Počítání s neúplnými čísly

IV. Obecná methoda k výpočtu horní hranice chyby

In: Karel Hruša (author): Počítání s neúplnými čísly. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1949. pp. 52–76.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403250

IV. OBECNÁ METHODA K VÝPOČTU HORNÍ HRANICE CHYBY

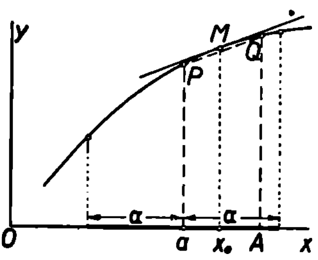
14. Funkce jedné proměnné. V této kapitole budeme potřebovat několik vět z diferenciálního počtu. Uvedeme je většinou bez důkazu s odkazy, kde lze přesný důkaz nalézti.

Je-li dána funkce $y = f(x)$ jedné proměnné x a dosadíme-li sem za x neúplné číslo $A = a \pm \alpha$, bude také hodnota této funkce neúplným číslem. Chceme nalézti horní hranici chyby tohoto neúplného čísla.

Omezíme se jen na takové funkce $f(x)$, jež jsou spojité a mají derivaci $f'(x)$ v celém intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$, určeném dolní a horní aproximací čísla A, i na jeho hranicích. Všechny funkce, s nimiž se v praxi setkáváme, tomuto předpokladu vyhovují.

Pro jednoduchost budeme ještě předpokládati, že třeba $a < A$. Ježto interval $[a, A]$ je celý obsažen v intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$, funkce $f(x)$ je spojitá a má derivaci i ve všech bodech intervalu $[a, A]$. Pak pro tuto funkci platí *věta o střední hodnotě*, známá z diferenciálního počtu.*) Podle této věty existuje aspoň jedno číslo x_0, pro něž $a < x_0 < A$, které má tu vlastnost, že

$$f(A) - f(a) = (A - a)f'(x_0).$$



Obr. 2.

Znázorníme-li si průběh funkce $y = f(x)$ geometricky v pravoúhlé soustavě souřadnic x, y křivkou (viz obr. 2), na níž argumentu a odpovídá bod P a argumentu A bod Q, neznamená věta o střední hodnotě nic jiného, než to, že na křivce existuje mezi body P, Q aspoň jeden bod M té vlastnosti, že tečna v něm je rovnoběžná s tětivou PQ.

*) Její důkaz je v každé učebnici diferenciálního počtu. Viz na př. Čech str. 110, věta II.

Hodnotě argumentu A odpovídá hodnota funkce $f(A)$ a hodnotě argumentu a odpovídá hodnota funkce $f(a)$. Jestliže místo přesné hodnoty argumentu A dosadíme střední aproximaci a a považujeme-li $f(a)$ za střední aproximaci hodnoty $f(A)$, dostaneme hodnotu funkce s chybou $f(A) - f(a)$, jež je podle předcházejícího rovna výrazu $(A-a)f'(x_0)$, kde x_0 je vhodně volené číslo z intervalu $[a, A]$. Kdybychom předpokládali, že $a > A$, nic by se na naší úvaze nezměnilo, až na to, že by se na obr. 2 body P, Q navzájem vyměnily.

Nám jde o absolutní hodnotu nalezené chyby. Pro ni platí

$$|f(A) - f(a)| = |A - a| \,.\, |f'(x_0)|.$$

První činitel na pravé straně je $|A - a| \leqq \alpha$. Probíhá-li x různé hodnoty z intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$, nabývá výraz $|f'(x)|$ určitých hodnot a pro jakési x_0' z tohoto intervalu se stává největším, takže platí $|f'(x)| \leqq |f'(x_0')|$ pro všecka x z intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$, a tedy také pro x_0 je $|f'(x_0)| \leqq |f'(x_0')|$. Dosadíme-li do pravé strany α místo $|A - a|$ a $|f'(x_0')|$ místo $|f'(x_0)|$, nezmenší se tím pravá strana, takže

$$|f(A) - f(a)| \leqq \alpha |f'(x_0')|.$$

Tento výraz lze považovati za horní hranici chyby, s níž byla aproximována hodnota $f(A)$. Rovnost by mohla nastati, kdyby A padlo právě na hranici intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$ a kdyby zároveň $|f'(x_0)|$ bylo maximem, jehož $|f'(x)|$ nabude v $[a - \alpha, a + \alpha]$. To však je možná, jen když $f(x)$ má tvar $kx + q$, kde k, q jsou konstanty.

Ježto $|f'(x)|$ se stoupajícím x zpravidla v celém intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$ buď stoupá nebo klesá, bývá buď $x_0' = a + \alpha$, je-li absolutní hodnota derivace $|f'(x)|$ funkcí stoupající, nebo $x_0' = a - \alpha$, je-li absolutní hodnota derivace $|f'(x)|$ funkcí klesající. Je-li však dále interval $[a - \alpha, a + \alpha]$ dosti úzký a počítáme-li v praxi horní hranici chyby ze zaokrouhlených hodnot, lze za horní hranici prosté chyby považovati s dostatečnou přesností výraz

$$\alpha |f'(a)|.$$

Příklad. Vyšetříme podle toho horní hranici prosté chyby funkce

$$f(x) = x^r,\ r \neq 1,$$

kde r je libovolné číslo. Pro tuto funkci je $f'(x) = rx^{r-1}$. Předpokládáme-li, že $x > 0$, pak je také $x^{r-1} > 0$ a absolutní hodnota derivace je $|f'(x)| = |r| \,.\, x^{r-1}$. Aproximujeme-li přesnou hodnotu A^r střední aproximací a^r, je podle předcházejícího výkladu absolutní hodnota prosté chyby

$$|A^r - a^r| < \alpha |r| \,.\, x_0'^{r-1},$$

kde x_0' je ta hodnota z intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$, pro niž je x^{r-1} co největší. Třeba rozeznávati dva případy:

a) Je-li $r > 1$, je $r - 1 > 0$ a x^{r-1} je funkce stoupající, takže položíme $x_0' = a + \alpha$. Pak je

$$|A^r - a^r| < \alpha r (a + \alpha)^{r-1}$$

v souhlase s tím, co bylo odvozeno jinou cestou na konci odst. 6 pro $r = n > 1$ celé. Poměrná chyba vzhledem k horní aproximaci je pak co do absolutní hodnoty menší než

$$r \,.\, \frac{\alpha}{a + \alpha}.$$

b) Je-li $r < 1$, je $r - 1 < 0$ a x^{r-1} je funkce klesající; proto položíme $x_0' = a - \alpha$. Pak je

$$|A^r - a^r| < \alpha |r| (a - \alpha)^{r-1}$$

opět v souhlase s tím, co bylo odvozeno pro $r = -n$, kde n je celé kladné, na konci odst. 7 a pro $r = 1 : n$, n celé kladné, v odst. 8. Z nalezeného výrazu plyne

$$\frac{|A^r - a^r|}{(a - \alpha)^r} < |r| \,.\, \frac{\alpha}{a - \alpha},$$

což je pro $r > 0$ výraz pro odhad poměrné chyby vzhledem k dolní aproximaci a pro $r < 0$ odhad poměrné chyby vzhledem k horní aproximaci.

