1. Stanovení polohy bodů v pravoúhlé soustavě souřadnicové

In: Pavel Potužák (author): Praktická geometrie. Část druhá. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1949. pp. 5–48.

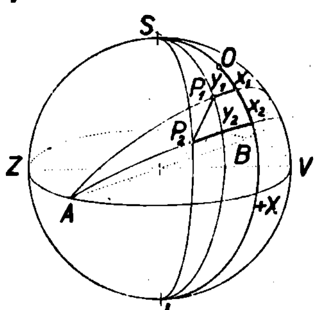
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403233

1. STANOVENÍ POLOHY BODŮ V PRAVOÚHLÉ SOUSTAVĚ SOUŘADNICOVÉ

Souřadnicové řešení skýtá mnoho výhod po stránce přehlednosti, výpočetní a zobrazovací rychlosti a přesnosti. Jeho pomocným doplňkem je často trigonometrické řešení úloh.

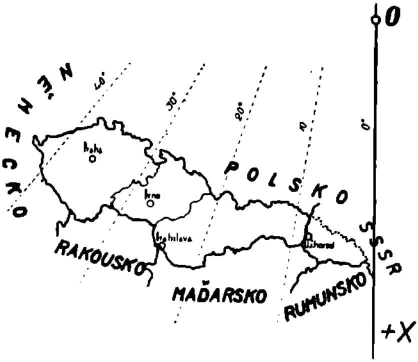
Polohu počátku a směr osy úseček X lze volit libovolně, nejde-li o výpočet souřadnic bodů v určité souřadnicové soustavě. Kladná část osy X se označuje $+X$ a volí se tak, aby výpočty byly jednoduché. Kladná část osy Y čili $+Y$ je k ose X kolmá a svírá s ní úhel, který se měří ve směru chodu ručiček hodinových.

Pro územní oblast velkého rozsahu se zvolí počátek souřadnic v některém trigonometrickém bodě I. řádu, v němž se stanoví směr poledníku z astronomických pozorování jako budoucí osa X sférických souřadnic. Současně s astronomickým měřením se stanoví azimuty trigonometrických stran jdoucích počátkem, t. j. úhly sevřené trigonometrickými stranami a poledníkem. Největší kruh jdoucí počátkem kolmo k ose X se volí za osu Y a obvykle se volí západní její část za osu $+Y$ a východní za $-Y$. Tak se obdrží sférická zobrazovací soustava souřadnicová, v níž poloha každého bodu je určena dvěma oblouky (obr. 1). Pořadnicové oblouky jsou části hlavních kruhů, jež jsou vesměs kolmé k ose X a sbíhají se ve východním a západním pólu A a B. Sledujíce polohu bodu v souřadnicové soustavě, vycházíme vždy od počátku po ose X až k místu, kde pořadnicový hlavní kruh protíná osu X a odtud sledujeme pořadnicový hlavní kruh až k bodu, jímž pořadnicový hlavní kruh prochází.



Obr. 1. Soustava pravoúhlých sférických souřadnic.

Vlivem sbíhavosti pořadnicových oblouků je dáno jisté omezení pro rovinné souřadnice. Rozdělí-li se rozsáhlé území v úzké pruhy probíhající ve směru severojižním, jsou pořadnice krátké a do jisté míry lze zanedbávati zakřivenost zemského povrchu i sbíhavost hlavních kruhů a sférickou plochu lze nahradit rovinnou plochou. Tak přejde sférická (kulová) soustava jednoduše na rovinnou a osy X a Y jsou k sobě kolmé. Hlavní kruhy pořadnicové se v rovinné soustavě zobrazují jako rovnoběžky k ose Y. Pro každý pruh se zvolí počátek a souřadnicové osy. Tak tomu bylo při zakládání stabilního katastru pozemkového. Pro zemi Českou byl zvolen počátek soustavy v trigonometrickém bodě *Gusterberg* u Kremsmünsteru v Horních Rakousích a pro zemi Moravskoslezskou věž sv. Štěpána ve Vídni. Oběma zeměmi probíhají tudíž záporné osy X a pořadnice jsou na západ od osy X kladné a na východ záporné.



Obr. 2. Soustava pravoúhlých souřadnic rovinných pro ČSR.

V některých státech byl zvolen též opačný směr souřadnicových os a mnohde se dokonce užívá i několika soustav a každá z nich je volena jinak.

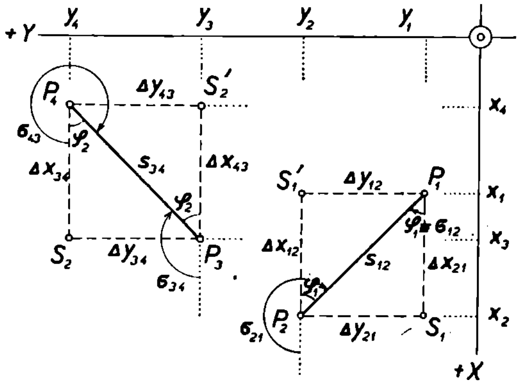
Pro území československé republiky byla v roce 1920 zvolena jednotná zobrazovací soustava katastrální tak, že celé území je v jediném (jihozápadním) čtverníku (kvadrantu) a souřadnice všech bodů jsou kladné (obr. 2). Bližší údaje o této soustavě lze najíti v odborné literatuře.

Při řešení úloh se vychází vždy ze souřadnic trigonometrických bodů vyšších řádů a bodů podrobné triangulace. Souřadnice a místopisy bodů sdělí za určitých podmínek triangulační oddělení Zeměměřického úřadu v Praze.

V dalších výkladech budeme uvažovati jen tu pravoúhlou soustavu os, kde osa $+X$ jde směrem jižním a osa $+Y$ směrem západním od počátku soustavy. Při volbě libovolné soustavy os mohou být body ve všech čtvernících a při výpočtu je nutno dávat pozor jen na znaménko souřadnic.

Směrové úhly nebo směrníky počítané i měřené od rovnoběžky s osou $+X$ ve směru chodu ručiček hodinových (od jihu přes západ, sever a východ zpět k jihu) se jmenují jižníky a označují se písmenem σ.

Základní úlohy v rovinné geodetické soustavě souřadnicové jsou zcela obdobné úlohám analytické geometrie rovinné.



Obr. 3. Délky a jižníky v pravoúhlé rovinné soustavě souřadnicové.

Základní vzorce výpočetní. Kolmá vzdálenost bodu P_n od osy Y se nazývá úsečkou a označuje se x_n, kolmá vzdálenost téhož bodu od osy X se jmenuje pořadnicí a značí se y_n. Spojnice dvou bodů čili jejich vzdálenost se označuje s_n. Indexy udávají též smysl či směr délky. Ku př. délka s_{12} je měřena od bodu P_1 směrem k bodu P_2, kdežto délka s_{21} je měřena nebo počítána od bodu P_2 směrem k bodu P_1. Podobně je tomu při počítání jižníků, souřadnicových rozdílů a pod. Je dobře si zvyknout na tento způsob psaní, neboť se tím usnadňuje přehled při výpočtech. Se zřetelem k užívaným vzorcům uvádějí se pořadnice y na prvém místě.

Úloha 1 (obr. 3). Jsou dány souřadnice bodů P_1 (y_1, x_1) a P_2 (y_2, x_2), vypočísti je jižník σ_{12} a délku s_{12} strany P_1P_2.

Body P_1 a P_2 veďme rovnoběžky k osám X a Y, jež se protnou v bodě S_1. Tak obdržíme pravoúhlý trojúhelník $P_1S_1P_2$, jehož odvěsnami jsou rozdíly pořadnic $\overline{P_2S_1} = y_2 - y_1$ a úseček $\overline{S_1P_1} = x_2 - x_1$. Z trojúhelníka plyne

$$\operatorname{tg} \sigma_{12} = \operatorname{tg} \sigma_{P_1P_2} = \frac{P_2S_1}{S_1P_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y_{21}}{\Delta x_{21}}. \qquad (1)$$

Tangentou není určen hledaný úhel jednoznačně, neboť velikost počítaného úhlu odpovídá pouze hodnotě tangenty vyjmuté z tabulek logaritmických nebo přirozených hodnot funkcí. Tangenta úhlu v tabulkách odpovídá určitému ostrému úhlu, který značíme φ a hledaný jižník se rovná buď $\pm \varphi$ nebo $180° \pm \varphi$. Tangentu lze určiti též podílem sinu a kosinu

$$\operatorname{tg} \sigma_{12} = \frac{\sin \sigma_{12}}{\cos \sigma_{12}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (1')$$

Pravidlo pro stanovení velikosti jižníku se dá sestaviti v podobě tabulky:

Čtverník	I	II	III	IV
$\sin \sigma$ nebo Δy	+	+	—	—
$\cos \sigma$ nebo Δx	+	—	—	+
$\operatorname{tg} \sigma$ nebo $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	+	—	+	—
jižník σ°	φ°	$180° - \varphi^{\circ}$	$180° + \varphi^{\circ}$	$360° - \varphi^{\circ}$
σ^{g}	φ^{g}	$200^{g} - \varphi^{g}$	$200^{g} + \varphi^{g}$	$400^{g} - \varphi^{g}$

Z tabulky se snadno pozná velikost jižníku. Je-li rozdíl souřadnic v čitateli i ve jmenovateli kladný, rovná se jižník σ úhlu φ vyjmutému z tabulek

$$\operatorname{tg} \sigma_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{+}{+} = +, \; \sigma_{12} = \varphi_1.$$

Jižník σ_{21} se liší od jižníku σ_{12} o 180° nebo 200^g, jak ukazuje obr. 3, takže

$$\operatorname{tg} \sigma_{21} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-}{-} = +,\ \varphi_1 = \ldots$$

Podle tabulky je jižník $\sigma_{21} = 180° + \varphi_1 = 180° + \sigma_{12}$.

Podobně je tomu při výpočtu jižníku strany P_3P_4. Jižník σ_{34} se vypočte podle vzorce

$$\operatorname{tg} \sigma_{34} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{+}{-},\ \varphi_2 = \ldots,\ \sigma_{34} = 180° - \varphi_2.$$

$$\operatorname{tg} \sigma_{43} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} = \frac{-}{+},\ \varphi_2 = \ldots,\ \sigma_{43} = 360° - \varphi_2.$$

Souřadnicové rozdíly $(y_3 - y_4)$ a $(y_4 - y_3)$ jsou stejně veliké a liší se jen znaménkem. Tak je tomu u všech podobných rozdílů.

Z $\triangle P_1S_1P_2$ se vypočte strana s_{12}:

$$s_{12} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \sigma_{12}} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \sigma_{12}},\quad s_{21} = \frac{y_1 - y_2}{\sin \sigma_{21}} = \frac{x_1 - x_2}{\cos \sigma_{21}}.$$

Podobně platí pro stranu s_{43}

$$s_{43} = \frac{y_3 - y_4}{\sin \sigma_{43}} = \frac{x_3 - x_4}{\cos \sigma_{43}},\quad s_{43} = \ldots$$

Při výpočtu stran se dosazuje za úhel σ ostrý úhel φ podle vzorců:

$\sigma = 360° \pm \varphi$	$\sigma = 180° \pm \varphi$
$\sin (360° \pm \varphi) = \pm \sin \varphi$	$\sin (180° \pm \varphi) = \mp \sin \varphi$
$\cos (360° \pm \varphi) = + \cos \varphi$	$\cos (180° \pm \varphi) = - \cos \varphi$
$\operatorname{tg} (360° \pm \varphi) = \pm \operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{tg} (180° \pm \varphi) = \pm \operatorname{tg} \varphi$

Podobně je tomu u gradového dělení.

