_2 - \tau_1]\Delta f_1(a)},$$

jak zjistíme snadnou úpravou. Ježto obě lomené závorky v čitateli jsou současně téhož znaménka, je

$$|\tau_1[f_1(a + h) - y] + \tau_2[y - f_1(a)]| \leqq$$
$$\leqq |f_1(a + h) - f_1(a)| \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^{-k} = |\Delta f_1(a)| \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^{-k}.$$

Vedle toho je $|\Delta f_1(a) + \tau_2 - \tau_1| \geqq |\Delta f_1(a)| - 10^{-k}$ za předpokladu, že $|\Delta f_1(a)| > 10^{-k}$, takže pro absolutní hodnotu výše uvedeného rozdílu dostaneme výraz

$$\left| \frac{y - f(a)}{\Delta f(a)} - \frac{y - f_1(a)}{\Delta f_1(a)} \right| \leqq \frac{0{,}5 \,.\, 10^{-k}}{|\Delta f_1(a)| - 10^{-k}}.$$

Interpolujeme-li podle tabulek, klademe

$$y = f_1(a) + \Delta f_1(a) \,.\, \Theta,$$

kde Θ je dáno s určitou chybou. To má ovšem týž následek, jako kdyby číslo y bylo dáno s chybou $|\Delta f_1(a)|$ krát větší než vypočtený výraz, t. j.

$$\frac{0{,}5\,.\,10^{-k}}{|\Delta f_1(a)| - 10^{-k}}\,.\,|\Delta f_1(a)|,$$

jež se liší jen nepatrně od čísla $0{,}5\,.\,10^{-k}$, takže vliv tabulkové chyby na výsledek lze zhruba vystihnouti tím, že chybu, s níž je stanovena hodnota funkce, zvětšíme ještě jednou o $0{,}5\,.\,10^{-k}$.

Příklad 1. Počítejme logaritmicky součin 11 . 13 . 18 . 19 s použitím pětimístné tabulky. Daná čísla jsou přesná. Je $\log 11 + \log 13 + \log 18 + \log 19 = 1{,}04139 + 1{,}11394 + 1{,}25527 + 1{,}27875 \pm 4\,.\,0{,}5\,.\,10^{-5} = 4{,}68935 \pm 2\,.\,10^{-5}$. Vzhledem k možné tabulkové chybě výsledku třeba zvětšiti horní hranici chyby výsledku na $2{,}5\,.\,10^{-5}$, takže výsledkem je neúplné číslo 48904 ± 3, jež zjistíme podle pravidla v odst. 15. Kdybychom počítali přímo, obdržíme 48906, což je opravdu v nalezených mezích. Vzniklá chyba může mít značný vliv, zejména jde-li o logaritmický výpočet výrazů složených z většího počtu čísel.

Příklad 2. Čtyrmístnými logaritmickými tabulkami počítejme výraz

$$\frac{(326{,}6 \pm 0{,}05)\sin(26°33' \pm 1')\sin(48°25' \pm 1')}{\sin(32°41' \pm 1')\sin(56°18' \pm 1')},$$

ponechávajíce páté desetinné místo nezaokrouhleno. Dostaneme

$$\begin{array}{rcl}
\log(326{,}6 \pm 0{,}05) & = & 2{,}5139_8 \pm 0{,}65\,.\,10^{-4} \pm 0{,}5\,.\,10^{-4} \\
\log\sin(26°33' \pm 1') & = & 9{,}6502_6 \pm 2{,}6\;\,.\,10^{-4} \pm 0{,}5\,.\,10^{-4} \\
\log\sin(48°25' \pm 1') & = & \underline{9{,}8739_0 \pm 1{,}2\;\,.\,10^{-4} \pm 0{,}5\,.\,10^{-4}} \\
 & & 2{,}0381_6 \pm 4{,}45\,.\,10^{-4} \pm 1{,}5\,.\,10^{-4} \\
-\log\sin(32°41' \pm 1') & = & -9{,}7324_0 \pm 2{,}0\;\,.\,10^{-4} \pm 0{,}5\,.\,10^{-4} \\
-\log\sin(56°18' \pm 1') & = & \underline{-9{,}9201_2 \pm 0{,}9\;\,.\,10^{-4} \pm 0{,}5\,.\,10^{-4}} \\
 & & 2{,}3856_4 \pm 7{,}35\,.\,10^{-4} \pm 2{,}5\,.\,10^{-4}
\end{array}$$

Horní hranici chyby výsledku třeba zvýšiti na $(7{,}35 + 2{,}5 + 0{,}5)10^{-4} = 10{,}35 \,.\, 10^{-4}$, takže hledaná hodnota je $243{,}0 \pm 0{,}6$. Přitom jsme nebrali v úvahu vliv zbytku interpolace, neboť ten je, jak v dalším uvidíme, tak nepatrný, že jej lze zanedbat.

Cvičení. **51.** Jestliže provádíme násobení nebo dělení n přesných čísel logaritmicky s použitím k-místné tabulky (při čemž při lineární interpolaci ponecháváme $(k + 1)$ní desetinné místo nezaokrouhleno), je absolutní hodnota prosté chyby výsledku menší než $1{,}25(n + 1)$ jednotek stojících na k-tém místě výsledku (počítáno zleva). Dokažte! — [Užijte výsledku cvičení **32**.]

21. Druhá diference. Předpokládáme, že funkce $f(x)$ je spojitá a má prvou a druhou derivaci pro všechna x z intervalu $[a, a + 2h]$. Do vzorce (*) odvozeného v odst. **19** dosaďme $b = a + h$, $c = a + 2h$. Podmínky tam uvedené jsou splněny, takže platí

$$f(a + 2h) = f(a) + 2[f(a + h) - f(a)] + h^2 f''(x_0),$$

kde x_0 je vhodně zvolené číslo z intervalu $[a, a + 2h]$. To lze přepsat

$$[f(a + 2h) - f(a + h)] - [f(a + h) - f(a)] = h^2 f''(x_0).$$

Podle toho, co bylo dříve řečeno, je $f(a + h) - f(a) = \Delta f(a)$ tabulkový rozdíl funkčních hodnot dvou argumentů a, $a + h$ po sobě následujících. Výraz v druhé lomené závorce označíme $f(a + 2h) - f(a + h) = \Delta f(a + h)$. Je to tabulkový rozdíl funkčních hodnot dalších dvou argumentů $a + h$, $a + 2h$ po sobě následujících.

Rozdíl dvou bezprostředně po sobě jdoucích tabulkových rozdílů se označuje názvem *druhá diference**) a zavedeme pro ni označení

$$\Delta f(a + h) - \Delta f(a) = \Delta_2 f(a).$$

Podle toho tedy platí

$$\Delta_2 f(a) = h^2 f''(x_0),$$

*) K vyvarování omylu budeme dříve zavedený tabulkový rozdíl $\Delta f(a)$ nazývati *první diference.*

kde x_0 je vhodně zvolené číslo z intervalu $[a, a + 2h]$. Označme x_0'' tu hodnotu, pro kterou platí $|f''(x)| \leqq |f''(x_0'')|$ pro všecka x z intervalu $[a, a + 2h]$. Pak je absolutní hodnota druhé diference

$$|\Delta_2 f(a)| \leqq h^2 |f''(x_0'')|.$$

Připusťme v nerovnosti (**), jíž jsme v odst. **19** omezili absolutní hodnotu zbytku interpolace, za x_0' zde nalezenou hodnotu x_0'', pro kterou $|f''(x)| \leqq |f''(x_0'')|$ pro všecka x z celého intervalu $[a, a + 2h]$ a ne jen z intervalu $[a, a + h]$, jak jsme předpokládali o x_0'. Tím pravou stranu této nerovnosti nezmenšíme, a proto bude tím spíše platit

$$|z(a + \Theta h)| \leqq \tfrac{1}{8} h^2 |f''(x_0'')|.$$

Lze tedy tvrdit vzhledem k výsledku odst. **19**:

Žádáme-li, aby absolutní hodnota zbytku interpolace nebyla větší než určité pevně zvolené číslo ζ, dosáhneme toho, bude-li $\frac{1}{8} h^2 |f''(x_0'')| \leqq \zeta$, ale pak bude také

$$|\Delta_2 f(a)| \leqq 8\zeta,$$

t. j. absolutní hodnota druhé diference nebude větší než osminásobek tohoto dovoleného zbytku interpolace.