Cvičení. **30.** Stanovte horní hranici prosté chyby funkcí a) $\dfrac{1-x}{1+x}$ pro $x > 0$; b) $\dfrac{1+x}{1-x}$ pro $x > 0$, $x \neq 1$; c) $\sqrt{1+x^2}$ pro $x > 0$; d) $\sqrt{1-x^2}$ pro $0 < x < 1$; e) $\sqrt{x^2-1}$ pro $x > 1$, dosadíme-li za x neúplné číslo $A = a \pm \alpha$. — $\Bigl[$a) $\dfrac{2\alpha}{(1+a-\alpha)^2}$; b) $\dfrac{2\alpha}{(1-a-\alpha)^2}$ pro $a+\alpha < 1$, $\dfrac{2\alpha}{(1-a+\alpha)^2}$ pro $a-\alpha > 1$; c) $\dfrac{\alpha(a+\alpha)}{\sqrt{1+(a+\alpha)^2}}$; d) $\dfrac{\alpha(a+\alpha)}{\sqrt{1-(a+\alpha)^2}}$; e) $\dfrac{\alpha(a-\alpha)}{\sqrt{(a-\alpha)^2-1}}$.$\Bigr]$

15. Logaritmus. Jestliže $y = \lg x$,*) je $y' = \dfrac{1}{x}$ funkce klesající pro $x > 0$, takže

$$|\lg A - \lg a| < \frac{\alpha}{a-\alpha},$$

t. j. horní hranice prosté chyby přirozeného logaritmu je menší než horní hranice poměrné chyby logaritmovaného čísla vzhledem k jeho dolní aproximaci.

Jde-li o dekadický logaritmus $y = \log x$, je $y' = \dfrac{\mu}{x}$, kde $\mu \doteq 0{,}434$ je t. zv. modul dekadických logaritmů. Pak ovšem

$$|\log A - \log a| < \frac{\alpha\mu}{a-\alpha}. \qquad (1)$$

O horní hranici prosté chyby logaritmu tedy rozhoduje horní hranice poměrné chyby logaritmovaného čísla vzhledem k dolní aproximaci, kterou lze však s dostatečnou přesností nahraditi horní hranicí poměrné chyby vzhledem ke střední aproximaci.

Hledáme-li obráceně k danému logaritmu x číslo y, běží u přirozených logaritmů o funkci $y = e^x$, neboť z té plyne

*) Přirozené logaritmy (t. j. logaritmy o základu $e \doteq 2{,}71828$) označujeme symbolem $\lg x$; dekadické logaritmy (o základu 10) označujeme $\log x$. Mezi oběma platí $\log x = \mu \lg x$, kde $\mu \doteq 0{,}434$. Pro $x = e$ plyne odtud $\mu = \log e$ a pro $x = 10$ je $\mu = 1 : \lg 10$ (Čech str. 85).

$x = \lg y$. Pak je $y' = e^x$, což je funkce stoupající, a proto

$$|e^A - e^a| < \alpha e^{a+\alpha}, \text{ čili } \frac{|e^A - e^a|}{e^{a+\alpha}} < \alpha.$$

To znamená, že horní hranice poměrné chyby logaritmovaného čísla vzhledem k jeho horní aproximaci je menší než horní hranice prosté chyby jeho přirozeného logaritmu.

Jde-li o dekadický logaritmus, jde o funkci $y = 10^x = e^{x \lg 10} = e^{\frac{x}{\mu}}$, takže $y' = \frac{1}{\mu} e^{\frac{x}{\mu}} = \frac{1}{\mu} 10^x$. Pak je

$$|10^A - 10^a| < \frac{\alpha}{\mu} 10^{a+\alpha}, \text{ čili } \frac{|10^A - 10^a|}{10^{a+\alpha}} < \frac{\alpha}{\mu}. \qquad (2)$$

O horní hranici poměrné chyby logaritmovaného čísla vzhledem k jeho horní aproximaci, kterou ovšem lze s dostatečnou přesností nahraditi horní hranicí poměrné chyby vzhledem ke střední aproximaci, *rozhoduje horní hranice prosté chyby logaritmu.*

Vyšetříme nyní horní hranici chyby součinu nebo podílu dvou čísel A, B počítaného logaritmicky. Podle toho, co bylo právě uvedeno, je

$$|\log AB - \log ab| = |(\log A + \log B) - (\log a + \log b)| \leqq$$
$$\leqq |\log A - \log a| + |\log B - \log b| < \frac{\mu \alpha}{a - \alpha} + \frac{\mu \beta}{b - \beta},$$

$$\left|\log \frac{A}{B} - \log \frac{a}{b}\right| = |(\log A - \log B) - (\log a - \log b)| \leqq$$

$$\leqq |\log A - \log a| + |\log B - \log b| < \frac{\mu \alpha}{a - \alpha} + \frac{\mu \beta}{b - \beta}.$$

Výrazy na pravých stranách jsou větší, než je horní hranice prosté chyby logaritmů součinu a podílu. Těmto logaritmům odpovídají čísla, jejichž horní hranice poměrné chyby vzhledem k horní aproximaci jsou μ-kráte menší než horní hranice prostých chyb jejich logaritmů. Je tedy v obou případech horní hranice poměrné chyby vzhledem k horní aproximaci menší než

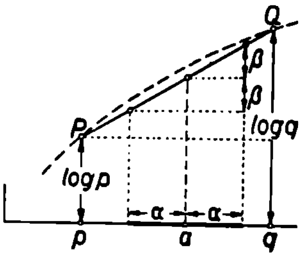
$$\frac{\alpha}{a-\alpha}+\frac{\beta}{b-\beta}.$$

Počítáme-li součin nebo podíl dvou čísel logaritmicky, je horní hranice poměrné chyby výsledku vzhledem k jeho horní aproximaci menší než součet horních hranic poměrných chyb obou daných čísel vzhledem k jejich dolní aproximaci. Platnost této věty lze bez obtíží rozšířiti na součin nebo podíl většího počtu čísel.

Porovnáme-li tento výsledek s výsledkem úvah v odst. **6** a **7**, lze říci, že logaritmickým počítáním je nepřesnost výsledku dotčena jen velmi nepatrně, takže v praxi lze takto vzniklý rozdíl bez obavy zanedbati, pokud ovšem užíváme k výpočtům dostatečně přesných logaritmů. Užití tabulek ne dosti přesných může míti značný vliv na přesnost výsledku, jak uvidíme ještě v dalších odstavcích.

Při výpočtech v praxi zpravidla neužíváme výše odvozených vzorců pro výpočet chyby. Pokud se pohybujeme v dosti úzkém rozmezí, můžeme předpokládati, že přírůstek logaritmů je velmi přibližně úměrný přírůstku argumentu. Do jaké míry je tento přepoklad splněn, vyšetříme podrobněji v odst. **22**.

Nalezneme-li dvě čísla p, q taková, aby $p \leqq a-\alpha < a+\alpha \leqq q$ a aby jejich rozdíl $q-p$ byl dosti malý, a známe-li hodnoty $\log p$, $\log q$, lze v obr. 3 oblouk logaritmické křivky $y=\log x$ mezi body P, Q, jež odpovídají hodnotám $\log p$, $\log q$, s dostatečnou přesností nahraditi úsečkou.



Obr. 3.

Označíme-li horní hranici prosté chyby logaritmu čísla A písmenem β, platí podle věty o podobných trojúhelnících

$\beta : \alpha = (\log q - \log p) : (q - p)$, takže $\beta = \alpha \cdot \dfrac{\log q - \log p}{q - p}$.

Rozdíl $\log q - \log p$ lze vyčísti z tabulky (je-li $q = p + 1$, je to t. zv. *tabulková diference*) a odtud snadno vypočteme β.

Příklad 1. Hledáme $\log(45{,}37 \pm 0{,}005)$ třebas v pětimístné tabulce; nalezneme $\log 45{,}37 \doteq 1{,}65677$; zvětší-li se argument z 45,36 na 45,38 (mezi těmito čísly jsou všecka čísla intervalu $[45{,}37 - 0{,}005,\ 45{,}37 + 0{,}005]$), t. j. o 0,02, zvětší se logaritmus o 19 jednotek posledního desetinného místa. Horní hranici chyby 0,005 odpovídá tedy přírůstek $0{,}005 \cdot \dfrac{19}{0{,}02} \doteq 5$ jednotek posledního místa. Je tedy $\log(45{,}37 \pm 0{,}005) = 1{,}65677 \pm 5 \cdot 10^{-5}$. Podle vzorce (1) uvedeného na počátku tohoto odstavce dostáváme pro horní hranici chyby tohoto logaritmu hodnotu $\dfrac{0{,}434 \cdot 0{,}005}{45{,}4} \doteq 5 \cdot 10^{-5}$ jako předtím.