Délka strany vyjde vždy kladná, ať ji počítáme jako stranu s_{12} nebo s_{21}, neboť zápornému čitateli odpovídá záporný jmenovatel a podíl vyjde kladný. Počítá-li se délka strany z obou souřadnicových rozdílů, mohou se oba výsledky lišit jen v posledních místech vlivem nestejného kroku goniometrických funkcí, zvláště při velmi ostrém úhlu φ. Za správnou délku se považuje ta, která je vypočtena z číselně většího souřadnicového rozdílu a druhá slouží za kontrolu.

K vyloučení chyb při výpočtu jižníků se provádí 45° nebo 50g zkouška. Podíl souřadnicových rozdílů dává

$$\operatorname{tg} \sigma_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y_{21}}{\Delta x_{21}}.$$

Připočteme-li poslední výraz k jednotce a po druhé jej od jednotky odečteme, obdržíme po uvedení na společného jmenovatele:

$$1 + \operatorname{tg} \sigma_{12} = \frac{\Delta x_{21} + \Delta y_{21}}{\Delta x_{21}}, \quad 1 - \operatorname{tg} \sigma_{12} = \frac{\Delta x_{21} - \Delta y_{21}}{\Delta x_{21}}.$$

Podíl obou výrazů dává

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \sigma_{12}}{1 - \operatorname{tg} \sigma_{12}} = \frac{\Delta x_{21} + \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} - \Delta y_{21}},$$

po dosazení za $1 = \operatorname{tg} 45°$ a úpravě obdržíme

$$\frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} \sigma_{12}}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} \sigma_{12}} = \operatorname{tg} (45° + \sigma_{12}) = \frac{\Delta x_{21} + \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} - \Delta y_{21}}$$

nebo

$$\frac{\operatorname{tg} 50^g + \operatorname{tg} \sigma_{12}}{1 - \operatorname{tg} 50^g \operatorname{tg} \sigma_{12}} = \operatorname{tg} (50^g + \sigma_{12}) = \frac{\Delta x_{21} + \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} - \Delta y_{21}}.$$

Těmto výrazům se říká zkouška 45stupňová nebo 50gradová. K číselné hodnotě tangenty se najde v tabulkách ostrý úhel ψ a podle tabulky na str. 8 se vypočte výraz v závorkách $(\sigma + 45°)$ nebo $(\sigma + 50^g)$, takže $\sigma_{12} + 45° = n \,.\, 180° \pm \psi$, kde $n = 1$ nebo 2. Pak musí

$$(\sigma_{12} + 45°) - 45° = \sigma_{12}.$$

Podobně je tomu u gradového dělení.*)

Uvedená zkouška je jen kontrolou správnosti číselného výpočtu a užije se vždy při výpočtu jižníků ze souřadnic.

Postup psaní při výpočtu je:

$$
\begin{array}{rlrl}
y_2 & = \ldots & x_2 & = \ldots \\
y_1 & = \ldots & x_1 & = \ldots \\
\hline
y_2 - y_1 = \Delta y_{21} & = \ldots & x_2 - x_1 = \Delta x_{21} & = \ldots \\
\Delta x_{21} + \Delta y_{21} & = \ldots & \Delta x_{21} - \Delta y_{21} & = \ldots
\end{array}
$$

$$\operatorname{tg} \sigma_{12} = \frac{\Delta y_{21}}{\Delta x_{21}} = \ldots \quad \operatorname{tg} (\sigma_{12} + 45°) = \frac{\Delta x_{21} + \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} - \Delta y_{21}} = \ldots$$

$$s_{12} = \frac{\Delta y_{21}}{\sin \sigma_{12}} = \frac{\Delta x_{21}}{\cos \sigma_{12}}.$$

Úloha 2 (obr. 3). Je dán bod P_1 souřadnicemi a druhý bod je určen jižníkem σ_{12} a délkou strany s_{12}. Vypočísti souřadnice y_2, x_2 bodu P_2.

Z $\triangle\ P_1S_1P_2$ plyne

$$S_1P_1 = s_{12} \cos \sigma_{12} = x_2 - x_1, \qquad P_2S_1 = s_{12} \sin \sigma_{12} = y_2 - y_1.$$

Oba výrazy poskytují vzorce pro výpočet souřadnic:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + S_1P_1 = x_1 + s_{12} \cos \sigma_{12}, \\
y_2 &= y_1 + P_2S_1 = y_1 + s_{12} \sin \sigma_{12}.
\end{aligned}
$$

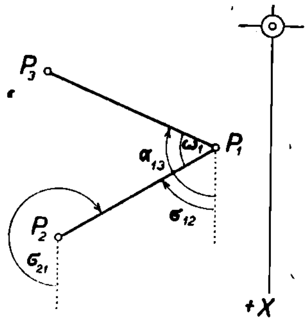
Znaménka souřadnic y_1 a x_1 jsou dána a znaménka s_{12} . . $\cos \sigma_{12}$ a $s_{12} \sin \sigma_{12}$ se řídí pouze znamením goniometrické funkce úhlu σ, neboť délka s je vždy kladná.

Úloha 3 (obr. 4). Je dán jižník σ_{12} strany $s_{12} = \overline{P_1P_2}$ a měřený úhel ω_1. Stanoviti je jižník strany $\overline{P_1P_3}$.

Měřený úhel ω_1 je zatížen nevyhnutelnými chybami, jež přejdou i do hledaného jižníku, který budeme proto nazývati

*) V dalším výkladu bude počítáno jen s dělením stupňovým, neboť ve vzorcích se dají snadno nahradit stupně grady.

pozorovaným jižníkem α na rozdíl od jižníku σ vypočteného ze souřadnic. Pouze tehdy, je-li úhel ω vyrovnán v trigonometrické síti, obdržíme jeho připočtením k danému jižníku vyrovnaný jižník další strany.



Obr. 4. Stanovení pozorovaného jižníku.

Pozorovaný jižník strany P_1P_3 se rovná

$$\alpha_{13} = \sigma_{12} + \omega_1 = (\sigma_{21} - 180°) + \omega_1.$$

Jiný případ ukazuje obr. 5. Je-li úhel ω_2 měřen v bodě P_5, vypočte se jižník strany α_{56} z jižníku σ_{54} takto:

$$\alpha_{56} = \sigma_{54} + (360° - \omega_2) = \sigma_{45} - 180° + (360° - \omega_2) =$$
$$= \sigma_{45} + 180° - \omega_2.$$

Zavedeme-li místo $(360° - \omega_2) = \omega'_2$, pak

$$\alpha_{56} = \sigma_{54} + \omega'_2.$$

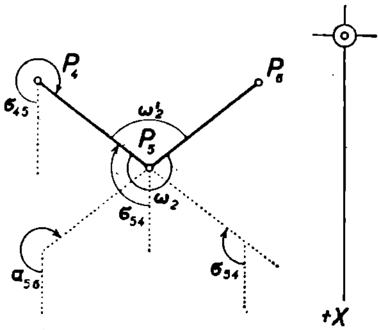
Je-li v bodě P_5 měřeno více úhlů, lze pro lepší přehled vyznačiti velikost jižníků na prodloužených stranách.

Úloha 4 (obr. 6). Jsou dány souřadnice bodů P_1, P_2, P_3 a P_4. Je určiti vrcholové úhly ω_2 a ω_3 v bodech P_2 a P_3.

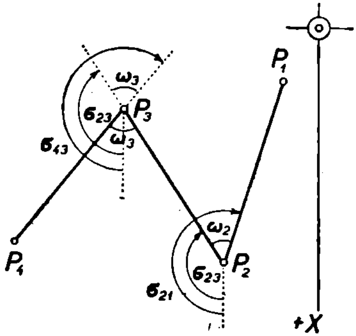
Z daných souřadnic vypočteme jižníky stran:

$$\operatorname{tg} \sigma_{21} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad \sigma_{21} = \ldots, \quad \operatorname{tg} \sigma_{23} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, \quad \sigma_{23} = \ldots,$$

$$\operatorname{tg} \sigma_{43} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}, \quad \sigma_{43} = \ldots$$



Obr. 5. Jiný případ stanovení pozorovaného jižníku.



Obr. 6. Určení vrcholových úhlů z jižníků.

Sevřený neboli vrcholový úhel ω_2 se rovná rozdílu jižníků příslušných stran

$$\omega_2 = \sigma_{21} - \sigma_{23}.$$

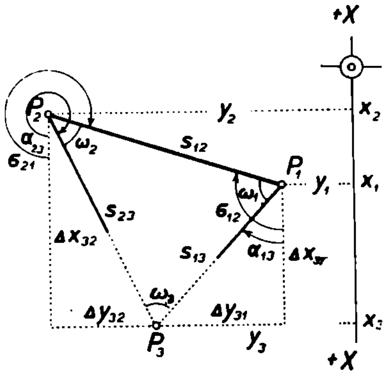
Pro názorné zobrazení a výpočet vrcholového úhlu lze prodloužit ramena úhlu na opačnou stranu, kde obdržíme stejně veliký úhel. Tak je tomu ve vrcholu P_3:

$$\omega_3 = \sigma_{43} - \sigma_{23} = \sigma_{34} - \sigma_{32} + 360°.$$

Sevřený úhel vypočteme, odečteme-li od jižníku pravého ramene jižník levého ramene. Je-li jižník pravého ramene menší, zvětší se jeho velikost o 360°.

1,1. Výpočet souřadnic bodů určených protínáním. Ovládajíce základní vzorce výpočetní, dovedeme řešit v souřadnicích každou úlohu, jež je geometricky určitá. Ze souřadnic daných bodů vypočteme potřebné jižníky a délky stran, případně též vrcholové úhly. Souřadnice mnohých bodů lze vypočísti buď protínáním vpřed nebo zpět, podle toho, v kterých bodech byly měřeny úhly.

Název protínání vpřed nebo zpět je odvozen od způsobu zobrazování na měřickém stole. Při protínání vpřed je hledaný bod určen jako průsečík dvou nebo tří rayonů a bod není stanoviskem. Při zpětném protínání je hledaný bod stanoviskem. Byla-li poloha některého bodu určena protínáním vpřed i zpět, je bod určen kombinovaně.



Obr. 7. Protínání vpřed.

Protínáním vpřed nebo zpět se určuje poloha a přibližné souřadnice bodů podrobné triangulace a bodů určených protínáním. Souřadnice bodů podrobné triangulace se vyrovnávají podle methody nejmenších čtverců, kdežto souřadnice bodů určených protínáním se obdrží jako průměr všech přibližných souřadnic, vypočtených z trojúhelníků, jichž počet je dán počtem daných základen.

Protínání vpřed (obr. 7). Jsou dány souřadnice dvou bodů $P_1\,(y_1, x_1)$, $P_2\,(y_2, x_2)$ a úhly ω_1, ω_2, měřené na daných bodech. Vypočísti je souřadnice bodu $P_3\,(y_3, x_3)$.