Toho lze s výhodou použíti při zkoumání, nepřekročí-li zbytek interpolace stanovenou hodnotu, neboť druhou diferenci lze z tabulky pohodlně vyčíst. Avšak vzhledem k tomu, že funkční hodnoty v tabulce jsou zpravidla zatíženy určitou tabulkovou chybou, nevyčteme z tabulky ani druhou diferenci zcela přesně.

V předcházejícím odstavci jsme zjistili, že první diferenci lze z tabulek vyčíst s chybou, jejíž horní hranice je 10^{-k}, proto druhou diferenci, jakožto rozdíl dvou po sobě jdoucích prvních diferencí, lze z tabulky vyčíst s chybou, jejíž horní hranice je $2 \cdot 10^{-k}$. Může se tedy hodnota druhé diference vyčtená z tabulky lišiti od své přesné hodnoty až o 2 jednotky posledního desetinného místa.

Abychom mohli spolehlivěji zjistiti vliv zbytku interpolace, stačí si všimnout, že druhá diference zůstává během dosti dlouhého úseku tabulky téměř konstantní, takže lze s dostatečnou přesností vzíti v úvahu její hodnotu průměrnou. Utvoříme-li součet řady po sobě jdoucích druhých diferencí, t. j. výraz

$$\Delta_2 f(a) + \Delta_2 f(a+h) + \ldots + \Delta_2 f(a+(n-1)h) =$$
$$= \Delta f(a+h) - \Delta f(a) + \Delta f(a+2h) - \Delta f(a+h) + \ldots +$$
$$+ \Delta f(a+nh) - \Delta f(a+(n-1)h) = \Delta f(a+nh) - \Delta f(a),$$

je také stanoven s chybou, jejíž horní hranice je $2 \cdot 10^{-k}$, takže průměrná hodnota druhé diference je určena s chybou, jejíž absolutní hodnota není větší než $\frac{2}{n} \cdot 10^{-k}$. Vezmeme-li tedy průměr třeba z deseti po sobě jdoucích druhých diferencí, je stanoven s chybou co do absolutní hodnoty ne větší než $0{,}2 \cdot 10^{-k}$, což je zcela postačitelné. Pak je horní hranice zbytku interpolace určena s chybou, jejíž absolutní hodnota není větší než $0{,}025 \cdot 10^{-k}$, t. j. čtvrtina jednotky $(k+1)$ho desetinného místa.

Zpravidla žádáme, aby absolutní hodnota zbytku interpolace nepřesáhla desetinu jednotky posledního desetinného místa, t. j. $0{,}1 \cdot 10^{-k}$. Tomu bude vyhověno, nebude-li absolutní hodnota druhé diference přesahovati 0,8 jednotky téhož místa. Zaokrouhlíme-li pak na k desetinných míst funkční hodnoty získané lineární interpolací (ovšem bez tabulkové chyby, jejíž horní hranice je $0{,}5 \cdot 10^{-k}$), obdržíme totéž číslo, které bychom obdrželi, kdybychom zaokrouhlili na k desetinných míst přesné funkční hodnoty, nejvýše snad s výjimkami, je-li na $(k+1)$ním desetinném místě přesné hodnoty čtyrka nebo pětka (viz cvič. 3).

Cvičení. **52.** Kdyby byla v tabulce uvedena hodnota $f(a)$ s početní chybou ε, jaký vliv by to mělo na první a na druhé diference? Bylo by lze podle druhých diferencí zjistiti chybu ε? — [Je-li v tabulce uvedeno $f(a) + \varepsilon$ místo $f(a)$, vyčteme místo správných prvních a druhých diferencí hodnoty $\Delta f(a-h) + \varepsilon$, $\Delta f(a) - \varepsilon$, $\Delta_2 f(a-2h) + \varepsilon$, $\Delta_2 f(a-h) - 2\varepsilon$, $\Delta_2 f(a) + \varepsilon$; vzhledem k tabulkové chybě a k dovolenému zbytku interpolace musí se přítomnost chyby projevit, jakmile $|\varepsilon| > 1{,}4 \cdot 10^{-k}$.]

22. Tabulky nejjednodušších funkcí. V tomto odstavci provedeme rozbor tabulek, jichž se při numerickém počítání nejčastěji užívá.

1. *Tabulka logaritmů.* Je-li $f(x) = \log x$, je $f'(x) = \frac{\mu}{x}$, $f''(x) = -\frac{\mu}{x^2}$, kde $\mu \doteq 0{,}434$ je modul dekadických logaritmů. Ježto $1 : x^2$ s rostoucím argumentem klesá, volíme $x_0' = x_0'' = a$, takže pro zbytek interpolace a pro druhou diferenci dostaneme

$$|z(a + \Theta h)| < \frac{\mu h^2}{8a^2}, \quad |\Delta_2 f(a)| < \frac{\mu h^2}{a^2}.$$

V logaritmických tabulkách je zpravidla $h = 1$, t. j. jsou tabelovány logaritmy čísel vzrůstajících o jednotku. Pak je pro $a \geqq 100$

$$|z(a + \Theta h)| < \frac{\mu}{8 \,.\, 10^4} \doteq 5{,}4 \,.\, 10^{-6},$$

$$|\Delta_2 f(a)| < \frac{\mu}{10^4} \doteq 4{,}3 \,.\, 10^{-5}$$

a tyto horní hranice se se vzrůstajícím a zmenšují. Pro $a \geqq 1000$ je

$$|z(a + \Theta h)| < \frac{\mu}{8 \,.\, 10^6} \doteq 5{,}4 \,.\, 10^{-8},$$

$$|\Delta_2 f(a)| < \frac{\mu}{10^6} \doteq 4{,}3 \,.\, 10^{-7}$$

atd. Čtyrmístné tabulky, v nichž jsou logaritmy zaokrouhleny na čtyři desetinná místa, obsahují zpravidla logaritmy argumentů od 100 do 1000 (nebo ještě také něco málo přes 1000); zbytek interpolace v nich nepřekročí 5,4 jednotky šestého desetinného místa, je tedy tak nepatrný, že jej lze v praxi zanedbat. V pětimístných tabulkách bývají tabelovány logaritmy argumentů od 1000 do 10 000; tam je zbytek interpolace menší než 5,4 jednotky osmého desetinného místa, takže jej lze také zanedbat.