Příklad 2. Je-li $\log A = 2{,}51374 \pm 25 \cdot 10^{-5}$, je $a \doteq 326{,}4$; číslům 326,2 a 326,6, jejichž rozdíl je 0,4 a mezi nimiž očekáváme hledané číslo, odpovídají logaritmy 2,51348 a 2,51402, jejichž rozdíl je 54 jednotek posledního desetinného místa. Horní hranici prosté chyby logaritmu, jež je rovna 25 jednotkám posledního desetinného místa, odpovídá přírůstek čísla o $25 \cdot \dfrac{0{,}4}{54} \doteq 0{,}2$, takže $A = 326{,}4 \pm 0{,}2$. Podle vzorce (2) dostáváme horní hranici prosté chyby čísla A ve tvaru $\dfrac{25 \cdot 10^{-5}}{0{,}434} \cdot 326{,}4 \doteq 0{,}2$, což je opět v souhlasu s předcházejícím odhadem.*)

Poznámka. K rychlým výpočtům tohoto druhu lze s výho-

*) V těchto příkladech jsme nebrali zřetel na to, že logaritmy uvedené v tabulkách jsou čísla zaokrouhlená. To vyšetříme podrobně v odst. **20**.

dou užívati logaritmického pravítka, jehož přesnost je zcela postačující.

Cvičení. **31.** Horní hranici prosté chyby dekadického logaritmu lze nahraditi méně přesným výrazem $\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{a}$, pokud horní hranice poměrné chyby logaritmovaného čísla vzhledem k jeho střední aproximaci není větší než 0,13. Dokažte!

32. Horní hranici poměrné chyby logaritmovaného čísla vzhledem k jeho střední aproximaci lze nahraditi číslem $2{,}5 \cdot \alpha$, pokud horní hranice prosté chyby dekadického logaritmu není větší než 0,035. Dokažte!

33. a) Je-li logaritmované číslo zaokrouhleno na n cifer (kde $n \geqq 2$), je horní hranice prosté chyby jeho dekadického logaritmu menší než čtvrtina $(n - 1)$ho desetinného místa. b) Je-li dekadický logaritmus zaokrouhlen na n desetinných míst (kde $n \geqq 2$), je horní hranice prosté chyby logaritmovaného čísla menší než osmina jednotky stojící na $n - 1$ místě (počítáno zleva). Dokažte!

34. Jestliže počítáme součin nebo podíl dvou čísel logaritmicky s použitím dekadických logaritmů, zvětší se horní hranice jeho prosté chyby méně než v poměru 5 : 4 proti horní hranici prosté chyby, která by mohla vzniknouti, počítáme-li přímo bez použití logaritmů. Dokažte! — [Užijte výsledků cvičení **31** a **32**.]

16. Funkce goniometrické a cyklometrické. Při vyšetřování funkcí goniometrických a cyklometrických, jež budeme provádět v tomto odstavci, omezíme se na úhly z intervalu $[0, \frac{1}{2}\pi]$.*)

Je-li $y = \sin x$, je $y' = \cos x$, což je pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ funkce klesající. Proto podle odst. **14** pro horní hranici prosté chyby sinu úhlu $A \doteq a \pm \alpha$ platí

$$|\sin A - \sin a| < \alpha \cos(a - \alpha).$$

Dělíme-li obě strany této nerovnosti číslem $\sin(a - \alpha)$, což je nejmenší hodnota, jíž dosáhne $\sin x$ v intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$, dostaneme, že horní hranice poměrné chyby sinu úhlu vzhledem k jeho dolní aproximaci je

*) Úhly měříme v t. zv. *míře obloukové*, v níž je pravý úhel vyjádřen číslem $\frac{1}{2}\pi$, přímý úhel číslem π a plný úhel číslem 2π. Jednotkou je úhel zvaný *radián*, jehož velikost v míře stupňové je $57°17'45''$.

$$\frac{|\sin A - \sin a|}{\sin(a - \alpha)} < \alpha \operatorname{cotg}(a - \alpha).$$

Je-li α stálé, pak $\cos(a - \alpha)$ a rovněž tak i $\operatorname{cotg}(a - \alpha)$ se stoupajícím úhlem a klesá, proto *táž chyba, se kterou je naměřena velikost úhlu, má tím větší vliv na chybu jeho sinu, čím je měřený úhel menší.*

Jde-li o funkci $y = \cos x$, je $y' = -\sin x$ a funkce $|y'| = = \sin x$ je pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ funkce stoupající, takže pro horní hranici prosté chyby kosinu úhlu $A = a \pm \alpha$ platí

$$|\cos A - \cos a| < \alpha \sin(a + \alpha).$$

Ježto $\cos(a + \alpha)$ je nejmenší hodnota, jíž může dosáhnouti $\cos x$ v intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$, je horní hranice poměrné chyby kosinu úhlu vzhledem k jeho dolní aproximaci vázána nerovností

$$\frac{|\cos A - \cos a|}{\cos(a + \alpha)} < \alpha \operatorname{tg}(a + \alpha).$$

Ježto $\sin(a + \alpha)$ a rovněž tak i $\operatorname{tg}(a + \alpha)$ se stoupajícím a stoupá, *táž chyba, se kterou je určen úhel, má tím větší vliv na jeho kosinus, čím větší je měřený úhel.*

Obdobně pro $y = \operatorname{tg} x$ je $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$, což je funkce stoupající, pokud $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, proto je pro $A = a \pm \alpha$ horní hranice prosté chyby

$$|\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} a| < \frac{\alpha}{\cos^2(a + \alpha)}$$

a horní hranice poměrné chyby vzhledem k horní aproximaci

$$\frac{|\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} a|}{\operatorname{tg}(a + \alpha)} < \frac{\alpha}{\cos^2(a + \alpha) \operatorname{tg}(a + \alpha)} = \frac{2\alpha}{\sin 2(a + \alpha)}.$$

Zcela stejně pro $y = \operatorname{cotg} x$ je $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $|y'| = \frac{1}{\sin^2 x}$, což je funkce klesající, takže horní hranice prosté chyby je

$$|\mathrm{cotg}A - \mathrm{cotg}a| < \frac{\alpha}{\sin^2(a-\alpha)}$$

a horní hranice poměrné chyby vzhledem k horní aproximaci

$$\frac{|\mathrm{cotg}A - \mathrm{cotg}a|}{\mathrm{cotg}(a-\alpha)} < \frac{\alpha}{\sin^2(a-\alpha)\,\mathrm{cotg}(a-\alpha)} = \frac{2\alpha}{\sin 2(a-\alpha)},$$

neboť $\mathrm{cotg}(a-\alpha)$ je největší hodnota z intervalu $[a-\alpha, a+\alpha]$.

Odtud je viděti, že *horní hranice prosté chyby tangenty úhlu je tím větší, čím je úhel větší; u kotangenty je tomu obráceně.* Proto stanovíme sinus a tangentu přesněji u úhlů malých, naproti tomu kosinus a kotangentu stanovíme přesněji u úhlů blízkých úhlu pravému. Ježto vždy $\sin x \leqq 1$, $\cos x \leqq 1$, plyne odtud, že horní hranice prosté chyby u sinu nebo kosinu je vždy menší než horní hranice prosté chyby tangenty a kotangenty. Proto *k výpočtu různých veličin s pomocí goniometrických funkcí užíváme raději sinu nebo kosinu než tangenty nebo kotangenty,* a to sinu tehdy, jde-li o úhly malé, kdežto kosinu tehdy, jde-li o úhly blízké úhlu pravému.