Souřadnice bodu P_3 se vypočtou ze souřadnicových rozdílů a k tomu je třeba znáti jižníky a délky stran. Nejdříve se vypočte jižník σ_{12} a délka dané strany:

$$\operatorname{tg} \sigma_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\quad \sigma_{12} = \ldots,\quad \operatorname{tg}(\sigma_{12} + 45^\circ) = \frac{\Delta x_{21} + \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} - \Delta y_{21}},$$

$$\sigma_{12} + 45^\circ = \ldots,\quad s_{12} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \sigma_{12}} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \sigma_{12}},$$

nato se vypočtou pozorované jižníky:

$$\alpha_{13} = \sigma_{12} - \omega_1, \quad \alpha_{23} = \sigma_{21} + \omega_2 = \sigma_{12} + 180^\circ + \omega_2.$$

Podle sinové věty se vypočtou délky určujících stran s_{13} a s_{23}:

$$s_{13} = s_{12}\frac{\sin\omega_2}{\sin\omega_3}, \quad s_{23} = s_{12}\frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_3},$$

$$\omega_3 = 180^\circ - (\omega_1 + \omega_2).$$

Znajíce jižníky a délky stran, vypočteme souřadnicové rozdíly, jednou se zřetelem k bodu P_1 a po druhé k bodu P_2:

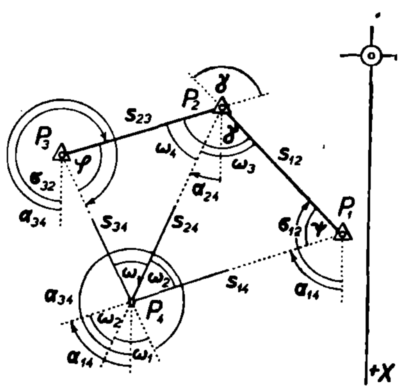
$$y_3 - y_1 = \Delta y_{31} = s_{13}\sin\alpha_{13}, \qquad y_3 - y_2 = \Delta y_{32} = s_{23}\sin\alpha_{23}$$
$$x_3 - x_1 = \Delta x_{31} = s_{13}\cos\alpha_{13}, \qquad x_3 - x_2 = \Delta x_{32} = s_{23}\cos\alpha_{23}$$

a souřadnice bodu P_3 jsou:

$$y_3 = y_1 + s_{13}\sin\alpha_{13} = y_2 + s_{23}\sin\alpha_{23},$$
$$x_3 = x_1 + s_{13}\cos\alpha_{13} = x_2 + s_{23}\cos\alpha_{23}.$$

Dvakráte vypočtené souřadnice bodu P_3 se musí shodovat a rozdíl smí být jen na posledním desetinném místě (v centimetrech) vlivem zaokrouhlování posledních míst a nestejného kroku goniometrických funkcí.

Stejně se postupuje, jsou-li úhly měřeny v jednom bodě daném a druhém určovaném. Jsou-li úhly měřeny ve všech bodech, vyrovnají se na 360° a další výpočet je stejný.



Obr. 8. Protínání zpět pomocným úhlem.

Protínání zpět. a) *Pomocným úhlem* (obr. 8). Jsou dány souřadnice tří bodů P_1 (y_1, x_1), P_2 (y_2, x_2) a P_3 (y_3, x_3). Vypočísti souřadnice bodu P_4, v němž byly měřeny úhly ω_1 a ω_2.

Tento případ je Snelliovou úlohou a někdy je zván též úlohou Pothenotovou. Trigonometrické řešení bylo podáno na konci 1. dílu. Nejdříve vypočteme jižníky a délky stran:

$$\operatorname{tg} \sigma_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \sigma_{12} = \ldots, \quad s_{12} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \sigma_{12}} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \sigma_{12}},$$

$$\operatorname{tg} \sigma_{32} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}, \quad \sigma_{32} = \ldots, \quad s_{32} = \frac{y_2 - y_3}{\sin \sigma_{32}} = \frac{x_2 - x_3}{\cos \sigma_{32}}.$$

Výpočet jižníků se kontroluje zkouškou 45stupňovou. Zkouška jižníků není však kontrolou správného odečtení souřadnic čili utvoření souřadnicových rozdílů. Správnost odečtení souřadnic se přezkouší takto:

$$y_2 - y_1 = \ldots, \quad y_2 - y_3 = \ldots, \quad y_3 - y_1 = \ldots$$
$$x_2 - x_1 = \ldots, \quad x_2 - x_3 = \ldots, \quad x_3 - x_1 = \ldots$$

utvoříce rozdíly prvých dvou souřadnicových rozdílů pro y a x, musí se číselné hodnoty shodovati s třetím rozdílem:

$$(y_2 - y_1) - (y_2 - y_3) = y_3 - y_1,$$
$$(x_2 - x_1) - (x_2 - x_3) = x_3 - x_1,$$

což je kontrolou správného odečtení souřadnic.

Z vypočtených jižníků se stanoví velikost sevřeného úhlu γ ve vrcholu P_2: $\gamma = \sigma_{32} - \sigma_{12}$. Řešený obrazec je čtyřúhelník a známe v něm pět veličin, tři úhly $\gamma, \omega_1, \omega_2$ a dvě strany s_{12}, s_{23}, tím je úloha jednoznačně určena. K výpočtu souřadnic je nutno znáti jižníky a délky stran. Napřed se vypočtou neznámé úhly φ a ψ ve vrcholech P_1 a P_3. Vypočtou se některým ze způsobů uvedených v 1. dílu na str. 134 až 137. Na př.:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{360^\circ - (\gamma + \omega_1 + \omega_2)}{2} = p,$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{s_{12} \sin \omega_1}{s_{23} \sin \omega_2} = \operatorname{tg} \mu, \quad \mu = \ldots, \quad \mu - 45^\circ = \ldots,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\operatorname{tg}(\mu-45^\circ),$$

$$\frac{\varphi-\psi}{2}=q,\quad \varphi=p+q,$$

$$\frac{\varphi+\psi}{2}=p,\quad \psi=p-q.$$

Kontrolou vypočtených úhlů je součet

$$\omega_1+\omega_2+\gamma+\varphi+\psi=360^\circ.$$

K výpočtu délek určujících stran známe nyní všechny úhly a dvě strany vypočtené ze souřadnic:

$$s_{14}=s_{12}\frac{\sin\omega_3}{\sin\omega_2}=s_{12}\frac{\sin(\omega_2+\psi)}{\sin\omega_2},$$

$$s_{34}=s_{23}\frac{\sin\omega_4}{\sin\omega_1}=s_{23}\frac{\sin(\omega_1+\varphi)}{\sin\omega_1},$$

$$s_{24}=s_{12}\frac{\sin\psi}{\sin\omega_2}=s_{23}\frac{\sin\varphi}{\sin\omega_1},$$

$$\omega_3=180^\circ-(\omega_2+\psi),\quad \omega_4=180^\circ-(\omega_1+\varphi).$$

Z jižníků daných stran, z měřených a vypočtených úhlů odvodíme pozorované jižníky:

$$\alpha_{14}=\sigma_{12}-\psi,\quad \alpha_{34}=\sigma_{32}+\varphi,$$
$$\alpha_{24}=\sigma_{21}+\omega_3=\sigma_{23}-\omega_4=\alpha_{34}+\omega_1=\alpha_{14}-\omega_2.$$

Na to se vypočtou souřadnicové rozdíly:

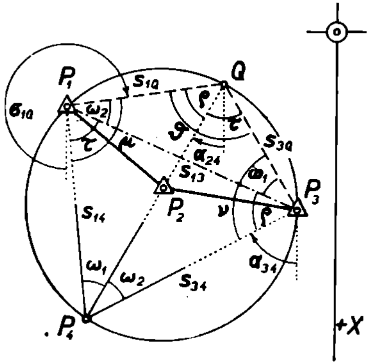
$$y_4-y_1=s_{14}\sin\alpha_{14},\quad x_4-x_1=s_{14}\cos\alpha_{14}$$
$$y_4-y_2=s_{24}\sin\alpha_{24},\quad x_4-x_2=s_{24}\cos\alpha_{24}$$
$$y_4-y_3=s_{34}\sin\alpha_{34},\quad x_4-x_3=s_{34}\cos\alpha_{34}$$

a souřadnice čtvrtého bodu P_4 jsou:

$$y_4=y_1+s_{14}\sin\alpha_{14}=y_2+s_{24}\sin\alpha_{24}=y_3+s_{34}\sin\alpha_{34},$$
$$x_4=x_1+s_{14}\cos\alpha_{14}=x_2+s_{24}\cos\alpha_{24}=x_3+s_{34}\cos\alpha_{34}.$$

Výsledky třikráte vypočtených souřadnic musí souhlasit. Postačí je počítat ze dvou bodů a teprve když se objeví větší odchylka, přikročí se k výpočtu souřadnic ze třetího bodu.

V triangulačních pracích se stanoví souřadnice určovaného bodu z většího počtu daných bodů a obyčejně ze čtyř. Ze tří bodů se vypočtou přibližné souřadnice a vyrovnají se methodou nejmenších čtverců.



Obr. 9. Protínání zpět pomocným bodem Collinsovým.

b) *Pomocným bodem Collinsovým* (obr. 9). Jsou dány tři body P_1, P_2, P_3 souřadnicemi a úlohou je vypočísti souřadnice bodu P_4, v němž byly měřeny úhly ω_1 a ω_2.

Postup řešení je:

Určovaný bod P_4 pokládejme za známý a opišme kružnici bodům P_1, P_3 a P_4. Spojnice P_4P_2 protne kružnici v Collinsově bodu Q. Proti stejným tětivám leží stejné úhly a proto úhly $Q\widehat{P_3}P_1 = Q\widehat{P_4}P_1 = \omega_1$ a $Q\widehat{P_1}P_3 = Q\widehat{P_4}P_3 = \omega_2$. Tím je dána poloha bodu Q. Spojnice QP_2 protne opsanou kružnici v určovaném bodu P_4 a tím je dán též postup řešení. V $\triangle P_1P_3Q$ vypočteme z daných souřadnic jižník strany s_{13} a její délku. Z vypočtené délky a přilehlých úhlů se vypočtou délky určujících stran a nato souřadnice bodu Q, jako je tomu u protínání vpřed:

$$\operatorname{tg}\sigma_{13} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \ldots, \quad \sigma_{13} = \ldots, \quad s_{13} = \frac{y_3 - y_1}{\sin\sigma_{13}} = \frac{x_3 - x_1}{\cos\sigma_{13}}$$

úhel ve vrcholu $Q : \vartheta = 180^\circ - (\omega_1 + \omega_2)$.

Výpočet délek určujících stran:

$$s_{1Q} = s_{13} \frac{\sin \omega_1}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} = \frac{y_3 - y_1}{\sin \sigma_{13}} \cdot \frac{\sin \omega_1}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} =$$
$$= m \cdot \sin \omega_1,$$

$$s_{3Q} = s_{13} \frac{\sin \omega_2}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} = \frac{y_3 - y_1}{\sin \sigma_{13}} \cdot \frac{\sin \omega_2}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} =$$
$$= m \cdot \sin \omega_2.$$

Jižníky určujících stran jsou:

$$\alpha_{1Q} = \sigma_{13} - \omega_2, \; \alpha_{3Q} = \sigma_{31} + \omega_1 = \sigma_{13} - 180° + \omega_1.$$

Ze stran a jižníků se vypočtou souřadnicové rozdíly bodu Q:

$$y_Q - y_1 = s_{1Q} \sin \alpha_{1Q} = \Delta y_{Q1},$$
$$x_Q - x_1 = s_{1Q} \cos \alpha_{1Q} = \Delta x_{Q1}$$
$$y_Q - y_3 = s_{3Q} \sin \alpha_{3Q} = \Delta y_{Q3},$$
$$x_Q - x_3 = s_{3Q} \cos \alpha_{3Q} = \Delta x_{Q3}$$

a souřadnice bodu Q

$$y_Q = y_1 + \Delta y_{Q1} = y_3 + \Delta y_{Q3},$$
$$x_Q = x_1 + \Delta x_{Q1} = x_3 + \Delta x_{Q3}.$$

Souřadnice bodu Q dvakrát vypočtené musí souhlasiti.