Žádáme-li, aby zbytek interpolace byl menší než 0,1 jednotky posledního desetinného místa tabulky, je tomu vyhověno, je-li

$$\frac{\mu h^2}{8a^2} \leqq 0,1 \,.\, 10^{-k}, \text{ čili } a \geqq h \sqrt{\frac{\mu}{8} \,.\, 10^{k+1}},$$

kde k je počet desetinných míst tabulky. Jde-li o tabulky čtyrmístné ($k = 4$, $h = 1$), musí $a \geqq 74$; volba argumentů od 100 do 1000 tomu odpovídá. U tabulek pětimístných ($k = 5$) je $a \geqq 233$, takže lze tabelovat logaritmy čísel větších než 233. Pro $k = 7$ dostaneme $a \geqq 2330$; proto se v sedmimístných tabulkách uvádějí zpravidla argumenty od 10 000 do 100 000.

2. *Tabulky goniometrických funkcí.* Je-li $f(x) = \sin x$, při čemž se lze omeziti jen na taková x, pro něž platí $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, je $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. Ježto $\sin x$ je funkce stoupající (pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$), volíme $x_0' = x_0'' = a + 2h$, takže

$$|z(a + \Theta h)| < \tfrac{1}{8}h^2 \sin(a + 2h) \leqq \tfrac{1}{8}h^2,$$
$$|\Delta_2 f(a)| < h^2 \sin(a + 2h) \leqq h^2$$

v celém rozsahu tabulky, neboť $\sin(a + 2h) \leqq 1$. Je-li na př. $h = 10'$ čili v míře obloukové $h = \pi : (180 \,.\, 6) \doteq 0,003$, je $|z(a + \Theta h)| < \frac{1}{8}\, 0,000009 \doteq 10^{-6}$. Jde-li tedy o tabulku pětimístnou, zbytek interpolace nepřekročí desetinu posledního místa v celém rozsahu tabulky. Kdyby šlo o tabulku čtyrmístnou, stačí volit h tak, aby platilo $\frac{1}{8}h^2 \leqq 0,1 \,.\, 10^{-4}$, t. j. $h \leqq 0,0089 \doteq 30'$. Volíme-li tedy krok čtyrmístné tabulky sinů rovný $30'$ nebo menší, zbytek interpolace nepřevýší nikdy desetinu posledního desetinného místa.

Jinak je tomu u funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$. Tu je $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $f''(x) = \dfrac{2 \sin x}{\cos^3 x}$. Ježto funkce $f''(x)$ je funkce rostoucí, volíme

$x_0' = x_0'' = a + 2h$, takže

$$|z(a + \Theta h)| < \frac{h^2 \sin(a + 2h)}{4\cos^3(a + 2h)}, \; |\Delta_2 f(a)| < \frac{2h^2 \sin(a + 2h)}{\cos^3(a + 2h)}.$$

Zbytek interpolace i druhá diference jsou poměrně malé u malých úhlů, se vzrůstajícím argumentem velmi rychle stoupají. Volíme-li na př. $h = 10'$, lze vypočítati, že horní hranice zbytku interpolace nepřekročí čísla, jež jsou uvedena v následující tabulce (vesměs v jednotkách šestého desetinného místa):

a	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\|z(a + \Theta h)\|$	0	0,6	1,6	4,2	14,7	118	∞

Jde-li o tabulku pětimístnou, je podmínka, aby zbytek interpolace nepřekročil 0,1 jednotky posledního desetinného místa, splněna jen pro velmi malé úhly nepřesahující příliš 15°; naproti tomu u tabulky čtyrmístné je podmínka splněna při témže kroku $h = 10'$ o něco dále než pro 45°. Pro větší hodnoty úhlů však nelze v tabulce spolehlivě interpolovat.

Poznámka. Lineární interpolaci lze zlepšiti, uvědomíme-li si, že zbytek interpolace $z(a + \Theta h) = -\frac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)h^2 f''(x_0)$, při čemž $h^2 f''(x_0)$ je velmi přibližně rovno druhé diferenci $\Delta_2 f(a)$. Lze tedy psát přibližnou rovnost $z(a + \Theta h) \approx -\frac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)\Delta_2 f(a)$, takže lepšího souhlasu dosáhneme, opravíme-li lineární interpolaci přidáním tohoto členu. Pak bude

$$f(a + \Theta h) \approx f(a) + \Theta \,.\, \Delta f(a) - \tfrac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)\Delta_2 f(a).$$

Bylo by lze ukázat, že chyba tohoto přiblížení je nepatrná.

Hledáme-li na příklad v pětimístné tabulce o kroku 10′ hodnotu tg67°26′, nalezneme tg67°20′ $\doteq$ 2,39449, tg67°30′ $\doteq$ 2,41421, tg67°40′ $\doteq$ 2,43422; pak je Δtg67°20′ = 0,01972, Δtg67°30′ = 0,02001, $\Delta_2$tg67°20′ = 0,00029, takže tg67°26′ $\approx$ 2,39449 + 0,6 . 0,01972 — — $\frac{1}{2}$. 0,6 . 0,4 . 0,00029 $\doteq$ 2,40628 s chybou co do absolutní hodnoty menší než $0.5 \,.\, 10^{-5}$.

Hledáme-li naopak argument k dané funkční hodnotě, vypočteme z nalezené přibližné rovnosti

$$\Theta \approx \frac{f(a + \Theta h) - f(a)}{\Delta f(a)} + \frac{\frac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)\Delta_2 f(a)}{\Delta f(a)}.$$

Lineární interpolací dostaneme

$$\Theta_1 = \frac{f(a + \Theta h) - f(a)}{\Delta f(a)}$$

a pak je velmi přibližně

$$\Theta \approx \Theta_1 + \frac{\frac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)\Delta_2 f(a)}{\Delta f(a)} \approx \Theta_1 + \frac{\frac{1}{2}\Theta_1(1 - \Theta_1)\Delta_2 f(a)}{\Delta f(a)},$$

neboť správná hodnota Θ a nalezená hodnota Θ_1 se navzájem liší jen velmi nepatrně.

Podle toho hledáme-li úhel α daný tangentou $\mathrm{tg}\alpha = 3{,}38856 \pm \pm 0{,}5 \,.\, 10^{-5}$, nalezneme v pětimístné tabulce $\mathrm{tg}73°30' \doteq 3{,}37594$, $\mathrm{tg}73°40' \doteq 3{,}41236$, $\Delta\mathrm{tg}73°30' = 0{,}03642$ a odtud určíme $\Theta_1 = = 0{,}01262 : 0{,}03642 \doteq 0{,}3465$. Vedle toho je $\mathrm{tg}73°50' \doteq 3{,}44951$, $\Delta\mathrm{tg}73°40' = 0{,}03715$, $\Delta_2\mathrm{tg}73°30' = 0{,}00073$, takže $\Theta \approx 0{,}3465 + + \frac{1}{2} \,.\, 0{,}3465 \,.\, 0{,}6535 \,.\, 0{,}00073 : 0{,}03642 \doteq 0{,}3465 + 0{,}0023 = 0{,}3488$. Je tedy $\alpha \approx 73°33{,}488'$, čili $\alpha = 73°33'29{,}3'' \pm 0{,}2''$, kde chyba $0{,}2''$ odpovídá chybě $0{,}5 \,.\, 10^{-5}$, s níž byla dána hodnota tangenty, a chybě $0{,}5 \,.\, 10^{-5}$, jež podle konce odst. **20** vystihuje tabulkovou chybu.