Ježto v praxi vždy čísla zaokrouhlujeme, je poměrná chyba tangenty prakticky táž jako poměrná chyba kotangenty. Odvozených formulí se ovšem užívá jen k úvahám theoretického rázu, při praktickém počítání se horní hranice chyb určují podle diferencí funkčních hodnot v tabulkách uvedených obdobně, jako to bylo vyloženo v odst. **15** při stanovení horní hranice chyby logaritmu.

Hledáme-li obráceně k dané goniometrické funkci úhel, jde o funkce

$$y = \arcsin x,\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{takže}\qquad |\arcsin A - \arcsin a| < \frac{\alpha}{\sqrt{1-(a+\alpha)^2}};$$

$$y = \arccos x, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{takže} \quad |\arccos A - \arccos a| < \frac{\alpha}{\sqrt{1-(a+\alpha)^2}};$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{takže} \quad |\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} a| < \frac{\alpha}{1+(a-\alpha)^2};$$

$$y = \operatorname{arccotg} x, y' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{takže} \quad |\operatorname{arccotg} A - \operatorname{arccotg} a| < \frac{\alpha}{1+(a-\alpha)^2}.$$

Jde-li tedy o úhel $B = b \pm \beta$, pro který platí $B = \arcsin A$, čili $A = \sin B$, horní hranice jeho prosté chyby je podle prvního vzorce

$$|B - b| < \frac{\alpha}{\cos(b+\beta)}.$$

Je-li úhel B určen kosinem, t. j. je-li $B = \arccos A$, čili $A = \cos B$, je

$$|B - b| < \frac{\alpha}{\sin(b-\beta)},$$

neboť hodnotě $a + \alpha$ odpovídá $\cos(b - \beta)$, ježto $\arccos x$ se stoupajícím x klesá. Je-li úhel B určen tangentou, t. j. je-li $B = \operatorname{arctg} A$, čili $A = \operatorname{tg} B$, je horní hranice jeho prosté chyby

$$|B - b| < \alpha \cos^2(b - \beta).$$

Konečně je-li B určeno kotangentou, t. j. je-li $B = \operatorname{arccotg} A$, $A = \operatorname{cotg} B$, je

$$|B - b| < \alpha \sin^2(b + \beta),$$

ježto $\operatorname{arccotg} x$ se stoupajícím x klesá. Ježto pak vždy $\sin x \leq 1$, $\cos x \leq 1$, je výraz pro horní hranici chyby úhlu B menší u tangenty a kotangenty než u sinu a kosinu, pokud hodnoty těchto funkcí jsou určeny s touž horní hranicí prosté chyby α. Proto *úhel dostaneme přesněji, počítáme-li jej s pomocí tangenty nebo kotangenty, než počítáme-li jej s pomocí sinu nebo kosinu.*

Cvičení. **35.** Dokažte správnost vět: a) Je-li úhel určen s chybou, která je menší než 10″, je jeho sinus nebo kosinus určen s chybou, jež je menší než 0,5 jednotky čtvrtého desetinného místa. b) Je-li tangenta nebo kotangenta úhlu dána s chybou, která je menší než 0,5 jednotky čtvrtého desetinného místa, je úhel určen s chybou, jež je zpravidla menší než 10″.

36. Vyšetřte prostou chybu funkcí a) $y = \log \sin x$, b) $y = \log \cos x$, c) $y = \log \operatorname{tg} x$, d) $\log \operatorname{cotg} x$, která vznikne, dosadíme-li za x neúplné číslo $A = a \pm \alpha$.

[a) $\alpha\mu \operatorname{cotg}(a - \alpha)$, b) $\alpha\mu \operatorname{tg}(a + \alpha)$, c), d) $\dfrac{2\alpha\mu}{\sin 2(a - \alpha)}$ pro $a < \frac{1}{4}\pi$,

$$\frac{2\alpha\mu}{\sin 2(a + \alpha)} \text{ pro } a > \tfrac{1}{4}\pi.]$$

37. Vyšetřete prostou chybu funkcí inversních k funkcím uvedeným v předcházejícím cvičení. — [Jsou-li logaritmy goniometrických funkcí dány s chybou α a odpovídá-li jim úhel $B = b \pm \beta$, je horní hranice chyby tohoto úhlu menší než a) $\dfrac{\alpha}{\mu} \operatorname{tg}(b + \beta)$, b) $\dfrac{\alpha}{\mu} \operatorname{cotg}(b - \beta)$, c), d) $\dfrac{\alpha}{2\mu} \sin 2(b + \beta)$ pro $b < \frac{1}{4}\pi$ a $\dfrac{\alpha}{2\mu} \sin 2(b - \beta)$ pro $b > \frac{1}{4}\pi$.]

38. Je-li logaritmus tangenty nebo kotangenty dán s chybou, která je menší než 0,5 jednotky čtvrtého desetinného místa, je jím úhel určen s chybou, jež je menší než 12″. Dokažte!

17. Funkce více proměnných. Je-li dána funkce $u = f(x, y)$ dvou proměnných x, y a dosadíme-li sem za x a y neúplná čísla $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$, je také hodnota této funkce neúplným číslem. Přesná hodnota funkce je $f(A, B)$ a za její střední aproximaci budeme považovati číslo $f(a, b)$. Prostá chyba při této aproximaci je dána rozdílem

$$f(A, B) - f(a, b).$$

Omezíme se jen na takové funkce $f(x, y)$ dvou proměnných x, y, jež jsou spojité a mají spojité parciální derivace pro všecka x z intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$ a pro všecka y z intervalu $[b - \beta, b + \beta]$.*)

Výraz udávající chybu lze psáti ve tvaru

$$f(A, B) - f(a, B) + f(a, B) - f(a, b),$$

a proto

$$|f(A, B) - f(a, b)| \leqq |f(A, B) - f(a, B)| + |f(a, B) - f(a, b)|.$$

Rozdíl $f(A, B) - f(a, B)$ závisí jenom na chybě, s níž je dáno číslo $A = a \pm \alpha$, neboť B je v něm konstantní. Jde tedy o chybu funkce jedné proměnné, jež podle odst. **14** vyhovuje nerovnosti

$$|f(A, B) - f(a, B)| \leqq \alpha \max \left|\frac{\partial f(x, B)}{\partial x}\right|,$$

kde znakem $\max \left|\frac{\partial f(x, B)}{\partial x}\right|$ rozumíme největší hodnotu, jíž nabývá absolutní hodnota parciální derivace $\frac{\partial f(x, B)}{\partial x}$ pro

*) O funkci $f(x, y)$ dvou proměnných x, y říkáme, že je spojitá pro $x = a, y = b$, jestliže ke každému kladnému číslu ε dovedeme nalézti taková dvě kladná čísla δ_1, δ_2, aby pro všecka x a pro všecka y, pro něž platí $|x - a| < \delta_1$, $|y - b| < \delta_2$, bylo $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$. Tento výrok lze vysloviti také takto: funkce $f(x, y)$ je spojitá pro $x = a$, $y = b$, existuje-li limita $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b)$.

Jestliže ve funkci $f(x, y)$ považujeme y za konstantní a utvoříme-li derivaci této funkce podle x, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce $f(x, y)$ podle x a označujeme ji symbolem

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Podobně považujeme-li x za konstantní a utvoříme-li derivaci podle y, nazýváme tuto derivaci parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle y a označujeme ji symbolem

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}.$$

některé vhodně zvolené x z intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$. Ježto jde o derivaci podle x, při čemž $y = B$ je konstantní, dostáváme skutečně parciální derivaci funkce $f(x, y)$.