Dále vypočteme jižník strany s_{Q2}, který je shodný s jižníkem strany s_{Q4}:

$$\operatorname{tg} \alpha_{Q2} = \frac{y_2 - y_Q}{x_2 - x_Q} = \ldots, \; \alpha_{Q2} = \ldots,$$

$$\alpha_{Q2} = \alpha_{24}.$$

Pro výpočet jižníků dalších stran je nutno stanoviti velikost úhlů ϱ a τ v bodě Q:

$$\varrho = \alpha_{Q1} - \alpha_{Q2} = \sigma_{31} - \alpha_{34}$$
$$\tau = \alpha_{Q2} - \alpha_{Q3} = \alpha_{14} - \sigma_{13}$$

se zkouškou $\vartheta = \varrho + \tau$.

Úhly μ a ν ve vrcholech P_1 a P_3 jsou výplňky na 180°

$$\mu = 180^\circ - (\varrho + \omega_1) = \omega_2 + \tau$$
$$\nu = 180^\circ - (\omega_2 + \tau) = \omega_1 + \varrho$$

a jižníky určujících stran jsou

$$\alpha_{14} = \sigma_{13} + \tau = \alpha_{1Q} + \mu, \quad \alpha_{34} = \sigma_{31} - \varrho = \alpha_{3Q} - \nu.$$

Nato se přikročí k výpočtu délek stran určujících:

$$s_{14} = s_{1Q} \frac{\sin \varrho}{\sin \omega_1} = \frac{(y_3 - y_1)}{\sin \sigma_{13}} \cdot \frac{\sin \omega_1 \sin \varrho}{\sin \vartheta \sin \omega_1} = m \,.\, \sin \varrho,$$

$$s_{34} = s_{3Q} \frac{\sin \tau}{\sin \omega_2} = \frac{(y_3 - y_1)}{\sin \sigma_{13}} \cdot \frac{\sin \omega_2 \sin \tau}{\sin \vartheta \sin \omega_2} = m \,.\, \sin \tau,$$

$$s_{Q4} = s_{1Q} \frac{\sin \mu}{\sin \omega_1} = s_{3Q} \frac{\sin \nu}{\sin \omega_2}, \quad m = \frac{(y_3 - y_1)}{\sin \sigma_{13} \,.\, \sin \vartheta}.$$

Z vypočtených jižníků a délek stran se stanoví souřadnicové rozdíly

$$y_4 - y_1 = \Delta y_{41} = s_{14} \sin \alpha_{14}, \quad x_4 - x_1 = \Delta x_{41} = s_{14} \cos \alpha_{14}$$
$$y_4 - y_3 = \Delta y_{43} = s_{34} \sin \alpha_{34}, \quad x_4 - x_3 = \Delta x_{43} = s_{34} \cos \alpha_{34}$$
$$y_4 - y_Q = \Delta y_{4Q} = s_{Q4} \sin \alpha_{Q4}, \quad x_4 - x_Q = \Delta x_{4Q} = s_{Q4} \cos \alpha_{Q4}$$

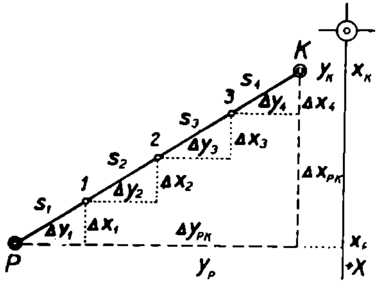
a souřadnice bodu P_4:

$$y_4 = y_1 + \Delta y_{41} = y_3 + \Delta y_{43} = y_Q + \Delta y_{4Q}$$
$$x_4 = x_1 + \Delta x_{41} = x_3 + \Delta x_{43} = x_Q + \Delta x_{4Q}.$$

Souřadnicové řešení trigonometrických úloh. Všechny trigonometrické úlohy, jež byly v 1. dílu probrány, řešíme v souřadnicích obdobně, při čemž užíváme základních vzorců pro výpočet souřadnic. Ze souřadnic daných bodů se vypočtou jižníky, délky stran a sevřené úhly a to jen těch, jichž je třeba k dalšímu výpočtu. Neznámé úhly se vypočtou některým ze způsobů uvedených při trigonometrickém řešení úloh. Z vypočtených jižníků a měřených úhlů se odvodí pozorované jižníky a délky určujících stran. Nato se stanoví souřadnicové rozdíly a souřadnice určovaných bodů.

1,2. Výpočet souřadnic bodů na přímce. (obr. 10). Jsou dány dva body pravoúhlými souřadnicemi, počátečním P a koncovým K. Při průběžném měření spojnice PK byly zaměřeny (zastaničeny) body *1, 2* a *3*, jichž souřadnice je určiti.

Při průběžném měření se odčítá poloha každého bodu se zřetelem k počátečnímu bodu a jednotlivé úseky s_1 až s_4 se obdrží jako rozdíly čtení u jednotlivých bodů. Součet úseků $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = S_m$ musí dáti měřenou délku mezi oběma danými body.



Obr. 10. Body na přímce.

Postup výpočtu:

Ze souřadnic počátečního a koncového bodu se vypočte jižník σ_{PK} a délka S_V

$$S_V = \frac{y_K - y_P}{\sin \sigma_{PK}} = \frac{x_K - x_P}{\cos \sigma_{PK}} = \sqrt{\Delta y_{KP}^2 + \Delta x_{KP}^2}\,.$$

Vypočtená délka S_V a měřená S_m musí souhlasiti a případný rozdíl mezi nimi $S_V - S_m$ musí být malý. Pro katastrální účely nesmí překročiti mez danou rovnicí $\Delta S = 0{,}012\sqrt{S} + 0{,}16$, kde S je měřená délka. Není-li daná mez překročena, vypočtou se souřadnicové rozdíly z podobných trojúhelníků, jak je vidět přímo v obrazci 10:

$$\Delta y_1 = y_1 - y_P = \frac{\Delta y_{KP}}{S_m} s_1 = k_y s_1,$$

$$\Delta y_2 = y_2 - y_1 = \frac{\Delta y_{KP}}{S_m} s_2 = k_y s_2,$$

$$\Delta y_4 = y_K - y_3 = \frac{\Delta y_{KP}}{S_m} s_4 = k_y s_4,$$

$$[\Delta y] = \Delta y_{KP} \quad = \ldots$$

$$\Delta x_1 = x_1 - x_P = \frac{\Delta x_{KP}}{S_m} s_1 = k_x s_1,$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = \frac{\Delta x_{KP}}{S_m} s_2 = k_x s_2,$$

$$\Delta x_4 = x_K - x_3 = \frac{\Delta x_{KP}}{S_m} s_4 = k_x s_4,$$

$$[\Delta x] = \Delta x_{KP} \quad = \ldots$$

Ve výrazech znamená

$$k_y = \frac{\Delta y_{KP}}{S_m} \quad \text{a} \quad k_x = \frac{\Delta x_{KP}}{S_m}.$$

Kontrolou výpočtu je:

$[\Delta y]$ musí se rovnat Δy_{KP} a podobně $[\Delta x]$ se musí rovnat Δx_{KP}.

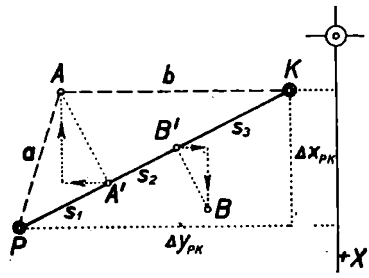
Souřadnice mezilehlých bodů se vypočtou postupným připočítáváním jednotlivých rozdílů k souřadnicím předcházejícího bodu a musí se dospěti k souřadnicím koncového bodu:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_P + \Delta y_1 & \qquad x_1 &= x_P + \Delta x_1 \\ y_2 &= y_1 + \Delta y_2 & x_2 &= x_1 + \Delta x_2 \\ y_3 &= y_2 + \Delta y_3 & x_3 &= x_2 + \Delta x_3 \\ y_K &= y_3 + \Delta y_4 & x_K &= x_3 + \Delta x_4 \end{aligned}$$

Souřadnice koncového bodu musí absolutně souhlasiti se souřadnicemi danými. Je-li po ruce počítací stroj, provede se celý výpočet strojem a zapisují se jen výsledky.

1,3. Výpočet souřadnic bodu na kolmici k dané přímce (obr. 11). Jsou dány souřadnice bodů P a K, na jejichž spojnici je zaměřen bod A dvěma délkami a a b a bod B úsečkou a pořadnicí (kolmicí). Je vypočísti souřadnice bodů A a B.

Nejdříve se vypočtou souřadnice pat kolmic A' a B'. Bod A je určen dvěma délkami a k stanovení polohy bodu A' se užije



Obr. 11. Body mimo přímku.

způsob početní uvedený v 1. dílu na str. 73 a 74. K výpočtu se užijí vzorce:

$$m = \frac{(a + b)(a - b)}{c}$$

$$\overline{PA'} = x = \frac{m + c}{2} \quad \text{nebo} \quad \overline{PA'} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c},$$

$$\overline{A'K} = y = \frac{c - m}{2} \quad \text{nebo} \quad \overline{A'K} = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c},$$

$$v = \overline{AA'} = a^2 - x^2 = b^2 - y^2,$$

kde $a = \overline{PA}$, $b = \overline{AK}$, $c = \overline{PK}$, $\overline{PA'} = x$, $\overline{A'K} = y$.

Postup výpočtu je:

Nejdříve se vypočte délka $S_{PK} = S_V$ některým ze vzorců

$$S_V = \frac{y_K - y_P}{\sin \sigma_{PK}} = \frac{x_K - x_P}{\cos \sigma_{PK}} = \sqrt{\Delta y_{KP}^2 + \Delta x_{KP}^2}$$

a porovná se s délkou přímo měřenou S_m. Případný rozdíl musí být v přípustných mezích. Nato se vypočtou souřadnicové rozdíly pro body A' a B'. Jednotlivé úseky na měřené přímce označme

$$s_1 = \overline{PA'} = x, \quad s_2 = \overline{A'B'} \quad \text{a} \quad s_3 = \overline{B'K}$$

a jejich kontrolou je součet

$$s_1 + s_2 + s_3 = S_m.$$

Souřadnicové rozdíly jsou:

$$y_{A'} - y_P = \frac{\Delta y_{KP}}{S_m} \cdot s_1 = k_y \cdot s_1,$$

atd.

$$x_{A'} - x_P = \frac{\Delta x_{KP}}{S_m} \cdot s_1 = k_x \cdot s_1$$

atd.

a souřadnice pat bodů A' a B' se rovnají

$$\begin{aligned} y_{A'} &= y_P + k_y \cdot s_1 & x_{A'} &= x_P + k_x \cdot s_1 \\ y_{B'} &= y_{A'} + k_y \cdot s_2 & x_{B'} &= x_{A'} + k_x \cdot s_2 \\ y_K &= y_{B'} + k_y \cdot s_3 & x_K &= x_{B'} + k_x \cdot s_3 \end{aligned}$$

Znaménko konstant k_y a k_x je závislé na znaménku souřadnicových rozdílů počátečního a koncového bodu. Rostou-li souřadnice od počátečního bodu ke koncovému, je znaménko konstant kladné, jinak je záporné.