3. *Tabulka logaritmů goniometrických funkcí.* Je-li $f(x) = = \log \sin x$, je $f'(x) = \mu \operatorname{cotg} x$, $f''(x) = -\frac{\mu}{\sin^2 x}$, takže $|f''(x)|$ je funkce klesající. Proto položíme $x_0' = x_0'' = a$, a pak

$$|z(a + \Theta h)| < \frac{\mu h^2}{8 \sin^2 a}, \quad |\Delta_2 f(a)| < \frac{\mu h^2}{\sin^2 a}.$$

Zbytek interpolace i druhá diference zmenšují svou absolutní hodnotu se vzrůstajícím argumentem a.

Zbytek interpolace nepřesáhne číslo $0{,}1 \,.\, 10^{-k}$, bude-li

$$\frac{\mu h^2}{8 \sin^2 a} \leqq 0{,}1 \,.\, 10^{-k}, \text{ t. j. } \sin a \geqq h \sqrt{\frac{10^{k+1}\mu}{8}}.$$

Pro $k = 5$, $h = 1' \doteq 2{,}9 \,.\, 10^{-4}$ v míře obloukové je $\sin a \geqq \geqq 0{,}0678$, t. j. $a > 4°$. V pětimístné tabulce o kroku $1'$ lze lineárně interpolovat pro argumenty od $4°$. Pro $k = 4$, $h = 10' \doteq 2{,}9 \,.\, 10^{-3}$ je $\sin a \geqq 0{,}214$, t. j. $a > 12\frac{1}{2}°$, proto ve čtyrmístné tabulce o kroku $10'$ lze interpolovat teprve asi od $12\frac{1}{2}°$.

Podobně pro $f(x) = \log \mathrm{tg} x$ je $f'(x) = \dfrac{\mu}{\sin x \cos x} = \dfrac{2\mu}{\sin 2x}$, $f''(x) = -\dfrac{4\mu \cos 2x}{\sin^2 2x}$. Funkce $f''(x)$ je rostoucí, pro $x < 45°$ záporná a pro $x > 45°$ kladná. Je-li však h dostatečně malé, lze přibližně položiti $x_0' = x_0'' = a$; tím se výsledek změní jen nepatrně, takže zhruba platí

$$|z(a + \Theta h)| < \frac{\mu h^2 |\cos 2a|}{2 \sin^2 2a}, \; |\Delta_2 f(\dot{a})| < \frac{4\mu h^2 |\cos 2a|}{\sin^2 2a}.$$

Zbytek interpolace nabývá nejmenší absolutní hodnoty pro $a = 45°$. Tato absolutní hodnota se zvětšuje, jestliže a stoupá k $90°$ nebo klesá k $0°$.

Zbytek interpolace nepřesáhne $0{,}1 \,.\, 10^{-k}$, bude-li

$$\frac{\mu h^2 |\cos 2a|}{2 \sin^2 2a} \leqq 0{,}1 \,.\, 10^{-k}.$$

Ježto $\sin^2 2a = 1 - |\cos 2a|^2$, plyne odtud

$$2|\cos 2a|^2 + \mu h^2 \,.\, 10^{k+1} |\cos 2a| - 2 \leqq 0,$$

$$|\cos 2a| \leqq \tfrac{1}{4}(-\mu h^2 \,.\, 10^{k+1} + \sqrt{\mu^2 h^4 \,.\, 10^{2(k+1)} + 16}),$$

neboť $|\cos 2a|$ nemůže být záporné. Pro $k = 5$, $h = 1' \doteq 2{,}9 \,.\, 10^{-4}$ je $|\cos 2a| \leqq 0{,}991$, t. j. $4° < a < 86°$, pro kteréžto hodnoty lze lineárně interpolovat. Podobně pro $k = 4$, $h = 10' \doteq 2{,}9 \,.\, 10^{-3}$ je $|\cos 2a| \leqq 0{,}912$, takže $12° < a < 78°$, kdy je přípustná lineární interpolace v tabulce čtyrmístné.

Poznámka. Pro malé úhly, pro něž není lineární interpolace dostatečně spolehlivá, bývá často sestavena zvláštní tabulka o malém kroku (viz na př. Valouchovy tabulky str. 31, kde jsou uvedeny hodnoty funkcí $\log \sin a$, $\log \mathrm{tg} a$ úhlů menších než 5' při kroku 1"). Lze také užít obratu, který byl popsán výše při tabulce tangent. Nejčastěji se však postupuje takto: Je možno položit $\sin a = k_1 a$, $\mathrm{tg} a = k_2 a$; pokud je úhel a dosti malý, jsou čísla k_1, k_2 (velmi přibližně) nezávislá na argumentu a. Označíme-li $\log k_1 = S$, $\log k_2 = T$, je $\log \sin a = \log a + S$, $\log \mathrm{tg} a = \log a + T$. Hodnoty S a T, jež odpovídají argumentu a, zpravidla měřenému ve vteřinách, bývají tabelovány ve zvláštní tabulce připojené k tabulce logaritmů (viz na př. Valouchovy tabulky str. 4 a 5 dole a str. 8—29 dole).

Cvičení. **53.** Ukažte, že v tabulce, která obsahuje pětimístné logaritmy čísel od 1000 výše, lze při kroku $h = 4$ ještě lineárně interpolovat.

54. Jak daleko lze v sedmimístné tabulce sinů s krokem $h = 1'$ ještě lineárně interpolovat? — [Asi do 71°.]

55. Jak daleko lze lineárně interpolovat v pětimístné tabulce tangent při kroku a) 10′, b) 1′? — [Asi do a) 22°, b) 74°.]

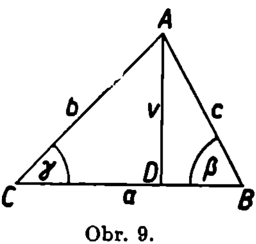
56. S pomocí hodnoty T lze určiti logaritmus tangenty malého úhlu a. Jak stanovíme $\log \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - a)$? — [$\log \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - a) = - \log a - T$.]

23. Počítání s logaritmy. Při logaritmickém počítání se vedle primární chyby, která byla systematicky vyšetřena v kapitole IV., uplatňuje chyba sekundární působená jednak zbytkem interpolace a jednak tabulkovou chybou. Jak jsme seznali v předcházejícím odstavci, bývají tabulky uspořádány tak, aby bylo lze zbytek interpolace zanedbat, proto se při odhadu sekundární chyby omezíme toliko na vyšetření vlivu tabulkové chyby. Nelze udati obecné pravidlo, podle něhož bychom mohli sekundární chybu vypočísti, nýbrž je třeba postupně sledovati jednotlivé početní operace a vyšetřovati jejich vliv na sekundární chybu. Toto vyšetřování bývá někdy dosti složité.

Ukážeme to na *příkladě* a vyšetříme sekundární chybu v úloze z cvič. **47**, při čemž budeme považovati daná čísla za přesná. Podle nalezeného výsledku a podle primární chyby pak posoudíme, jakých tabulek je třeba použíti při výpočtu. Jde o úlohu:

V trojúhelníku jsou dány strany a, b a úhel γ; stanoviti třetí stranu a zbývající úhly.

Lze voliti různé způsoby výpočtu. Probereme je postupně.



Obr. 9.