Podobně rozdíl $f(a, B) - f(a, b)$ závisí pouze na chybě, s níž je dáno číslo $B = b \pm \beta$, neboť tentokrát je a konstantní. To značí, že

$$|f(a, B) - f(a, b)| \leqq \beta \max \left|\frac{\partial f(a, y)}{\partial y}\right|,$$

kde znak $\max \left|\frac{\partial f(a, y)}{\partial y}\right|$ značí největší hodnotu, jíž nabývá $\left|\frac{\partial f(a, y)}{\partial y}\right|$ pro některé vhodně zvolené y z intervalu $[b - \beta, b + \beta]$.

Podle předpokladu jsou parciální derivace $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ funkce spojité. Proto také jejich absolutní hodnoty jsou funkce spojité pro všecka x z intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$ a pro všecka y z intervalu $[b - \beta, b + \beta]$ a nabývají pro určité vhodně zvolené hodnoty x a y z těchto intervalů nejvyšších hodnot. Tyto nejvyšší hodnoty označíme symboly $\max \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|$, $\max \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|$. Přitom není ovšem třeba, aby obě tyto funkce nabývaly nejvyšších hodnot současně pro totéž x a y. Tak dostáváme konečně pro horní hranici prosté chyby funkce dvou proměnných odhad

$$|f(A, B) - f(a, b)| \leqq \alpha \max \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right| + \beta \max \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|,$$

neboť

$$\max \left|\frac{\partial f(x, B)}{\partial x}\right| \leqq \max \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|, \max \left|\frac{\partial f(a, y)}{\partial y}\right| \leqq \max \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|.$$

Platnost nalezených výsledků lze snadno rozšířiti na funkce o více proměnných, a to úplnou indukcí. O těchto funkcích budeme předpokládati, že jsou spojité a mají spojité parciální derivace pro všecky hodnoty proměnných v těch intervalech, ve kterých to budeme potřebovati.

(1) Předpokládejme, že pro funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jejichž hodnoty $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou dány neúplnými čísly $A_1 = a_1 \pm \alpha_1$, $A_2 = a_2 \pm \alpha_2, \ldots,$ $A_n = a_n \pm \alpha_n$, platí

$$|f(A_1, A_2, \ldots, A_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)| \leqq$$
$$\alpha_1 \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| + \alpha_2 \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| + \ldots + \alpha_n \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|,$$

kde znakem $\max \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$ rozumíme maximální hodnotu, jíž může $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$ dosíci. Jde-li o funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ $n+1$ proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, jejichž hodnoty $A_1, A_2, \ldots,$ A_n, B jsou dány neúplnými čísly $A_1 = a_1 \pm \alpha_1$, $A_2 = a_2 \pm$ $\pm \alpha_2, \ldots, A_n = a_n \pm \alpha_n$, $B = b \pm \beta$, je absolutní hodnota prosté chyby

$$\begin{aligned} &|f(A_1, A_2, \ldots, A_n, B) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)| = \\ &= |f(A_1, A_2, \ldots, A_n, B) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n, B) + \\ &+ f(a_1, a_2, \ldots, a_n, B) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)| \leqq \\ &\leqq |f(A_1, A_2, \ldots, A_n, B) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n, B)| + \\ &+ |f(a_1, a_2, \ldots, a_n, B) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)|. \end{aligned}$$

Ale prvý člen podle předpokladu není větší

$$\alpha_1 \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|' + \alpha_2 \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|' + \ldots + \alpha_n \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|',$$

kde ovšem maxima prostých hodnot parciálních derivací obsahují místo y hodnotu B, což je naznačeno akcentem. Druhý člen podle odst. 14 není větší než $\beta \max \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|'$, kde akcent upozorňuje, že $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$. Ale jistě je $\max\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|' \leqq \max\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$, $\max\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|' \leqq \max\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$, kde pravé strany značí maximum prosté hodnoty, které dosáhne parciální derivace vůbec, kdykoli je vyhověno nerovnostem $a_1 - \alpha_1 \leqq x_1 \leqq a_1 + \alpha_1$, $a_2 - \alpha_2 \leqq x_2 \leqq a_2 + \alpha_2, \ldots,$ $a_n - \alpha_n \leqq x_n \leqq a_n + \alpha_n$, $b - \beta \leqq y \leqq b + \beta$. Je tedy také pro $n + 1$ proměnných

$$|f(A_1, A_2, \ldots, A_n, B) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)| \leqq$$

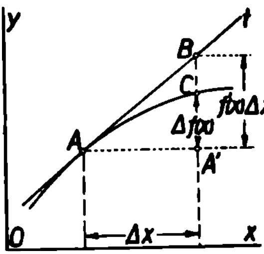
$$\leqq \alpha_1 \max\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| + \alpha_2 \max\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| + \ldots + \alpha_n \max\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| + \\ + \beta \max\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

(2) Na počátku tohoto odstavce bylo dokázáno, že věta platí pro $n = 2$, proto platí i pro $n = 3$. Protože platí pro $n = 3$, platí i pro $n = 4$ atd. bez jakéhokoli omezení.

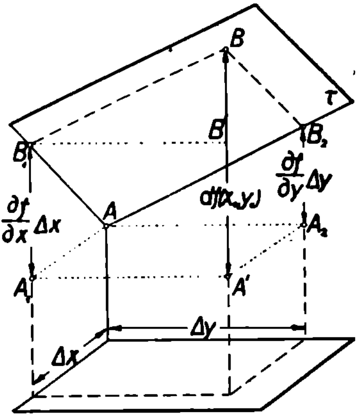
18. Diferenciál. V tomto odstavci osvětlíme předcházející úvahy s jiné strany.

Budiž dána funkce $f(x)$ jedné nezávisle proměnné x, o níž budeme předpokládati, že je spojitá pro $x = x_0$ a že má pro tuto hodnotu derivaci. Znázorníme-li tuto funkci graficky, t. j. nanášíme-li hodnoty argumentu jako úsečky a hodnoty funkce jako pořadnice, dostaneme křivku znázorněnou na obr. 4. Argumentu $x = x_0$ nechť odpovídá bod A. Vzhledem k učiněným přepokladům křivka má v bodě A tečnu t, jejíž směrnice je, jak známo, rovna derivaci $f'(x_0)$ funkce $f(x)$ pro $x = x_0$. Zvětší-li se argument x_0 o Δx, dostaneme na tečně bod B. Označíme-li přírůstek pořadnice $\overline{A'B}$ znakem $\mathrm{d}f(x_0)$, je $\mathrm{d}f(x_0) : \Delta x = f'(x_0)$, čili $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \,.\, \Delta x$. Tento přírůstek se v diferenciálním počtu označuje názvem *diferenciál* funkce $f(x)$ pro $x = x_0$. Jest jej ovšem odlišovati od přírůstku funkce $\overline{A'C}$, který se označuje znakem $\Delta f(x_0)$ a jest obecně různý od právě zavedeného diferenciálu. Je-li $f(x) = x$, je $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}x$, ale podle právě vyslovené definice je také $\mathrm{d}f(x) = 1 \,.\, \Delta x$, neboť derivace funkce $f(x) = x$ je rovna 1. Proto lze přírůstek Δx také nazývati diferenciálem nezávisle proměnné a označovati jej $\mathrm{d}x$. Pak se rovnice, jíž jest definován diferenciál, psává obyčejně ve tvaru

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \,.\, \mathrm{d}x.$$



Obr. 4.*)



Obr. 5.