Výpočet souřadnicových rozdílů a souřadnic bodů A a B se provede opět na základě podobných trojúhelníků nebo se zřetelem k jižníku kolmice $A'A$, která má jižník o 90° menší než strana PK:

$$\sigma_{AA'} = \sigma_{PK} - 90°$$

a tím souřadnicové rozdíly jsou

$$\Delta y_{AA'} = \overline{A'A} \sin \sigma_{A'A} = \overline{A'A} \cos \sigma_{PK} = \overline{A'A} \frac{\Delta x_{KP}}{S_m} =$$
$$= k_x \, . \, \overline{A'A}$$
$$\Delta x_{AA'} = \overline{A'A} \cos \sigma_{A'A} = \overline{A'A} \, (-\sin \sigma_{PK}) =$$
$$= -\overline{A'A} \frac{\Delta y_{KP}}{S_m} = -k_y \, . \, \overline{A'A} \, .$$

Souřadnice bodu A jsou dány výrazy

$$y_A = y_{A'} + k_x \, . \, \overline{A'A}, \quad x_A = x_{A'} - k_y \, . \, \overline{A'A} \, .$$

Podobně je tomu u bodu B:

$$y_B = y_{B'} + k_x \, . \, \overline{BB'}, \quad x_B = x_{B'} - k_y \, . \, \overline{BB'} \, .$$

Konstanty k_y a k_x se tudíž užijí pro výpočet souřadnic jak pro paty kolmic, tak pro koncové body kolmic. Pro koncové body kolmic se však užije činitele k_y k výpočtu úsečky x a činitele k_x pro výpočet pořadnice y. Délka kolmice se vloží do vzorců kladná, je-li vpravo a záporná, je-li vlevo od směru měřené přímky. Znaménko souřadnicových rozdílů se kontroluje snadno na obrazci, vedeme-li patou a koncovým bodem kolmice rovnoběžky s osami X a Y. Poloha koncového bodu kolmice udává, zda se jeho souřadnice vzhledem k patě zvětšují nebo zmenšují.

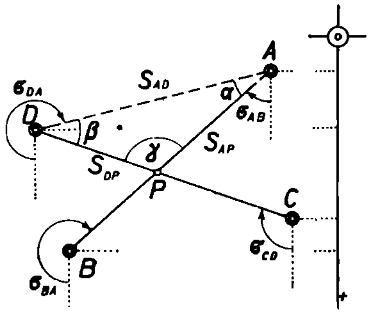
Souřadnice bodu A lze vypočísti též jako případ protínání vpřed, neboť ze souřadnic koncových bodů přímky lze vypočísti jižník a délku strany PK. V trojúhelníku známe všechny strany, z nichž se vypočtou, dosazením do vzorců pro tangenty polovičních úhlů, vrcholové úhly.

1,4. Výpočet souřadnic průsečíku dvou přímek. (obr. 12). Jsou dány souřadnice krajních bodů dvou přímek AB a CD, vypočísti je souřadnice jejich průsečíku. Výpočet lze provésti několikerým způsobem.

Řešení 1. Průsečík P je na obou přímkách a tím lze psáti:

$$\operatorname{tg} \sigma_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A}, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} \sigma_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C}. \tag{2}$$



Obr. 12. Průsečík dvou přímek.

Souřadnice průsečíku musí vyhovět oběma rovnicím

$$y_P - y_A = (x_P - x_A) \operatorname{tg} \sigma_{AB}, \tag{3}$$

$$y_P - y_C = (x_P - x_C) \operatorname{tg} \sigma_{CD}. \tag{4}$$

Odečtením rovnice (4) od (3) obdržíme

$$y_C - y_A = x_P (\operatorname{tg} \sigma_{AB} - \operatorname{tg} \sigma_{CD}) - x_A \operatorname{tg} \sigma_{AB} + x_C \operatorname{tg} \sigma_{CD}. \tag{5}$$

Z poslední rovnice obdržíme

$$x_P = \frac{y_C - y_A + x_A \operatorname{tg} \sigma_{AB} - x_C \operatorname{tg} \sigma_{CD}}{\operatorname{tg} \sigma_{AB} - \operatorname{tg} \sigma_{CD}}. \tag{6}$$

Odečteme-li od rovnice (6) na obou stranách jednou x_A a po druhé x_C, obdržíme po úpravě

$$x_P - x_A = \frac{y_C - y_A + (x_A - x_C)\operatorname{tg}\sigma_{CD}}{\operatorname{tg}\sigma_{AB} - \operatorname{tg}\sigma_{CD}} =$$

$$= \frac{\Delta y_{CA} + \Delta x_{AC}\operatorname{tg}\sigma_{CD}}{\operatorname{tg}\sigma_{AB} - \operatorname{tg}\sigma_{CD}}, \tag{7}$$

$$x_P - x_C = \frac{y_C - y_A + (x_A - x_C)\operatorname{tg}\sigma_{AB}}{\operatorname{tg}\sigma_{AB} - \operatorname{tg}\sigma_{CD}} =$$

$$= \frac{\Delta y_{CA} + \Delta x_{AC}\operatorname{tg}\sigma_{AB}}{\operatorname{tg}\sigma_{AB} - \operatorname{tg}\sigma_{CD}}. \tag{8}$$

Z rovnic (7) a (8) se vypočte souřadnice x_P dvakráte a dosazením do rovnic (3) a (4) se obdrží souřadnice y_P.

Řešení 2. Výpočet se převede na protínání vpřed. Z daných souřadnic se vypočtou jižníky σ_{AB}, σ_{AD}, σ_{DC} a délka strany s_{AD}. Vrcholové úhly se vypočtou jako rozdíly jižníků

$$\alpha = \sigma_{AD} - \sigma_{AB}, \quad \beta = \sigma_{DC} - \sigma_{DA}, \quad \gamma = \sigma_{BA} - \sigma_{CD} =$$
$$= 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

Řešením $\triangle\ ADP$ se vypočtou délky stran s_{AP} a s_{DP}

$$s_{AP} = s_{AD}\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \qquad s_{DP} = s_{AD}\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Z jižníků a délek stran se stanoví souřadnicové rozdíly

$$\Delta y_{PA} = s_{AP}\sin\sigma_{AP}, \quad \Delta x_{PA} = s_{AP}\sin\sigma_{AP},$$
$$\Delta y_{PD} = s_{DP}\sin\sigma_{DP}, \quad \Delta x_{PD} = s_{DP}\sin\sigma_{DP},$$
$$\sigma_{AP} = \sigma_{AB}, \quad \sigma_{DP} = \sigma_{DC}$$

a souřadnice bodu P se určí dvakrát:

$$y_P = y_A + \Delta y_{PA} = y_D + \Delta y_{PD},$$
$$x_P = x_A + \Delta x_{PA} = x_D + \Delta x_{PD}.$$

Řešení 3. Byl-li průsečík obou přímek v poli určen a při měření přímek odečten, vypočtou se souřadnice průsečíku jako bodu na přímce a to pro každou přímku zvlášť, jednou jako bodu na přímce AB, po druhé jako bodu na přímce CD.

Vlivem nevyhnutelných chyb se budou dvakráte vypočtené souřadnice bodu P lišit a za nejpravděpodobnější souřadnice se užije jejich aritmetický průměr. Rozdíly délek přímek vypočtených jednou ze souřadnic, po druhé přímo měřené musí být v přípustných mezích.

Postupovati lze též tak, že se souřadnice průsečíku vypočtou po prvé způsobem, jakoby průsečík nebyl vůbec v poli odečten, po druhé se stanoví souřadnice jako u bodu na přímce. Vypočtené souřadnice se mezi sebou porovnají a jsou-li v přípustných mezích, užijí se souřadnice vypočtené z druhého výpočtu a souřadnice stanovené z prvého výpočtu se považují jen za kontrolní.

Řešení 4. Přímka daná souřadnicemi dvou bodů má rovnici

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) = k\,(x - x_1)$$

a souřadnice průsečíku musí vyhověti dvěma takovým rovnicím

$$\begin{aligned} y_P - y_1 &= k_1\,(x_P - x_1) \\ y_P - y_2 &= k_2\,(x_P - x_2) \end{aligned} \quad \text{čili} \quad \begin{aligned} y_P - k_1x_P - y_1 + k_1x_1 &= 0, \\ y_P - k_2x_P - y_2 + k_2x_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{nebo} \quad \begin{aligned} y_P - k_1x_P + c_1 &= 0 \\ y_P - k_2x_P + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

jež řešeny, dávají souřadnice y_P a x_P bodu P.

Aby se nepočítalo s velkými čísly, zmenší se souřadnice bodů A, B, C a D o určitou konstantu y_k a x_k, nejlépe zaokrouhlenou na celá sta nebo desítky metrů a k vypočteným redukovaným souřadnicím bodu P se konstanty opět připočtou.

K výpočtu souřadnic lze užít též determinantů.

I,5. Výpočet souřadnic polygonových bodů. Body podrobné triangulace s průměrnou délkou stran 2 km nepostačí k zaměření všech předmětů měření a musí se přiměřeně zhustiti. Děje se tak volbou bodů, jež se stanoví protínáním. Jejich vzdálenost se volí od 0,5 do 1,2 km podle povahy území. Měření úhlů k určení jejich souřadnic se koná stejně jako u bodů podrobné trigonometrické sítě.

Mezi body o daných souřadnicích se volí polygonové body, které se spojují délkově i úhlově a tak se obdrží lomené čáry, jimž se říká polygonové pořady nebo tahy. Hustota polygonových bodů se volí taková, aby se získala síť pomocných měřických přímek, na níž je možno zaměřiti všechny předměty nalézající se na zemském povrchu kolmicemi do délky 30 m a u bodů méně důležitých do 50 m.

Celkem rozeznáváme:

1. hlavní polygonové pořady, které spojují trigonometrické body nedo body stanovené protínáním;

2. zauzlené polygonové pořady, které vycházejíce ze tří nebo více bodů trigonometrických nebo bodů stanovených protínáním, spojují se v jednom společném bodu;

3. vedlejší polygonové pořady, které spojují polygonové body hlavních pořadů nebo trigonometrický bod (bod určený protínáním) s některým polygonovým bodem. Sem patří též pořady spojující body vedlejších polygonových pořadů.

Strany polygonových pořadů se nazývají měřickými přímkami.

Pomocné měřické přímky se dělí na

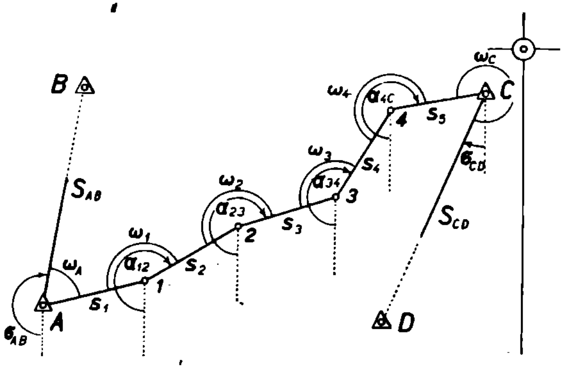
1. hlavní, které spojují polygonové body různých pořadů nebo body ležící na polygonových stranách;

2. vedlejší, které spojují body na hlavních a vedlejších pomocných měřických přímkách;

3. rayon, to je přímka vedená kolmo nebo šikmo k některé polygonové straně nebo pomocné měřické přímce.

Polygonový pořad má mezi danými body probíhati pokud možno přímo a jen v nepříznivých případech smí být i silně zalomený nebo může míti tvar uzavřeného obrazce.

Pro výpočet souřadnic bodů polygonových pořadů je nutno znáti souřadnice počátečního a koncového bodu pořadu, případně též souřadnice bodů, na něž se pořad úhlově připojuje. V poli se měří délky stran a vrcholové úhly. Délky se měří přímo pásmem nebo latí nebo opticky. Polygonový pořad je přeurčený a počet nadbytečných prvků se užije k vyrovnání úhlů a souřadnicových rozdílů.



Obr. 13. Polygonový pořad oboustranně usměrněný.