I. Vedeme-li v trojúhelníku ABC výšku $\overline{AD} = v$, vzniknou dva pravoúhlé trojúhelníky ACD, ABD (obr. 9), z nichž lze postupně vypočísti

$$v = b \sin\gamma, \quad \overline{CD} = b \cos\gamma, \quad \overline{DB} = a - b \cos\gamma,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v}{a - b\cos\gamma}, \quad \alpha = 180 - \beta - \gamma, \quad c = \frac{v}{\sin\beta}.$$

Užíváme-li k-místných logaritmů, je číslo $\log b$ stanoveno s chybou, jejíž absolutní hodnota je menší než $0{,}5 \cdot 10^{-k}$, s touž horní hranicí chyby je stanoveno i číslo $\log\sin\gamma$, takže $\log v$ je stanoven se sekundární chybou co do absolutní hodnoty menší než 10^{-k}. Rovněž tak absolutní hodnota chyby čísla $\log b\cos\gamma$ je menší než 10^{-k}. Při hledání čísla $b\cos\gamma$ se uplatňuje jednak tato chyba, jednak chyba vznikající lineární interpolací podle konce odst. **20**, tedy celkem $1{,}5 \cdot 10^{-k}$, takže horní hranice prosté chyby čísla $b\cos\gamma$ je podle odst. **15** menší než

$$1{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot |b\cos\gamma| : \mu$$

a s touž chybou je určeno i číslo $a - b\cos\gamma$, neboť střední aproximaci čísla a považujeme pro výpočet sekundární chyby za přesnou. Určujeme-li $\log(a - b\cos\gamma)$, dostáváme při hledání logaritmu jednak tabulkovou chybu s horní hranicí menší než $0{,}5 \cdot 10^{-k}$ a jednak chybu, která vzniká tím, že číslo $a - b\cos\gamma$ je nepřesné. Tato chyba je podle odst. **15** co do absolutní hodnoty menší než

$$\mu \cdot \frac{1}{\mu} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot \frac{|b\cos\gamma|}{|a - b\cos\gamma|} = 1{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot |\operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\gamma|.$$

Je tedy číslo $\log(a - b\cos\gamma)$ určeno s chybou, jejíž horní hranice je menší než $0{,}5 \cdot 10^{-k} + 1{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot |\operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\gamma|$. Pak je $\log\operatorname{tg}\beta$ určen s chybou o horní hranici menší než

$$10^{-k} + 0{,}5 \cdot 10^{-k} + 1{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot |\operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\gamma|$$

a β samo má horní hranici prosté chyby, která je podle cvič. **37** c) menší než výraz

$$\frac{1}{2\mu}\,(2 + 1{,}5\,|\operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\gamma|)\,|\sin 2\beta| \cdot 10^{-k},$$

neboť na tabulkovou chybu při zpětném hledání úhlu β jest opět přičísti $0{,}5 \cdot 10^{-k}$. Touž horní hranici chyby má i úhel α.

Pokračujeme dále a hledáme $\log\sin\beta$. Horní hranice jeho chyby obsahuje opět člen $0{,}5 \cdot 10^{-k}$ způsobený tabulkovou chybou a vedle toho podle cvič. **36** a) člen

$$\mu \cdot \frac{1}{2\mu} = (2 + 1{,}5\,|\operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\gamma|)\,|\sin 2\beta| \cdot |\operatorname{cotg}\beta| \cdot 10^{-k} =$$
$$= (2 + 1{,}5\,|\operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\gamma|)\cos^2\beta \cdot 10^{-k}.$$

Proto číslo logc má horní hranici chyby menší než

$$10^{-k} + 0{,}5 \,.\, 10^{-k} + (2 + 1{,}5\,|\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{cotg}\gamma|)\,\cos^2\beta \,.\, 10^{-k}$$

a pak je c určeno s chybou, jež je co do absolutní hodnoty menší než výraz

$$\frac{1}{\mu}[2 + (2 + 1{,}5\,|\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{cotg}\gamma|)\cos^2\beta]\,c \,.\, 10^{-k}.$$

Dosadíme-li sem číselné hodnoty z cvič. **47**: $\alpha = 29°12'$, $\beta = 77°22'$, $\gamma = 73°26'$, $a = 23{,}4$, $b = 46{,}8$, $c = 45{,}97$, vyjde, že sekundární chyba úhlů α, β je co do absolutní hodnoty menší než $1{,}96 \,.\, 10^{-k}$ v míře obloukové neboli $6740 \,.\, 10^{-k}$ minut v míře úhlové. Podobně sekundární chyba strany c je co do absolutní hodnoty menší než $232 \,.\, 10^{-k}$. Použijeme-li čtyrmístných tabulek, t. j. položíme-li $k = 4$, jsou horní hranice sekundárních chyb: u úhlů α, β menší než 0,7' a u strany c menší než 0,03 m. Porovnáme-li tyto hodnoty s horními hranicemi primárních chyb, stanovenými ve cvič. **47**, vidíme, že čtyrmístné tabulky k řešení úlohy plně stačí.

Bylo by možno také užíti výšky spuštěné s vrcholu B; pak by zůstal výpočet týž, jen by se strany a, b a úhly α, β navzájem vyměnily. Dostali bychom horní hranici sekundární chyby úhlu α (a také β) ve tvaru $\frac{1}{2\mu}(2 + 1{,}5\,|\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{cotg}\gamma|)\,|\sin 2\alpha| \,.\, 10^{-k} \doteq 2{,}21 \,.\, 10^{-k}$ a horní hranici sekundární chyby strany c ve tvaru

$$\frac{1}{\mu}[2 + (2 + 1{,}5\,|\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{cotg}\gamma|)\cos^2\alpha]\,c \,.\, 10^{-k} \doteq 393 \,.\, 10^{-k},$$

takže při užit čtyrmístných tabulek je chyba při určení úhlů menší než 0,8' a při určení strany c menší než 0,04 m.

2. Provedeme-li týž výpočet s použitím věty tangentové, dostáváme $\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \mathrm{cotg}\frac{1}{2}\gamma \,.\, \frac{a-b}{a+b}$, $\alpha = (90 - \frac{1}{2}\gamma) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\beta = (90 - \frac{1}{2}\gamma) - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ nebo také $c = b\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$. Číslo $\log \mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ lze stanovit s horní hranicí chyby $1{,}5 \,.\, 10^{-k}$; odtud plyne (cvič. **37** c) s ohledem na tabulkovou chybu tohoto čísla, že úhel $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ lze určiti s chybou, jejíž absolutní hodnota je menší než výraz $\frac{1}{2\mu} \,.\, 2 \,.\, 10^{-k} \,.\, |\sin(\alpha - \beta)|$ a s touž chybou pak lze určiti α i β. Pak $\log\sin\alpha$ je stanoven s chybou co do absolutní hodnoty menší než $0{,}5 \,.\, 10^{-k} + \mu \,.\, \frac{1}{\mu} \,.\, 10^{-k} \,.\, |\sin(\alpha - \beta)\,\mathrm{cotg}\alpha|$, logc s chybou

menší než $(1{,}5 + |\sin(\alpha - \beta)\operatorname{cotg}\alpha|) \,.\, 10^{-k}$ a číslo c samo s chybou, jejíž horní hranice je menší než výraz

$$\frac{1}{\mu}(2 + |\sin(\alpha - \beta)\operatorname{cotg}\alpha|)\, c \,.\, 10^{-k}.$$

Počítáme-li stranu c s pomocí strany b a úhlu β, vyjde horní hranice sekundární chyby menší než

$$\frac{1}{\mu}(2 + |\sin(\alpha - \beta)\operatorname{cotg}\beta|)c \,.\, 10^{-k}.$$

Dosadíme-li sem daná čísla, dostaneme horní hranice sekundární chyby: u úhlů α, β menší než $1{,}72 \,.\, 10^{-k}$ v míře obloukové, čili $5900 \,.\, 10^{-k}$ minut v míře úhlové a u strany c, je-li počítána ze strany a, $353 \,.\, 10^{-k}$, a je-li počítána ze strany b, $229 \,.\, 10^{-k}$. Horní hranice sekundární chyby jsou zhruba stejné jako v případě předešlém. Čtyrmístnými tabulkami nalezneme úhly s chybou menší než 0,6, a stranu c s chybou menší než 0,04 m, resp. 0,03 m.