Podobný postup lze zvoliti i pro funkci $f(x, y)$ dvou nezávisle proměnných x, y, o níž budeme předpokládati, že je spojitá pro $x = x_0$, $y = y_0$ a že má pro tyto hodnoty obě parciální derivace. Znázorníme-li tuto funkci graficky v prostoru, t. j. nanášíme-li hodnoty nezávisle proměnných jako souřadnice x, y a jim odpovídající hodnoty funkce jako souřadnici z, dostaneme plochu. Argumentům $x = x_0$, $y = y_0$ odpovídá bod A. Vzhledem k učiněných předpokladům má plocha v bodě A tečnou rovinu τ (viz obr. 5, kde však není zmíněná plocha pro jednoduchost zakreslena).

*) V obr. 4 úsečka $\overline{A'B}$ má býti označena $f'(x_0).\Delta x$ a úsečka $\overline{A'C}$ má být označena $\Delta f(x_0)$.

Zvětší-li se argument x_0 o Δx a argument y_0 o Δy, dostaneme na tečné rovině bod B. Přírůstek $\overline{A'B}$ označíme zcela analogicky znakem $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$ a nazveme jej *totálním diferenciálem* funkce $f(x, y)$ pro $x = x_0$, $y = y_0$. Jde o to, abychom jej vyjádřili s pomocí přírůstků Δx, Δy. Je-li $\Delta y = 0$, dostáváme funkci $f(x, y_0)$ jedné proměnné x, neboť druhá proměnná $y = y_0$ je konstantní. Tu je podle předcházejícího přírůstek $\overline{A_1B_1} = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \,.\, \Delta x$. Podobně pro $\Delta x = 0$, čili $x = x_0$ jde o funkci $f(x_0, y)$ jedné proměnné y, jejíž přírůstek je $\overline{A_2B_2} = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \,.\, \Delta y$. Avšak vzhledem ke shodnosti trojúhelníků $\triangle B_1B'B \cong \triangle AA_2B_2$, kde $B_1B' \parallel A_1A'$, je $\overline{B'B} = \overline{A_2B_2}$. Vedle toho $\overline{A'B'} = \overline{A_1B_1}$, takže $\overline{A'B} = \overline{A'B'} + \overline{B'B} = \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2}$. Potom je

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \,.\, \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \,.\, \Delta y.$$

Je-li $f(x, y) = x$, je jednak $\mathrm{d}f(x, y) = \mathrm{d}x$, jednak $\mathrm{d}f(x, y) = 1 \,.\, \Delta x$, čili $\mathrm{d}x = \Delta x$. Podobně pro $f(x, y) = y$ je $\mathrm{d}f(x, y) = \mathrm{d}y$ a také $\mathrm{d}f(x, y) = 1 \,.\, \Delta y$, takže $\mathrm{d}y = \Delta y$. Proto přírůstky Δx, Δy nazýváme diferenciály nezávisle proměnných a označujeme je $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$. Pak se totální diferenciál obyčejně vyjadřuje ve tvaru

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \mathrm{d}y.$$

Zcela obdobně lze zavésti pojem totálního diferenciálu i u funkce $f(x, y, z, \ldots)$ více proměnných $x, y, z, \ldots$. Pro $x = x_0, y = y_0, z = z_0, \ldots$ je totální diferenciál této funkce

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0, z_0, \ldots) = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \ldots)}{\partial x} \mathrm{d}x + \\ + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \ldots)}{\partial y} \mathrm{d}y + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \ldots)}{\partial z} \mathrm{d}z + \ldots.$$

Porovnáme-li tento výsledek s výsledkem úvah v předcházejícím odstavci, lze uvésti obecný předpis, jak stanoviti horní hranici prosté chyby funkce několika proměnných:

Horní hranice prosté chyby funkce několika nezávisle proměnných, jejichž hodnoty jsou dány neúplnými čísly, není větší než výraz, který vznikne, utvoříme-li absolutní hodnotu totálního diferenciálu této funkce, do níž místo absolutních hodnot diferenciálů nezávisle proměnných dosadíme horní hranice chyb těchto proměnných a místo absolutních hodnot parciálních derivací funkce dosadíme jejich maximální hodnoty, jichž nabudou v intervalech, jimiž jsou daná neúplná čísla definována.

Příklad 1. Je-li $f(x, y) = x + y$, je $\mathrm{d}f(x, y) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ a $|\mathrm{d}x + \mathrm{d}y| \leqq |\mathrm{d}x| + |\mathrm{d}y|$. Pro $x = A = a \pm \alpha$, $y = B = b \pm \beta$ dostáváme

$$|(A + B) - (a + b)| \leqq \alpha + \beta$$

v souhlasu s odst. **4**.

Příklad 2. Je známo, že $\mathrm{d}(xy) = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, $|y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y| \leqq |y| \,.\, |\mathrm{d}x| + |x| \,.\, |\mathrm{d}y|$, takže

$$|AB - ab| \leqq (b + \beta)\alpha + (a + \alpha)\beta$$

podobně jako v odst. **6**.

Příklad 3. Ježto

$$\left|\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)\right| = \left|\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}\right| \leqq \left|\frac{1}{y}\right| . |\mathrm{d}x| + \left|\frac{x}{y^2}\right| . |\mathrm{d}y|,$$

vychází pro prostou chybu podílu výraz

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right| \leqq \frac{\alpha}{b - \beta} + \frac{(a + \alpha)\beta}{(b - \beta)^2} = \frac{\alpha b + \beta a}{(b - \beta)^2},$$

což je výsledek jen nepatrně větší než výraz odvozený v odst. 7.

Poznámka. Při praktickém počítání netřeba úzkostlivě hledati maximální hodnoty, jichž dosáhnou absolutní hodnoty parciálních derivací, nýbrž s dostačující přesností lze do absolutních hodnot parciálních derivací přímo dosaditi střední aproximace daných veličin. Rozdíly, jež tak vzniknou, jsou bezvýznamné, neboť horní hranici prosté chyby odhadujeme vždy jen na jednu nebo nejvýše dvě platné cifry a raději je zaokrouhlujeme vzestupně.

Příklad 4. Určiti přeponu pravoúhlého trojúhelníka jsou-li dány odvěsny $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$. Jde o funkci $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tu je

$$|df| = \left|\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \cdot |dx| + \left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \cdot |dy|.$$

Pak horní hranice prosté chyby, s níž je vypočtena přepona, není větší než výraz*)

$$\frac{(a+\alpha)\alpha}{\sqrt{(a+\alpha)^2+(b-\beta)^2}} + \frac{(b+\beta)\beta}{\sqrt{(a-\alpha)^2+(b+\beta)^2}},$$

což však lze s dostatečnou přesností nahraditi výrazem

$$\frac{a\alpha + b\beta}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

jako v příkladě 2. v odst. 8.

Příklad 5. V trojúhelníku jsou dány strany $a = (32{,}4 \pm 0{,}05)$ cm, $b = (46{,}5 \pm 0{,}05)$ cm, $c = (24{,}8 \pm 0{,}05)$ cm. Určiti jeho úhly a obsah.

Z kosinové věty

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$

dostáváme diferencováním

$$a\,da = b\,db + c\,dc - c\cos\alpha\,db - b\cos\alpha\,dc + bc\sin\alpha\,d\alpha$$

a odtud

$$bc\sin\alpha\,d\alpha = a\,da - (b - c\cos\alpha)\,db - (c - b\cos\alpha)\,dc.$$

---

*) Výraz $\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}$ je největší, když $\left(\frac{y}{x}\right)^2$ je co nejmenší, t. j. pro $y = b - \beta$, $x = a + \alpha$. Podobně zjistíme, že druhý výraz je největší pro $x = a - \alpha$, $y = b + \beta$.