Polygonové pořady, které spojují vzdálené body mezi sebou, budeme v dalším nazývati dálkovými na rozdíl od uzavřených polygonových pořadů (obrazců). V dalším výkladu bude podáno povšechné řešení.

Výpočet a vyrovnání polygonového pořadu. (obr. 13). Jsou dány body A a C souřadnicemi, mezi nimiž je volen polygonový pořad $A1234C$. Pro úhlové připojení bylo v bodech A a C zaměřeno na body B a D, jichž souřadnice jsou též dány. V poli byly měřeny délky s_1, s_2 až s_5 a vrcholové úhly ω, případně jejich doplňky ($360° - \omega$), tudíž úhly $\omega_A, \omega_1, \ldots$ až ω_C. Je vypočísti souřadnice bodů *1* až *4*.

Podle obrazce je to případ oboustranně usměrněného pořadu. Pro výpočet souřadnicových rozdílů je nutno znáti délky a jižníky měřených stran. Pro výpočet jižníků vyjdeme od jižníků trigonometrických stran, vypočtených ze souřadnic:

$$\operatorname{tg} \sigma_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad \sigma_{AB} = \ldots, \quad \operatorname{tg} \sigma_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C},$$

$$\sigma_{CD} = \ldots$$

a výpočet kontrolujeme 45stupňovou zkouškou. Současně s jižníky vypočteme délky připojovacích stran S_{AB} a S_{CD}.

Jižníky měřených stran odvodíme z jižníku dané strany a vrcholových úhlů měřených po levé straně polygonového pořadu. Vyjdeme-li od bodu A směrem k bodu C počítáme s úhly ω a vyšli-li bychom od bodu C směrem k bodu A, užijí se k výpočtu jižníků doplňky ($360° - \omega$). Podle obr. 13 je zřejmo, že

$$\begin{aligned}
\alpha_{A1} &= \sigma_{AB} + \omega_A \\
\alpha_{12} &= \alpha_{A1} + \omega_1 - 180° \\
\alpha_{23} &= \alpha_{12} + \omega_2 - 180° \\
\alpha_{34} &= \alpha_{23} + \omega_3 - 180° \qquad [\omega] = \omega_A + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \\
\alpha_{4C} &= \alpha_{34} + \omega_4 - 180° \qquad\qquad + \omega_4 + \omega_C \\
\alpha_{CD} &= \alpha_{4C} + \omega_C - 180° \\
\hline
\alpha_{CD} &= \sigma_{AB} + [\omega] - i \,.\, 180° \text{ čili } \alpha_{CD} - \sigma_{AB} = [\omega] - i \,.\, 180°.
\end{aligned}$$

Kdyby nebylo nevyhnutelných chyb v měřených úhlech, musel by se pozorovaný jižník α_{CD} rovnati σ_{CD}. Vzniklá odchylka může být kladná i záporná

$$\sigma_{CD} - \alpha_{CD} = \pm O\mu$$

čili

$$O_\mu = (\sigma_{CD} + i \,.\, 180°) - (\sigma_{AB} + [\omega]).$$

Tomuto rozdílu se říká úhlová odchylka a v pozemkovém katastru nesmí překročiti mez danou vzorcem $\Delta u'' = 60'' \sqrt{n}$ pro šedesátinné dělení a pro setinné dělení se užije odchylka 3,1násobná. Činitel n značí počet vrcholových úhlů, počítaje v to úhly ω_A a ω_C, měřené v počátečním a koncovém bodu pořadu.

Pro číselný výpočet se sečtou všechny vrcholové úhly polygonové, ležící po levé straně a součet se připočte k počátečnímu jižníku dané strany σ_{AB}. Odečtením $i \,.\, 180°$ má se obdržeti jižník poslední strany σ_{CD}. Vznikne-li odchylka, musí být v mezích Δu. Je-li v mezích, opraví se vrcholové úhly. Podle katastrálních předpisů se rozdělí úhlová odchylka na všechny vrcholové úhly stejnoměrně, když poměr nejkratší polygonové strany ku nejdelší je větší nebo aspoň rovný jedné čtvrtině. Připojovací strany trigonometrické se při tom neuvažují.

Je-li poměr nejkratší strany polygonové ku nejdelší menší než jedna čtvrtina, rozdělí se úhlová odchylka úměrně převratné hodnotě délek úhlových ramen (stran). Oprava vrcholového úhlu se pak rovná součtu oprav připadajících na obě ramena. To se týká všech polygonových úhlů, tudíž i připojovacích úhlů v počátečním a koncovém bodě pořadu. K rozdělení odchylek vypočtou se poměry stran:

$$\frac{1}{S_{AB}}, \frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \ldots, \frac{1}{S_{CD}}.$$

Abychom počítali s celými čísly, klademe v čitateli místo 1 číslo 1000 a délky zaokrouhlujeme na celé metry, případně i celé desetimetry. Podíl se zaokrouhluje na celé jednotky. Tak obdržíme:

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{1000}{S_{AB}} = \mu_A & \\
& \mu_A + \mu_1 = \nu_A, \quad \vartheta\omega_A = \nu_A \,.\, p'' \\
\dfrac{1000}{s_1} = \mu_1 & \\
& \mu_1 + \mu_2 = \nu_1, \quad \vartheta\omega_1 = \nu_1 \,.\, p'' \\
\dfrac{1000}{s_2} = \mu_2 & \\
& \mu_2 + \mu_3 = \nu_2, \quad \vartheta\omega_2 = \nu_2 \,.\, p'' \\
\dfrac{1000}{s_3} = \mu_3 & \\
& \mu_3 + \mu_4 = \nu_3, \quad \vartheta\omega_3 = \nu_3 \,.\, p'' \\
\dfrac{1000}{s_4} = \mu_4 & \\
& \mu_4 + \mu_5 = \nu_4, \quad \vartheta\omega_4 = \nu_4 \,.\, p'' \\
\dfrac{1000}{s_5} = \mu_5 & \\
& \mu_5 + \mu_C = \nu_C, \quad \vartheta\omega_C = \nu_C \,.\, p'' \\
\dfrac{1000}{S_{CD}} = \mu_C & \\
\hline
& \text{Součet} = [\nu] \quad [\vartheta\omega] = O''\mu
\end{array}
$$

$$\frac{O''\mu}{[\nu]} = p''.$$

Činitel ν_A pro výpočet oprav úhlu ω_A se rovná součtu obou poměrů úhlových ramen $\omega_A = \mu_A + \mu_1$. Podobně je tomu u každého dalšího úhlu. Oprava pro délkovou jednotku se vypočte ze vzorce $\pm\, O''\mu : [\nu] = p''$ a oprava pro úhel ω_A je $\vartheta\omega_A = \nu_A \,.\, p''$. Podobně je tomu u ostatních úhlů. Zkouškou výpočtu je součet $[\vartheta\omega] = \pm\, O''\mu$. Připočtením oprav obdržíme opravené polygonové úhly ω°:

$$\omega_A{}^\circ = \omega_A + \vartheta\omega_A,\ \omega_1{}^\circ = \omega_1 + \vartheta\omega_1,\ \ldots,\ \omega_C{}^\circ = \omega_C + \vartheta\omega_C.$$

Z opravených polygonových úhlů se vypočtou postupně jižníky stran a musí se dospěti k hodnotě jižníku σ_{CD}:

$$\begin{aligned}
\alpha_{A1} &= \sigma_{AB} + \omega_A{}^\circ \\
\alpha_{12} &= \alpha_{A1} + \omega_1{}^\circ - 180^\circ \\
\alpha_{23} &= \alpha_{12} + \omega_2{}^\circ - 180^\circ \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{CD} &= \alpha_{4C} + \omega_C{}^\circ - 180^\circ = \sigma_{CD}.
\end{aligned}$$

Vypočtené jižníky považujeme za vyrovnané a užijí se i k výpočtu jižníků vedlejších polygonových pořadů nebo pomocných měřických přímek, případně rayonů.

Z vypočtených jižníků a měřených stran se vypočtou přibližné souřadnicové rozdíly, které nazveme $\Delta y'$ a $\Delta x'$. Jejich znaménko je dáno znaménkem funkce sinu nebo kosinu:

$$\begin{aligned}
\Delta y'_{1A} &= y'_1 - y_A = s_1 \sin \alpha_{A1} \\
\Delta y'_{21} &= y'_2 - y'_1 = s_2 \sin \alpha_{12} \\
\Delta y'_{32} &= y'_3 - y'_2 = s_3 \sin \alpha_{23} \\
\Delta y'_{43} &= y'_4 - y'_3 = s_4 \sin \alpha_{34} \\
\Delta y'_{C4} &= y'_C - y'_4 = s_5 \sin \alpha_{4C} \\
\hline
[\Delta y'] &= y_C - y_A = [s \sin \alpha]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta x'_{1A} &= x'_1 - x_A = s_1 \cos \alpha_{A1} \\
\Delta x'_{21} &= x'_2 - x'_1 = s_2 \cos \alpha_{12} \\
\Delta x'_{32} &= x'_3 - x'_2 = s_3 \cos \alpha_{23} \\
\Delta x'_{43} &= x'_4 - x'_3 = s_4 \cos \alpha_{34} \\
\Delta x'_{C4} &= x_C - x'_4 = s_5 \cos \alpha_{4C} \\
\hline
[\Delta x'] &= x_C - x_A = [s \cos \alpha]
\end{aligned}$$

Součet souřadnicových rozdílů by se měl rovnat rozdílům souřadnic počátečního a koncového bodu pořadu

$$[y_C - y_A) = [s \sin \alpha], \quad (x_C - x_A) = [s \cos \alpha],$$

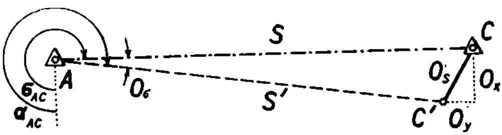
avšak vlivem nevyhnutelných chyb v měřených délkách a úhlech a též vlivem jiných příčin tomu tak nebude. Odečteme-li součet rozdílů od rozdílů souřadnic počátečního a koncového bodu pořadu, obdržíme odchylku, kterou označíme O_y a O_x:

$$(y_C - y_A) - [s \,.\, \sin\alpha] = \pm O_y,$$
$$(x_C - x_A) - [s \,.\, \cos\alpha] = \pm O_x.$$

Takto zjištěné souřadnicové odchylky jsou současně zkouškou založení a měření polygonového pořadu. Pro posouzení uvedených odchylek se vypočte ze souřadnic daných bodů jižník σ_{AC} a délka S_{AC}:

$$\operatorname{tg} \sigma_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \qquad \sigma_{AC} = \dots \text{ se zkouškou 45stupňovou,}$$

$$S_{AC} = \frac{y_C - y_A}{\sin \sigma_{AC}} = \frac{x_C - x_A}{\cos \sigma_{AC}}.$$



Obr. 14. Délková a směrová odchylka v polygonovém pořadu.

Obdobně vypočteme z přibližných souřadnicových rozdílů:

$$\operatorname{tg} \alpha_{AC} = \frac{[s \,.\, \sin\alpha]}{[s \,.\, \cos\alpha]} = \frac{[\Delta y']}{[\Delta x']} \qquad \alpha_{AC} = \dots \text{ se zkouškou 45stupňovou.}$$

$$S'_{AC} = \frac{[\Delta y']}{\sin \alpha_{AC}} = \frac{[\Delta x']}{\cos \alpha_{AC}}.$$

Znázorněním polohy bodu C ve větším měřítku, jednou podle daných souřadnic a po druhé podle přibližných souřadnicových rozdílů, neobdržíme jeden bod, nýbrž dva body, jež budou od sebe vzdáleny o odchylky O_y a O_x (obr. 14).