3. Při užití věty kosinové je výpočet tento:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma},\quad \sin\alpha = \sin\gamma \,.\, \frac{a}{c},\quad \sin\beta = \sin\gamma \,.\, \frac{b}{c}.$$

a) Výraz pro c lze počítat tak, že vypočteme zvlášť jednotlivé členy pod odmocnítkem. Hodnotu $\log a$ stanovíme s chybou absolutně menší než $0{,}5 \,.\, 10^{-k}$, $\log a^2$ s chybou absolutně menší než 10^{-k} a odtud vzhledem k tabulkové chybě určíme číslo a^2 s chybou co do absolutní hodnoty menší než $1{,}5 \,.\, 10^{-k} \,.\, a^2 : \mu$. Obdobně stanovíme b^2 s chybou co do absolutní hodnoty menší než $1{,}5 \,.\, 10^{-k} \,.\, b^2 : \mu$ a číslo $2ab\cos\gamma$ s chybou, jež je co do absolutní hodnoty menší než

$$2{,}5 \,.\, 10^{-k} \,.\, 2ab\,|\cos\gamma| : \mu,$$

neboť logaritmus každého z jeho čtyř činitelů má horní hranici chyby menší než $0{,}5 \,.\, 10^{-k}$. Je tedy výraz pod odmocnítkem určen s chybou, jejíž horní hranice nedosáhne čísla

$$\frac{1}{\mu}(1{,}5a^2 + 1{,}5b^2 + 5ab\,|\cos\gamma|)10^{-k}.$$

Jeho logaritmus má chybu s horní hranicí menší než

$$0{,}5 \,.\, 10^{-k} + \mu \,.\, \frac{1}{\mu} \,.\, \frac{1{,}5a^2 + 1{,}5b^2 + 5ab\,|\cos\gamma|}{c^2} \,.\, 10^{-k}.$$

Horní hranice chyby čísla $\log c$ je rovna polovině tohoto výrazu a číslo c, jež mu odpovídá, má horní hranici chyby menší než

$$\frac{1}{\mu}\left[0{,}5 \cdot 10^{-k} + \frac{0{,}5 \cdot 10^{-k}}{2}\left(1 + \frac{3a^2 + 3b^2 + 10ab\,|\cos\gamma|}{c^2}\right)\right] c =$$

$= \dfrac{3c^2 + 3a^2 + 3b^2 + 10ab\,|\cos\gamma|}{4\mu c} \cdot 10^{-k}$, což lze pro $\gamma \leqq R$ psát v tvaru $\dfrac{4a^2 + 4b^2 - c^2}{2\mu c} \cdot 10^{-k}$ a pro $\gamma \geqq R$ v tvaru $\dfrac{4c^2 - a^2 - b^2}{2\mu c} \cdot 10^{-k}$.

Výraz pro $\log c$ má horní hranici chyby

$$\frac{0{,}5 \cdot 10^{-k}}{2}\left(1 + \frac{3a^2 + 3b^2 + 10ab\,|\cos\gamma|}{c^2}\right),$$

proto horní hranice chyby čísla $\log\sin\alpha$ je

$$\frac{0{,}5 \cdot 10^{-k}}{2}\left(5 + \frac{3a^2 + 3b^2 + 10ab\,|\cos\gamma|}{c^2}\right),$$

takže α je určeno s chybou menší než

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{0{,}5 \cdot 10^{-k}}{2}\left(7 + \frac{3a^2 + 3b^2 + 10ab\,|\cos\gamma|}{c^2}\right) \cdot |\mathrm{tg}\,\alpha|,$$

což lze pro $\gamma \leqq R$ vyjádřit v tvaru $\dfrac{4a^2 + 4b^2 + c^2}{2\mu c^2} \cdot |\mathrm{tg}\,\alpha| \cdot 10^{-k}$ a pro $\gamma \geqq R$ v tvaru $\dfrac{6c^2 - a^2 - b^2}{2\mu c^2} \cdot |\mathrm{tg}\,\alpha| \cdot 10^{-k}$. Obdobně je úhel β určen s chybou co do absolutní hodnoty menší než

$$\frac{4a^2 + 4b^2 + c^2}{2\mu c^2} \cdot |\mathrm{tg}\,\beta| \cdot 10^{-k} \text{ pro } \gamma \leqq R$$

a s chybou co do absolutní hodnoty menší než

$$\frac{6c^2 - a^2 - b^2}{2\mu c^2} \cdot |\mathrm{tg}\,\beta| \cdot 10^{-k} \text{ pro } \gamma \geqq R.$$

Pro naše daná čísla je horní hranice chyby pro stranu c menší než $221 \cdot 10^{-k}$, pro úhel α menší než $3{,}98 \cdot 10^{-k}$ v míře obloukové čili $13700 \cdot 10^{-k}$ minut v míře úhlové a pro úhel β menší než $31{,}8 \cdot 10^{-k}$ v míře obloukové čili $109000 \cdot 10^{-k}$ minut v míře úhlové. Tento postup stanoví stranu c přibližně s touž přesností jako oba postupy předcházející, naproti tomu úhly jsou jím určeny daleko méně přesně. To jsme mohli předem očekávat, neboť úhly jsou sinem určeny méně přesně než tangentou, zejména neliší-li se příliš od úhlu pravého. K určení úhlů čtyrmístná tabulka nestačí.

b) Výraz pod odmocnítkem lze upraviti takto:

$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab(1 + \cos\gamma) = (a + b)^2 - 4ab\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma = \\ = (a + b + p)(a + b - p),$$

kde $p = 2\sqrt{ab}\cos\frac{1}{2}\gamma$. Číslo p počítáme logaritmicky, $\log p$ je určen s chybou o horní hranici $1{,}5 \cdot 10^{-k}$, číslo p samo s chybou absolutně menší než $2 \cdot 10^{-k} \cdot p : \mu$. S touž chybou jsou pak určena i čísla $a+b+p$, $a+b-p$, ale tu třeba dát pozor, neboť jednou se chyba čísla p přičítá a po druhé odčítá (viz konec odst. 8). Číslo $\log(a + b + p) + \log(a + b - p)$ je dáno s chybou o horní hranici

$$10^{-k} + \mu \cdot \frac{2 \cdot 10^{-k}}{\mu} \left|\frac{p}{a + b + p} - \frac{p}{a + b - p}\right| = \left(1 + \frac{4p^2}{c^2}\right) 10^{-k}.$$

Přitom prvý člen vzniká sečtením tabulkových chyb obou logaritmů a druhý člen je působen chybou, jíž je zatíženo číslo p. Chyba čísla $\log c$ je pak poloviční, takže c samo má chybu co do absolutní hodnoty menší než $\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{2p^2}{c^2}\right) c \cdot 10^{-k}$ vzhledem k tomu, že i při $\log c$ se uplatňuje tabulková chyba. Dosadíme-li dané hodnoty, je $p \approx 53{,}05$ a strana c je určena s chybou co do absolutní hodnoty menší než $388 \cdot 10^{-k}$, tedy o něco větší než v případě a). Pak ovšem také chyby úhlů α, β vyjdou větší.