Ježto však $bc \sin\alpha = 2P$, kde P je obsah trojúhelníka, $b - c \cos\alpha = a \cos\gamma$, $c - b \cos\alpha = a \cos\beta$, je

$$2P\, \mathrm{d}\alpha = a(\mathrm{d}a - \cos\gamma\, \mathrm{d}b - \cos\beta\, \mathrm{d}c),$$

takže výraz

$$|\mathrm{d}\alpha| \leqq \frac{a}{2P} (|\mathrm{d}a| + |\cos\gamma| \,.\, |\mathrm{d}b| + |\cos\beta| \,.\, |\mathrm{d}c|)$$

lze přibližně vzíti za horní hranici chyby úhlu α, měřenou ovšem v míře obloukové.*) Přitom $|\mathrm{d}a|$, $|\mathrm{d}b|$, $|\mathrm{d}c|$ značí horní hranice chyby daných stran. Podobné dva výrazy, které vzniknou cyklickou záměnou, lze považovati za horní hranice chyby ostatních úhlů. Dále z rovnice $2P = bc \sin\alpha$ dostaneme diferencováním

$$2\, \mathrm{d}P = c \sin\alpha\, \mathrm{d}b + b \sin\alpha\, \mathrm{d}c + bc \cos\alpha\, \mathrm{d}\alpha,$$

a dosadíme-li sem za $\mathrm{d}\alpha$ podle předcházejícího, vyjde

$$4P\, \mathrm{d}P = abc \cos\alpha\, \mathrm{d}a + c(2P \sin\alpha - ab \cos\alpha \cos\gamma)\, \mathrm{d}b + \\ + b(2P \sin\alpha - ac \cos\alpha \cos\beta)\, \mathrm{d}c.$$

Ježto však

$$2P \sin\alpha - ab \cos\alpha \cos\gamma = ab(\sin\alpha \sin\gamma - \cos\alpha \cos\gamma) = \\ = ab \cos\beta,$$

$$2P \sin\alpha - ac \cos\alpha \cos\beta = ac \cos\gamma,$$

je

$$4P\, \mathrm{d}P = abc(\cos\alpha\, \mathrm{d}a + \cos\beta\, \mathrm{d}b + \cos\gamma\, \mathrm{d}c).$$

Lze tedy výraz

$$|\mathrm{d}P| \leqq \frac{abc}{4P} (|\cos\alpha| \,.\, |\mathrm{d}a| + |\cos\beta| \,.\, |\mathrm{d}b| + |\cos\gamma| \,.\, |\mathrm{d}c|)$$

vzíti za horní hranici chyby, se kterou je určen obsah.

Počítáme-li střední aproximaci úhlů a obsahu ze středních aproximací stran, vyjde podle pravidel známých z trigonometrie: $\alpha \approx 41°30'$, $\beta \approx 108°2'$, $\gamma \approx 30°28'$, $P \approx 382\ \mathrm{cm}^2$; přitom není vzat zřetel na sekundární chybu, která vzniká

*) Násobíme-li nalezený výsledek číslem $180 \,.\, 60 : \pi \doteq 3438$, dostaneme horní hranici chyby v úhlových minutách.

tím, že logaritmy, jichž jsme používali k výpočtům, jsou čísla zaokrouhlená, a která při užití čtyrmístných tabulek je u všech úhlů menší než 1′ a při určení obsahu menší než 0,14 cm². Primární chyba je pak podle odvozených vzorců

$$|\mathrm{d}\alpha| \leqq \frac{a}{2P}\left(|\mathrm{d}a| + |\cos\gamma| \,.\, |\mathrm{d}b| + |\cos\beta| \,.\, |\mathrm{d}c|\right) < 16',$$

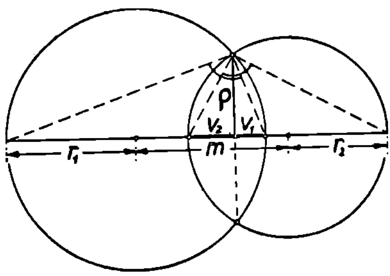
$$|\mathrm{d}\beta| \leqq \frac{b}{2P}\left(|\cos\gamma| \,.\, |\mathrm{d}a| + |\mathrm{d}b| + |\cos\alpha| \,.\, |\mathrm{d}c|\right) < 28',$$

$$|\mathrm{d}\gamma| \leqq \frac{c}{2P}\left(|\cos\beta| \,.\, |\mathrm{d}a| + |\cos\alpha| \,.\, |\mathrm{d}b| + |\mathrm{d}c|\right) < 12',$$

$$|\mathrm{d}P| \leqq \frac{abc}{4P}\left(|\cos\alpha| \,.\, |\mathrm{d}a| + |\cos\beta| \,.\, |\mathrm{d}b| + |\cos\gamma| \,.\, |\mathrm{d}c|\right) < 2{,}4.$$

Je tedy celkem $\alpha = 41°30' \pm 16'$, $\beta = 108°2' \pm 28'$, $\gamma = 30°28' \pm 12'$, $P = (382 \pm 2{,}4)$ cm². Mohli jsme tedy vskutku sekundární chybu vynechat.

Příklad 6. Dány dvě koule s poloměry $r_1 = (13 \pm 0{,}05)$ cm, $r_2 = (11 \pm 0{,}05)$ cm, jejich středy jsou navzájem vzdáleny o $m = (20 \pm 0{,}1)$ cm. Jaký je objem tělesa čočkovitého tvaru oběma koulím společného?



Obr. 6.

Obě koule se protínají v kružnici o poloměru ϱ, jejíž rovina odtíná od koulí kulové úseče o výškách v_1, v_2. Pro ně platí (viz obr. 6)

$$\varrho^2 = v_1(2r_1 - v_1),$$
$$\varrho^2 = v_2(2r_2 - v_2),$$
$$m = r_1 - v_1 + r_2 - v_2.$$

Odtud třeba určiti ϱ, v_1, v_2 a dosaditi do výrazu pro objem, který je podle známých vzorců ze stereometrie

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{2}\pi\varrho^2(v_1 + v_2) + \tfrac{1}{6}\pi(v_1^3 + v_2^3) = \\ &= \tfrac{1}{2}\pi v_1^2(2r_1 - v_1) + \tfrac{1}{2}\pi v_2^2(2r_2 - v_2) + \tfrac{1}{6}\pi(v_1^3+v_2^3) = \\ &= \pi(r_1v_1^2 + r_2v_2^2) - \tfrac{1}{3}\pi(v_1^3 + v_2^3). \end{aligned}$$

Utvoříme-li diferenciály, dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \pi(v_1^2\,\mathrm{d}r_1+2r_1v_1\,\mathrm{d}v_1 + v_2^2\,\mathrm{d}r_2 + 2r_2v_2\,\mathrm{d}v_2) - \\ &\quad - \pi(v_1^2\,\mathrm{d}v_1+v_2^2\,\mathrm{d}v_2) = \\ &= \pi[v_1^2\,\mathrm{d}r_1+v_2^2\,\mathrm{d}r_2+v_1(2r_1 - v_1)\,\mathrm{d}v_1+v_2(2r_2-v_2)\,\mathrm{d}v_2] = \\ &= \pi(v_1^2\,\mathrm{d}r_1+v_2^2\,\mathrm{d}r_2+\varrho^2\,\mathrm{d}v_1+\varrho^2\mathrm{d}v_2). \end{aligned}$$

Ježto $\mathrm{d}m = \mathrm{d}r_1 - \mathrm{d}v_1 + \mathrm{d}r_2 - \mathrm{d}v_2$, je $\mathrm{d}v_1 + \mathrm{d}v_2 = \mathrm{d}r_1 + \mathrm{d}r_2 - \mathrm{d}m$, takže

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \pi(v_1^2\,\mathrm{d}r_1+v_2^2\,\mathrm{d}r_2+\varrho^2\,\mathrm{d}r_1+\varrho^2\,\mathrm{d}r_2 - \varrho^2\,\mathrm{d}m) = \\ &= \pi(2r_1v_1\,\mathrm{d}r_1 + 2r_2v_2\,\mathrm{d}r_2 - \varrho^2\,\mathrm{d}m). \end{aligned}$$

Pro horní hranici prosté chyby odtud dostaneme

$$|\mathrm{d}V| \leqq \pi(2r_1v_1\,|\mathrm{d}r_1| + 2r_2v_2\,|\mathrm{d}r_2| + \varrho^2\,|\mathrm{d}m|).$$

Počítáme-li v_1, v_2, ϱ, V z daných středních aproximací, dostaneme střední aproximace $v_1 \approx 1{,}8$, $v_2 \approx 2{,}2$, $\varrho \approx 6{,}6$, $V \approx 282$, takže

$$|\mathrm{d}V| \leqq \pi(26\,.\,1{,}8\,.\,0{,}05+22\,.\,2{,}2\,.\,0{,}05+6{,}6^2\,.\,0{,}1)=\pi\,.\,9{,}116<29.$$

Odtud vychází $V = (282 \pm 29)\ \mathrm{cm}^3$.