Měřítkem pro posouzení přípustnosti obou odchylek je směrová a délková odchylka koncového bodu pořadu. Délková odchylka se vypočte jako rozdíl $O_s = S - S'$ u přímých pořadů a $O_s = \sqrt{O_y^2 + O_x^2}$ u zalomených pořadů. Podle měřických předpisů nesmí překročiti největší přípustnou odchylku vypočtenou ze vzorce

$$\Delta S = 0{,}012\sqrt{[s]} + 0{,}06,$$

kde $[s]$ je součet polygonových stran.

Směrová odchylka $O_\sigma = \sigma - \alpha$ nesmí přesahovati hodnotu vypočtenou ze vzorce

$$\Delta\sigma = \frac{2\,([s] + 100)}{S} \text{ v minutách,}$$

kde S je vypočtená vzdálenost ze souřadnic počátečního a koncového bodu pořadu.

Jsou-li obě odchylky v přípustných mezích, rozdělí se odchylky v souřadnicových rozdílech podle velikosti směrové odchylky takto:

a) když O_σ je menší než 60″, rozdělí se odchylky úměrně délkám stran polygonového pořadu. K tomu se užije vzorců

$$\pm\, dy_n = s_n \frac{\pm O_y}{[s]}, \qquad \pm\, dx_n = s_n \frac{\pm O_x}{[s]},$$

kde dy a dx jsou opravy, $[s]$ je součet stran polygonového pořadu a n pořadové číslo strany;

b) je-li O_σ větší než 60″, vypočtou se opravy dy a dx podle vzorců

$$\pm\, dy_n = z_n \,.\, s_n \frac{\pm O_y}{[z\,.\,s]}, \qquad \pm\, dx_n = z_n \,.\, s_n \frac{\pm O_x}{[z\,.\,s]},$$

kde mají písmena týž význam, pouze součinitel z_n je závislý na počtu a pořadí stran, $[z\,.\,s]$ je součet všech $z\,.\,s$. Součinitel z se určuje ze vzorce $z = r\,(n - r)$, kde r je pořadové číslo strany a n počet vrcholů. Vzorce se užívá jen pro $n = 7$ vrcholům. Je-li $n > 7$, je pro první a poslední stranu $z = 3$, druhou a předposlední $z = 5$ a pro všechny ostatní je $z = 6$. Pro 4 strany jsou činitelé z (2, 3, 3, 2), pro 6 stran (3, 5, 6, 6, 5, 3), pro 7 a více stran (3, 5, 6, 6, …, 6, 6, 5, 3). Po výpočtu souřadnicových oprav dy a dx opraví se souřadnicové rozdíly

$$
\begin{aligned}
\Delta y_{1A} &= \Delta y'_{1A} + \mathrm{d}y_1 & \qquad \Delta x_{1A} &= \Delta x'_{1A} + \mathrm{d}x_1 \\
\Delta y_{21} &= \Delta y'_{21} + \mathrm{d}y_2 & \qquad \Delta x_{21} &= \Delta x'_{21} + \mathrm{d}x_2 \\
&\dots\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\dots \\
\Delta y_{C4} &= \Delta y'_{C4} + \mathrm{d}y_5 & \qquad \Delta x_{C4} &= \Delta x'_{C4} + \mathrm{d}x_5
\end{aligned}
$$

a vyrovnané souřadnice polygonových bodů jsou rovny

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_A + \Delta y_{1A} & \qquad x_1 &= x_A + \Delta x_{1A} \\
y_2 &= y_1 + \Delta y_{21} & \qquad x_2 &= x_1 + \Delta x_{21} \\
&\dots\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\dots \\
y_C &= y_4 + \Delta y_{C4} & \qquad x_C &= x_4 + \Delta x_{C4} \\
\hline
y_C &= y_A + [\Delta y] & \qquad x_C &= x_A + [\Delta x]
\end{aligned}
$$

Postupným připočítáváním opravených souřadnicových rozdílů musíme dospěti k daným souřadnicím bodu C.

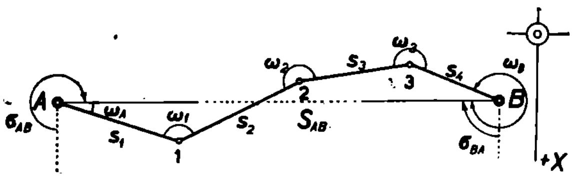
Místo souřadnic bodů B a D mohou být dány jen jižníky a délky stran S_{AB} a S_{CD}, jak je tomu často při počítání souřadnic bodů v polygonové síti.

Kromě uvedeného druhu polygonových pořadů, vyskytují se též takové pořady, u nichž schází některé prvky nutné pro vyrovnání souřadnic. V dalším bude podán stručný výklad o tom, jak se vypočtou.

Polygonový pořad s usměrněním jen v jednom bodě (obr. 13). Jsou dány souřadnice jen tří bodů A, B a C. Úhlově byl připojen jen ke straně AB. V bodě C není připojovací úhel ω_C měřen, protože není s bodu C na bod D vidět nebo bod D chybí vůbec.

Poněvadž chybí úhlový závěr, odpadá vyrovnání polygonových úhlů a vypočtou se jižníky stran způsobem, jakoby polygonové úhly byly vyrovnány. Nato se vypočtou přibližné souřadnicové rozdíly a jejich vyrovnání se provede vzhledem k souřadnicím daných bodů A a C stejně jako tomu bylo u oboustranně usměrněného pořadu.

Volný polygonový pořad. Je-li polygonový pořad připojen k bodu o známých souřadnicích a ke straně o známém jižníku a konec pořadu není připojen k nijakému bodu o daných souřadnicích, jde o volný pořad, který nelze vyrovnat ani úhlově, ani délkově. Výpočet se provede jako u pořadu usměrněného. Přibližné souřadnicové rozdíly se považují za konečné. Takové pořady se volí krátké, o dvou nebo o třech stranách, aby se ve vypočtených souřadnicích neuplatnily tolik chyby v měřených úhlech a délkách.



Obr. 15. Polygonový pořad úhlově uzavřený.

Různé případy polygonových pořadů. Polygonový pořad může být vložen mezi dva body tak, že nastanou případy:

a) s počátečního bodu je vidět na koncový bod a opačně,

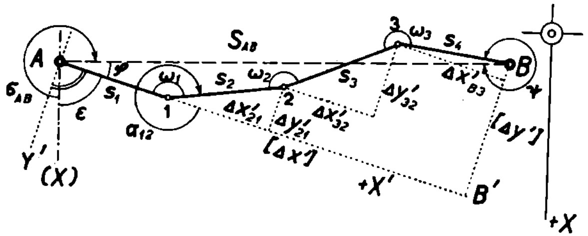
b) s počátečního bodu je vidět na koncový bod, nikoli opačně,

c) s počátečního bodu není vidět na koncový bod, ani opačně.

Postup výpočtu se volí též se zřetelem k tomu, zda jsou či nejsou dány souřadnice počátečního a koncového bodu pořadu.

A) *Případy, kdy jsou dány souřadnice bodů A a B.*

K případu a) (obr. 15). Polygonový pořad může mít tvar uzavřeného nepravidelného n-úhelníka nebo zvrhlého obrazce, v němž polygonové strany protínají spojnici počátečního a koncového bodu. Podle obrazce se snadno pozná, které úhly jsou vnitřní a které vnější, při čemž objíždíme obvod obrazce vždy po levé straně ve směru počítání pořadu. V polygonovém pořadu jsou měřeny všechny úhly ω_A, ω_1, ω_2, ω_3, ω_B a délky stran s_1 až s_4. Vrcholové úhly ω se vyrovnají na hodnotu $n \,.\, 180°$, neboť jejich součet má být $\omega_A + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_B = n \,.\, 180°$. Vycházejíce od jižníku strany σ_{AB} vypočtou se jižníky polygonových stran a kontrolou výpočtu je jižník σ_{BA} strany AB, který se liší od σ_{AB} o 180°. Strana S_{AB} a její oboustranné jižníky tu slouží k usměrnění



Obr. 16. Polygonový pořad úhlově neuzavřený.

polygonového pořadu a k vyrovnání souřadnicových rozdílů. Postup výpočtu je úplně stejný jako u oboustranně usměrněného pořadu.

K případu b). Chybějící úhel ve vrcholu B se vypočte jako doplněk na $n \,.\, 180°$. Při výpočtu odpadá vyrovnání polygonových úhlů a další početní postup je stejný jako v případě a).

K případu c) (obr. 16). Neznámé úhly φ a ψ v počátečním a koncovém bodě se vypočtou ze souřadnicových rozdílů ve zvolené pomocné soustavě souřadnicové. Počátek souřadnicové soustavy zvolíme v bodě A a pomocnou osu $+X'$ ztotožníme s prvou stranou pořadu. Osa $+Y'$ je k ní kolmá. Místo jižníků užijeme směrových úhlů, počítaných od rovnoběžek s osou $+X'$. Směrový úhel prvé strany α'_{A1} je roven 360°, druhé strany $\alpha'_{12} = 360° + \omega_1 - 180°$, atd. jako při výpočtu jižníků. Nato se vypočtou souřadnicové rozdíly

$\Delta y'_n$ a $\Delta x'_n$ obvyklým způsobem. Úhel φ ve vrcholu A se vypočte z pravoúhlého $\triangle\, ABB'$, jehož odvěsny jsou $[\Delta y']$ a $[\Delta x']$. Spojnice $\overline{AB}$ je přeponou a její délka se vypočte ze vzorce

$$S'_{AB} = \sqrt{[\Delta y']^2 + [\Delta x']^2}.$$

Úhel φ je dán výrazem

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{[\Delta y']}{[\Delta x']}, \qquad \varphi = \dots$$

Úhel ψ ve vrcholu B leží po levé straně uzavřeného polygonu a rovná se

$$\psi = n \,.\, 180^\circ - (\varphi + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3).$$

V našem případě je uzavřeným polygonem zvrhlý pětiúhelník a úhel

$$\psi = 540^\circ - (\varphi + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3).$$

Úhel φ je ostrý a jeho znaménko se zřetelem k dalšímu výpočtu je závislé na znaméncích souřadnicových rozdílů $[\Delta y']$ a $[\Delta x']$.

Ze souřadnic daných bodů se vypočte jižník a délka strany AB:

$$\operatorname{tg} \sigma_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \qquad \sigma_{AB} = \dots,$$

$$S_{AB} = \frac{y_B - y_A}{\sin \sigma_{AB}} = \frac{x_B - x_A}{\cos \sigma_{AB}}.$$

Délka S_{AB} se porovná s délkou S'_{AB} a případný rozdíl musí být v přípustných mezích.

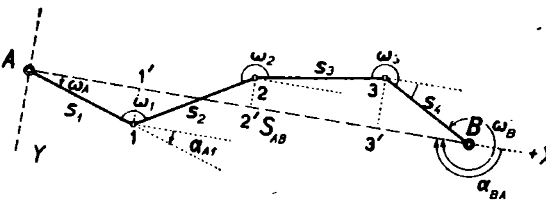
Souřadnicová soustava se nyní otočí o úhel ε tak, aby osa $+X'$ se ztotožnila se směrem (X) rovnoběžným s kladnou částí osy X, v níž jsou dány souřadnice bodů A a B. Podle obrazce 16 rovná se otočný úhel

$$\varepsilon = 360^\circ - (\sigma_{AB} + \varphi).$$

Jižníky polygonových stran se vypočtou z jižníku strany AB a úhlů φ:

$$\alpha_{A1} = \sigma_{AB} + \varphi$$
$$\alpha_{12} = \alpha_{A1} + \omega_1 - 180^\circ$$
$$\alpha_{23} = \alpha_{12} + \omega_2 - 180^\circ$$
$$\alpha_{3B} = \alpha_{23} + \omega_3 - 180^\circ$$
$$\alpha_{BA} = \alpha_{3B} + \psi - 180^\circ - (360^\circ) = \sigma_{AB} + 180^\circ = \sigma_{BA}.$$

Překročí-li číselná hodnota vypočteného směrníku α 360°, odečte se 360°.