c) Lze však také položiti

$$\frac{p}{a + b} = \frac{2\sqrt{ab}\cos\frac{1}{2}\gamma}{a + b} = \sin\varphi,$$

$$c = (a + b)\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = (a + b)\cos\varphi.$$

Sekundární chyba výrazu pro $\log\sin\varphi$ je $2 \cdot 10^{-k}$, pak je φ určeno s chybou menší než $\frac{1}{\mu} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot \operatorname{tg}\varphi$. Horní hranice chyby čísla $\log\cos\varphi$ je $0{,}5 \cdot 10^{-k} + \mu \cdot \frac{1}{\mu} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot \operatorname{tg}^2\varphi$. Číslo $\log c$ má chybu co do absolutní hodnoty menší než $(1 + 2{,}5 \cdot \operatorname{tg}^2\varphi) \cdot 10^{-k}$ a konečně číslo c má chybu, jejíž horní hranice je $\frac{1}{\mu}(1{,}5 + 2{,}5 \cdot \operatorname{tg}^2\varphi)c \cdot 10^{-k}$. Dosadíme-li sem daná čísla, vyjde $\varphi \approx 49°5'$ a podle toho horní hranice chyby čísla c je $511 \cdot 10^{-k}$, tedy opět o něco vyšší.

d) Upravíme-li odmocninu na tvar

$$c^2 = (a - b)^2 + 2ab(1 - \cos\gamma) = (a - b)^2 + 4ab \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma$$

a položíme-li

$$\frac{2\sqrt{ab}\sin\frac{1}{2}\gamma}{|a-b|} = \mathrm{tg}\psi, \text{ vyjde } c = \frac{|a-b|}{\cos\psi}.$$

Pak je $\log\mathrm{tg}\psi$ určen s chybou menší než $2 \,.\, 10^{-k}$, odtud plyne pro ψ horní hranice chyby $2{,}5 \,.\, 10^{-k} \,.\, \sin 2\psi : 2\mu$ a pro $\log\cos\psi$ je chyba co do absolutní hodnoty menší než

$$0{,}5 \,.\, 10^{-k} + \mu \,.\, \frac{2{,}5 \,.\, 10^{-k}}{2\mu} \,.\, \sin 2\psi \,\mathrm{tg}\psi = (0{,}5 + 2{,}5 \,.\, \sin^2\psi) \,.\, 10^{-k},$$

takže $\log c$ má chybu co do absolutní hodnoty menší než

$$(1 + 2{,}5 \,.\, \sin^2\psi) \,.\, 10^{-k}.$$

Horní hranice chyby čísla c je tedy $\frac{1}{\mu}\,(1{,}5 + 2{,}5 \,.\, \sin^2\psi)\, c \,.\, 10^{-k}$. Dosadíme-li daná čísla, vyjde $\psi \approx 59°24'$ a chyba pro c je co do absolutní hodnoty menší než $355 \,.\, 10^{-k}$. Odtud jest viděti, že různým způsobem výpočtu dostaneme různou sekundární chybu.

Při logaritmování součinu (nebo podílu) n čísel je tabulková chyba nejvýše rovna $(n + 1)\tau$, kde τ je horní hranice tabulkové chyby každého logaritmu. Poměrná chyba výsledku pak nedosáhne $\frac{1}{\mu}(n + 1)\tau$. Předpokládáme-li, že všechna čísla, s nimiž provádíme výpočet, mají (aspoň přibližně) touž poměrnou primární chybu ϱ, je poměrná chyba výsledku $n\varrho$. Nechceme-li, aby sekundární chyba výsledku byla větší než pětina chyby primární, t. j. má-li být

$$\frac{1}{\mu}\,(n + 1)\tau \leqq 0{,}2 \,.\, n\varrho, \text{ musí } \tau \leqq 0{,}2 \,.\, \mu \,.\, \frac{n}{n+1} \,.\, \varrho < 0{,}1\varrho.$$

To značí, že k výpočtu třeba volit takovou tabulku, aby tabulková chyba byla menší než desetina průměrné poměrné chyby čísel, s nimiž provádíme výpočet. Ježto čísla, k nimž vede praktické měření prováděné obyčejnými prostředky, jsou zatížena poměrnou chybou tak asi 10^{-3} (viz odst. 2), plyne odtud, že k výpočtům s takovými čísly plně stačí tabulka čtyrmístných logaritmů. Při trigonometrických výpočtech je však třeba, abychom se pokud možno vyhýbali určení úhlů (zejména blízkých k pravému) pomocí sinu a určení úhlů (zejména hodně ostrých) pomocí kosinu.

Cvičení. **57.** Jsou-li dány odvěsny a, b pravoúhlého trojúhelníka, lze počítati přeponu c buď podle věty Pythagorovy nebo trigonometricky s pomocí některého úhlu trojúhelníka. Který výpočet poskytuje při logaritmickém počítání menší sekundární chybu? — [Prvý, totiž $c \,.\, 1{,}5 \,.\, 10^{-k} : \mu$, při druhém vyjde $(1 + \cos^2\alpha)\, c \,.\, 1{,}5 \,.\, 10^{-k} : \mu$, resp. $(1 + \cos^2\beta)\, c \,.\, 1{,}5 \,.\, 10^{-k} : \mu$.]

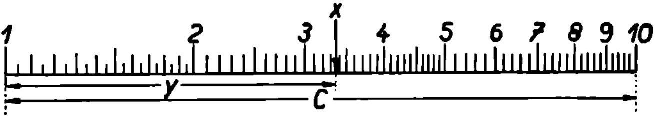
58. Úhel φ je dán vztahem $\sin\varphi = a : b$. Odtud lze určiti φ buď přímo nebo tak, že píšeme $\operatorname{tg}\varphi = a : \sqrt{(b + a)(b - a)}$. Porovnejte sekundární chyby, které vzniknou, určujeme-li φ logaritmicky! — [$a \,.\, 1{,}5 \,.\, 10^{-k} : \mu\sqrt{b^2 - a^2}$, $a\sqrt{b^2 - a^2} \,.\, 1{,}5 \,.\, 10^{-k} : \mu b^2$; druhý způsob je přesnější.]

24. Logaritmické pravítko. Při odhadech horních hranic chyb se vyskytuje řada výpočtů, při nichž stačí zjistit jen několik málo prvních číslic. K rychlému stanovení těchto číslic užíváme s výhodou logaritmického pravítka, jak již dříve bylo podotčeno. Budu předpokládati, že čtenář zná zásady, podle nichž se na logaritmickém pravítku počítá. V tomto odstavci se budeme zabývati pouze otázkou, s jakou přesností lze na logaritmickém pravítku provádět výpočty.

Na logaritmickém pravítku jsou naneseny *logaritmické stupnice*, t. j. stupnice, které znázorňují funkci $y = C \log x$, kde C je vhodná konstanta. Část logaritmické stupnice je zobrazena na obr. 10. Bod logaritmické stupnice, označený číslem x, dostaneme, naneseme-li od počátku úsečku délky y, jež vyhovuje vztahu $y = C \log x$. Ježto $\log 1 = 0$, je počátek stupnice označen číslem 1; ježto dále $\log 10 = 1$, je číslem 10 označen ten bod stupnice, jehož vzdálenost od počátku je C. Vedle toho platí $\log 10^n \,.\, x = n + \log x$, a proto se logaritmická stupnice skládá z úseků o délce C, které vesměs jsou shodné, a každý z nich znázorňuje čísla z intervalu $[10^n$,

10^{n+1}]. Úsek logaritmické stupnice znázorněný na obr. 10 představuje čísla z intervalu [1, 10].