Cvičení. **39.** Zorný úhel optického přístroje (t. j. úhel sevřený krajními paprsky, které vytvořují ještě ostrý obrázek) je $2x$. Jakou část oblohy přehlédneme přístrojem, jehož zorný úhel byl stanoven hodnotou $40° \pm 1°$? — $\left[\left|\mathrm{d}\frac{P}{S}\right| \leqq \sin\alpha|\mathrm{d}\alpha|,\ \frac{P}{S} = 0{,}060 \pm 0{,}006\right.$, t. j. zhruba 6%.]

40. Měříme-li neznámý odpor X vodiče methodou Wheatstoneova můstku, dospíváme k úměře $X : R = a : (l - a)$, kde R je známý odpor, l je délka můstku a a určuje polohu posuvného kontaktu. Považujeme-li R a l za přesné, určete horní hranici poměrné chyby měřeného odporu na základě horní hranice chyby $|\mathrm{d}a|$, s níž byla určena poloha posuvného kontaktu. Kdy je poměrná chyba výsledku nejmenší? — $\left[\frac{|\mathrm{d}X|}{X} \leqq \frac{l}{a(l-a)}\,|\mathrm{d}a|\right.$, nejmenší pro $a = \tfrac{1}{2}l$.$\Big]$

41. Kámen byl volně puštěn do propasti a jeho náraz na dno bylo slyšeti po $t \pm |dt|$ vteřinách. Určete horní hranici poměrné chyby, s níž lze vypočísti hloubku propasti. (Gravitační zrychlení g a rychlost zvuku c považujte za přesné.) — [Je-li h hloubka propasti, je doba pádu $\sqrt{\frac{2h}{g}}$; doba, jíž potřebuje zvukový signál na cestu zpět, je $\frac{h}{c}$, takže platí $\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c} = t$, odtud $\frac{|dh|}{h} \leqq \left(1 + \sqrt{\frac{c}{c + 2gt}}\right) \frac{|dt|}{t} <$ $< 2 \cdot \frac{|dt|}{t}$.]

42. V praxi se pravý úhel vytyčuje tak, že se sestrojí trojúhelník o stranách $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 5$ m. Je-li horní hranice chyby každé strany 0,1 m, stanovte horní hranici chyby, jež odtud vyplývá pro sestrojený úhel. — $\left[\frac{a|da| + b|db| + c|dc|}{ab} < 6°.\right]$

43. Souřadnice bodů $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ byly změřeny s chybami, jejichž horní hranice jsou $|dx_1|$, $|dy_1|$, $|dx_2|$, $|dy_2|$. S jakou chybou lze odtud vypočísti vzdálenost $s = \overline{AB}$ a úhel φ, sevřený kladným smyslem osy x a přímkou AB? — $[(|dx_1| + |dx_2|)\,|\cos\varphi| + (|dy_1| +$ $+ |dy_2|)\,|\sin\varphi|$, $[(|dx_1| + |dx_2|)\,|\sin\varphi| + (|dy_1| + |dy_2|)\,|\cos\varphi|] : s$.]

44. Byly změřeny hrany kvádru: $a = (48,2 \pm 0,1)$ cm, $b =$ $= (27,5 \pm 0,1)$ cm, $c = (16,3 \pm 0,1)$ cm. Určete délku tělesné úhlopříčky! — [$|du| \leqq \cos\alpha|da| + \cos\beta|db| + \cos\gamma|dc|$, kde α, β, γ jsou úhly, jež svírá úhlopříčka s hranami; $u = (57,8 \pm 0,2)$ cm.]

45. Na vodorovné rovině stojí stožár, jehož vrchol spatřujeme od severu ve výškovém úhlu $\alpha = 30°10' \pm 10'$, pokročíme-li o $a =$ $= (25,2 \pm 0,1)$ m na západ, uzříme jej ve výškovém úhlu $\beta =$ $= 19°30' \pm 10'$. Určete výšku stožáru! — $\left[|dx| \leqq \frac{x}{a}|da| +\right.$ $\left. + \frac{x^3}{a^2}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}|d\alpha| + \frac{\cos\beta}{\sin^3\beta}|d\beta|\right), x = (11,3 \pm 0,3) \text{ m.}\right]$

46. Dána koule o poloměru $r = (20 \pm 0,1)$ cm a svítící bod vzdálený od jejího středu o $m = (50 \pm 0,5)$ cm. Jaká část povrchu koule je osvětlena? — $\left[\left|d\frac{P}{S}\right| \leqq \frac{r|dm| + m|dr|}{2m^2}, \frac{P}{S} = 0,3 \pm 0,003.\right]$

47. V trojúhelníku byly změřeny strany $a = (23,4 \pm 0,05)$ m, $b = (46,8 \pm 0,05)$ m a úhel $\gamma = 73°26' \pm 3'$. Stanovte třetí stranu, zbývající úhly a obsah! — [$c = (45,97 \pm 0,08)$ m, $\alpha = 29°12' \pm 6'$,

$\beta = 77°22' \pm 8'$, $P = (525 \pm 2)\ \mathrm{m}^2$; $|\mathrm{d}c| \leqq |\cos\beta||\mathrm{d}a| + |\cos\alpha||\mathrm{d}b| + \frac{2P}{c}|\mathrm{d}\gamma|$, $c|\mathrm{d}\alpha| \leqq \sin\beta|\mathrm{d}a| + \sin\alpha|\mathrm{d}b| + a|\cos\beta||\mathrm{d}\gamma|$, $\frac{|\mathrm{d}P|}{P} \leqq \frac{|\mathrm{d}a|}{a} + \frac{|\mathrm{d}b|}{b} + |\mathrm{cotg}\gamma||\mathrm{d}\gamma|$.]

48. V trojúhelníku byla změřena strana $a = (46,2 \pm 0,05)$ m a úhly $\beta = 68°54' \pm 3'$, $\gamma = 78°18' \pm 3'$. Určete třetí úhel, zbývající strany a obsah! — [$\alpha = 32°48' \pm 6'$, $b = (79,6 \pm 0,4)$ m, $c = (83,5 \pm 0,4)$ m, $P = (1800 \pm 10)\ \mathrm{m}^2$; $|\mathrm{d}\alpha| \leqq |\mathrm{d}\beta| + |\mathrm{d}\gamma|$, $\sin\alpha|\mathrm{d}b| \leqq \sin\beta|\mathrm{d}a| + c|\mathrm{d}\beta| + b|\cos\alpha|\,|\mathrm{d}\gamma|$, $|\mathrm{d}P| \leqq \frac{2P}{a}|\mathrm{d}a| + \frac{1}{2}(c^2|\mathrm{d}\beta| + b^2|\mathrm{d}\gamma|)$.]