Logaritmické pravítko obsahuje zpravidla dvě základní stupnice, jednu, která je na horní části pravítka, stručně nazveme horní, druhou, která je na dolní části pravítka, nazveme dolní. Obě mají touž délku, zpravidla 250 mm. Horní stupnice obsahuje úsek od 1 do 100; konstantu této stupnice označme C_1, je tedy $250 = C_1 \log 100$, takže $C_1 = 125$. Dolní stupnice obsahuje úsek od 1 do 10 při téže



Obr. 10.

celkové délce; konstantu této stupnice označme C_2, proto $250 = C_2 \log 10$, takže $C_2 = 250$. Stupnice některých kapesních pravítek mívají délku menší, na př. poloviční, pak jsou hodnoty těchto konstant také poloviční.

Předpokládejme, že lze bez optických prostředků pouhým okem odlišiti od sebe dva body, jejichž vzdálenost je 0,1 mm, t. j. že lze délku y určiti s chybou, jejíž horní hranice je menší než 0,1 mm. Ptáme se, jakou částí délky C je tato horní hranice chyby. U stupnice horní je to zlomek $\frac{0,1}{C_1} = 0,8 \cdot 10^{-3}$ a u stupnice dolní $\frac{0,1}{C_2} = 0,4 \cdot 10^{-3}$. Délka C představuje vzrůst logaritmu o jednotku, takže přesnost dolní stupnice odpovídá zhruba přesnosti trojmístných logaritmů, přesnost horní stupnice je poloviční. Toto číslo, $0,8 \cdot 10^{-3}$, resp. $0,4 \cdot 10^{-3}$, je to, co se v logaritmických tabulkách označuje názvem tabulková chyba; u trojmístných logaritmů je, jak víme, menší než $0,5 \cdot 10^{-3}$.

Považujeme-li y za střední aproximaci přesné hodnoty Y, je $|Y - y| \leqq \eta$, kde $\eta < 0{,}1$. Odpovídá-li délce Y číslo X a délce y číslo x, je $|Y - y| = |C \log X - C \log x|$. Avšak podle odst. **15** je

$$|C \log X - C \log x| < \frac{C\mu\xi}{x - \xi},$$

kde ξ je horní hranice prosté chyby čísla X. Je-li dáno η a volíme-li ξ tak, aby bylo

$$\frac{C\mu\xi}{x - \xi} \leqq \eta,$$

bude také $|Y - y| < \eta$. To ale znamená, že ξ vyhovuje nerovnosti

$$\frac{\xi}{x} \leqq \frac{\eta}{C\mu + \eta} < \frac{\eta}{C\mu}.$$

Dovedeme-li tedy délku Y určiti s chybou, jejíž horní hranice $\eta < 0{,}1$ mm, můžeme na stupnici určiti číslo X tak, že horní hranice jeho poměrné chyby vzhledem ke střední aproximaci $\frac{\xi}{x}$ vyhovuje napsané nerovnosti. Dosadíme-li za C, μ, η naše hodnoty, shledáme, že tato horní hranice poměrné chyby je u horní stupnice $1{,}84 \cdot 10^{-3}$ a u dolní stupnice $0{,}92 \cdot 10^{-3}$, čili zhruba $2^0/_{00}$ u stupnice horní a $1^0/_{00}$ u stupnice dolní.

Odhadujeme-li části dílků nanesených na stupnici, dělíme je (od oka) na stejné části. Ježto dílky logaritmické stupnice nejsou stejně velké, je otázka, do jaké míry je to oprávněno. Dělíme-li dílky stupnice na stejné části, provádíme vlastně lineární interpolaci a vyslovíme pro ni požadavek, aby zbytek interpolace nedosáhl desetinu z 0,1 mm, t. j. z délky, kterou ještě dovedeme rozlišit. Ježto jde o funkci $y = C \log x$, je podle odst. 22 zbytek interpolace

$$|z(a + \Theta h)| < \frac{C\mu h^2}{8a^2}.$$

Našemu požadavku vyhovíme, bude-li

$$\frac{C\mu h^2}{8a^2} \leqq 0{,}01, \text{ t. j. } h \leqq a\sqrt{\frac{0{,}08}{C\mu}},$$

čili $h \leqq 0{,}038 \,.\, a$ u stupnice horní a $h \leqq 0{,}027 \,.\, a$ u stupnice dolní. To značí, že na logaritmické stupnici musí býti naneseny tak velké dílky, aby jejich délka h, jež odpovídá kroku tabulky, vyhovovala odvozeným nerovnostem. Zpravidla bývá voleno na horní stupnici

$$\begin{array}{llll} h = 0{,}02 \text{ pro } 1 \leqq a \leqq 2, & & h = 0{,}2 \text{ pro } 10 \leqq a \leqq 20, \\ h = 0{,}05 \text{ pro } 2 \leqq a \leqq 5, & & h = 0{,}5 \text{ pro } 20 \leqq a \leqq 50, \\ h = 0{,}1 \text{ pro } 5 \leqq a \leqq 10, & & h = 1 \text{ pro } 50 \leqq a \leqq 100 \end{array}$$

a na dolní stupnici

$$\begin{aligned} h &= 0{,}01 \text{ pro } 1 \leqq a \leqq 2, \\ h &= 0{,}02 \text{ pro } 2 \leqq a \leqq 4, \\ h &= 0{,}05 \text{ pro } 4 \leqq a \leqq 10. \end{aligned}$$

Tyto hodnoty nalezeným nerovnostem vyhovují, takže na logaritmickém pravítku lze lineárně interpolovat bez nesnází.

Každé logaritmické pravítko obsahuje také chyby spočívající v nesprávném umístění dělicích čárek. Můžeme však od dobrého pravítka očekávati, že tyto chyby jsou proti chybám vznikajícím nepřesným čtením čísel tak nepatrné, že jejich vliv lze zanedbat.

Cvičení. **59.** Hodnotu zlomku, jehož čitatelem je součin m činitelů a jmenovatelem součin n činitelů, počítáme na logaritmické pravítku tak, že dělení a násobení provádíme střídavě (pokud to lze). Při tomto postupu poměrná chyba výsledku nepřesáhne a) $2(m + p)\,\tau$, je-li $m > n$, b) $(2n + 1 + 2p)\,\tau$, je-li $m \leqq n$, c) $2(n + p)\,\tau$, je-li čitatel roven 1, kde $\tau = 0{,}4 \,.\, 10^{-3} : \mu$, počítáme-li na stupnici dolní, a $\tau = 0{,}8 \,.\, 10^{-3} : \mu$, počítáme-li na stupnici horní, a p udává, kolikrát bylo třeba při výpočtu posunouti šoupátko o celou jeho délku zleva napravo nebo naopak. Dokažte!

60. Hodnotu výrazu $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ (kde $a < b$) určujeme takto: Na dolní pevné stupnici nastavíme číslo $b : a$ (a na dolní pohyblivé stupnici nastavíme proti 1 na dolní pevné, proti b na dolní pohyblivé leží $b : a$ na pevné), k němu vyčteme na horní pevné stupnici číslo $b^2 : a^2$, vyčtené číslo zvětšíme o 1 a takto vzniklé číslo nastavíme na horní pevné stupnici; proti němu čteme na dolní pohyblivé stupnici výsledek. Stanovte horní hranici poměrná chyby při tomto postupu! — [$5\tau c$, kde $\tau = 0{,}4 \,.\, 10^{-3} : \mu$.]