Obr. 17. Úhlově uzavřený polygonový pořad vložený mezi body bez souřadnic.

Jižník α_{BA} se vypočte jen pro kontrolu správného výpočtu jižníků.

Z vypočtených jižníků a měřených délek stran se vypočtou přibližné souřadnicové rozdíly, počínaje od bodu A směrem k B. Vlivem nevyhnutelných chyb v úhlech a délkách se nebudou přesně shodovat součty souřadnicových rozdílů s rozdíly souřadnic daných bodů, jak by mělo být

$$[\Delta y] = \Delta y_{BA}, \quad [\Delta x] = \Delta x_{BA}.$$

Vzniklé odchylky musí být v přípustných mezích a vyrovnají se způsobem uvedeným na str. 36 a 37.

B) Případy, kdy souřadnice bodů A a B nejsou známy.

K případu a) *a* b) (obr. 17). V případech, kdy nejsou známy souřadnice počátečního a koncového bodu pořadu, zvolí se pomocná soustava souřadnicová YX tak, aby se osa $+X$ ztotožnila se spojnicí AB a počátek soustavy byl v bodě A. Osa $+Y$ je nalevo a $-Y$ napravo od počátku. Bod A jako počátek soustavy má souřadnice $y_A = 0$, $x_A = 0$.

Po vyrovnání úhlů v případě a) nebo po stanovení úhlu ω_B v případě b) se přikročí k výpočtu směrových úhlů polygonových stran, počítaných od rovnoběžek se zvolenou osou $+X$:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{AB} &= 360^\circ \\
\alpha_{A1} &= \omega_A \\
\alpha_{12} &= \alpha_{A1} + 180^\circ + \omega_1 \\
\alpha_{23} &= \alpha_{12} - 180^\circ + \omega_2 \\
\alpha_{3B} &= \alpha_{23} - 180^\circ + \omega_3
\end{aligned}
$$

a pro kontrolu:

$$\alpha_{BA} = \alpha_{3B} - 180^\circ + \omega_B.$$

Poněvadž směrník strany AB je roven 0°, musí se směrník strany BA rovnat 180°, což je kontrolou výpočtu směrníků.

Ze směrníků a délek stran se vypočtou souřadnicové rozdíly:

$$
\begin{array}{ll}
\Delta y_{1A} = s_{A1} \sin \alpha_{A1} & \Delta x_{1A} = s_{A1} \cos \alpha_{A1} \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
\Delta y_{B3} = y_{3B} \sin \alpha_{3B} & \Delta x_{B3} = s_{3B} \cos \alpha_{3B} \\
\hline
[\Delta y] = 0 & [\Delta x] = S_{AB}
\end{array}
$$

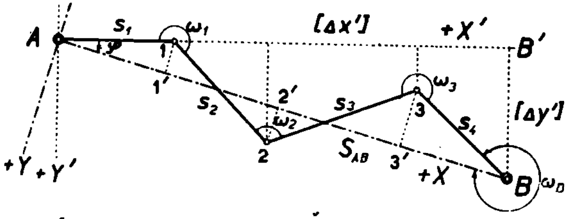
a z nich souřadnice bodů:

$$
\begin{array}{lll}
A: & y_A = 0, & x_A = 0, \\
1: & y_1 = y_A + \Delta y_{1A} = 11', & x_1 = x_A + \Delta x_{1A} = A1', \\
2: & y_2 = y_1 + \Delta y_{21} = 22', & x_2 = x_1 + \Delta x_{21} = A2', \\
3: & y_3 = y_2 + \Delta y_{32} = 33', & x_3 = x_2 + \Delta x_{32} = A3', \\
B: & y_B = y_3 + \Delta y_{B3} = 0, & x_B = x_3 + \Delta x_{B3} = S_{AB}.
\end{array}
$$

Postupným připočítáváním souřadnicových rozdílů k souřadnicím bodu A dospějeme k souřadnicím bodu B. Kontrolou správného výpočtu je součet pořadnicových rozdílů, který se musí rovnat nule, neboť od bodu A na ose X vycházíme a vracíme se zpět do bodu B na téže ose. Součet úsečkových rozdílů $[\Delta x]$ dává délku spojnice S_{AB}.

Tím jsou vypočteny souřadnice polygonových bodů vzhledem k spojnici počátečního a koncového bodu.

Kdyby byla vzdálenost AB jinak známa a na její délku by bylo vyrovnat polygonový pořad, násobí se délka každé polygonové strany podílem $\frac{S}{S'}$, kde S je daná délka a S' délka vypočtená ze souřadnicových rozdílů polygonového pořadu. Tento postup vyžaduje tudíž ještě druhý výpočet souřadnicových rozdílů s redukovanými stranami.



Obr. 18. Úhlově neuzavřený polygonový pořad vložený mezi body bez souřadnic.

K případu c) (obr. 18). K výpočtu pořadu zvolíme pomocnou souřadnicovou soustavu $Y'X'$ s počátkem v bodě A a jejíž osa $+X'$ se ztotožní s prvou stranou $A1$. Podle obrazce určíme snadno velikosti směrových úhlů α':

$$\alpha'_{A1} = 360° = 0°, \qquad \alpha'_{23} = \alpha'_{12} - 180° + \omega_2,$$
$$\alpha'_{12} = \alpha'_{A1} - 180° + \omega_1, \quad \alpha'_{3B} = \alpha'_{23} - 180° + \omega_3.$$

Souřadnicové rozdíly $\Delta y'$ a $\Delta x'$ jsou:

$$\Delta y'_{1A} = s_{A1} \,.\, \sin \alpha'_{A1}, \qquad \Delta x'_{1A} = s_{A1} \,.\, \cos \alpha'_{A1},$$
$$\text{atd.} \qquad\qquad \text{atd.}$$
$$\Delta y'_{B3} = s_{3B} \,.\, \sin \alpha'_{3B}, \qquad \Delta x'_{B3} = s_{3B} \,.\, \cos \alpha'_{3B},$$
$$[\Delta y'] = [s \,.\, \sin \alpha'], \qquad [\Delta x'] = [s \,.\, \cos \alpha'].$$

Souřadnicové rozdíly bodu 1 se rovnají:

$$\Delta y'_{1A} = 0, \; \Delta x'_{1A} = s_{A1}.$$

Součty $[\Delta y']$ a $[\Delta x']$ jsou odvěsnami pravoúhlého $\triangle ABB'$, z něhož se vypočte délka spojnice

$$S_{AB} = \sqrt{[\Delta y']^2 + [\Delta x']^2}$$

a úhel φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{[\Delta y']}{[\Delta x']}, \qquad \varphi = \ldots$$

Podle obrazce vidíme, že součet $[\Delta y']$ je záporný a tím vyjde úhel φ též záporný.

Chceme-li obdržeti souřadnice bodů vztažené ke spojnici strany AB, otočíme pomocnou soustavu $Y'X'$ do polohy YX o úhel $(360° - \varphi)$ čili se zřetelem k záporné hodnotě úhlu o absolutní velikost úhlu φ ve směru chodu ručiček hodinových tak, aby osa $+X'$ se ztotožnila se směrem AB čili s novou osou $+X$.

V otočené soustavě bude velikost směrníků α:

$$\alpha_{A1} = 360° - \varphi, \qquad \alpha_{23} = \alpha_{12} - 180° + \omega_2,$$
$$\alpha_{12} = \alpha_{A1} - 180° + \omega_1, \qquad \alpha_{3B} = \alpha_{23} - 180° + \omega_3$$

a souřadnicové rozdíly:

$$\begin{array}{cc}
\Delta y_{1A} = s_{A1} \,.\, \sin \alpha_{A1}, & \Delta x_{1A} = s_{A1} \,.\, \cos \alpha_{A1}, \\
\text{atd.} & \text{atd.} \\
\Delta y_{B3} = s_{3B} \,.\, \sin \alpha_{3B}, & \Delta x_{B3} = s_{3B} \,.\, \cos \alpha_{3B} \\
\hline
[\Delta y] = [s \,.\, \sin \alpha] = 0, & [\Delta x] = [s \,.\, \cos \alpha] = S_{AB}.
\end{array}$$

Součet $[\Delta y]$ musí se rovnat nule a součet $[\Delta x]$ rovná se délce strany S_{AB}, vypočtené při prvém výpočtu v soustavě $Y'X'$.

Je-li délka S_{AB} známa a na ni chceme vyrovnat polygonový pořad, násobíme po provedení prvého výpočtu v soustavě $Y'X'$ délky polygonových stran podílem $\frac{S}{S'}$ a výpočet v soustavě YX se provede s redukovanými stranami, jako v případě předcházejícím.

Poznámka k vyrovnání polygonových pořadů. **Každý polygonový pořad dálkový nebo uzavřený se dá vypočísti v dané nebo v libovolně zvolené soustavě souřadnicové. Jsou-li v pořadu měřeny všechny úhly a délky, máme pro výpočet a vyrovnání tři přebytečné veličiny. U n-úhelníka je třeba znáti pro první tři body 3 veličiny a pro každý další bod 2 veličiny čili pro $(n - 3)$ bodů po 2 veličinách. Pro n bodů je nutno znáti $3 + (n - 3)\,2 = 2n - 3$ veličiny. Aby se dal polygonový pořad vypočísti (nikoli vyrovnati) nebylo by třeba měřiti 3 veličiny a to buď jednu stranu a dva úhly nebo dvě strany a jeden úhel nebo 3 úhly, avšak nikdy to nesmí být tři strany. Jsou-li měřeny všechny veličiny, je tím dána možnost sestaviti podmínky pro vyrovnání:**

1. u uzavřeného polygonu:

a) $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_{n-1} + \omega_n = (n - 2)\,.\,180°$,
b) $[\Delta x] = 0 = [s\,.\cos\alpha]$,
c) $[\Delta y] = 0 = [s\,.\sin\alpha]$;

2. u dálkového a oboustranně usměrněného polygonu:

a) $\sigma_P + \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n = \sigma_K - n\,.\,180°$,
b) $[\Delta x] = \Delta x_{KP}$,
c) $[\Delta y] = \Delta y_{KP}$.

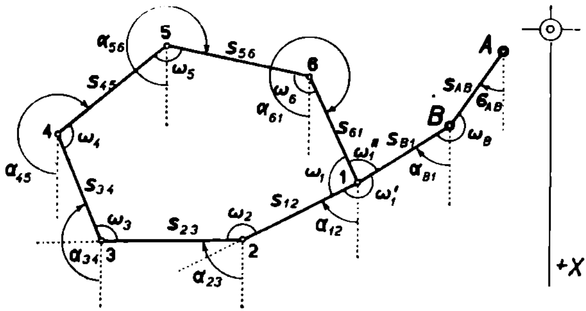
U uzavřeného polygonu znamená podmínka a) a b), že součet průmětů stran na každou osu musí být nula, poněvadž se vracíme zpět k počátku, kdežto u dálkových polygonů musí se součet průmětů stran na každou osu rovnat rozdílu souřadnic počátečního a koncového bodu pořadu.

Přebytečné veličiny slouží jak k vyrovnání polygonového pořadu, tak ke kontrole a za měřítko přesnosti měření. Veličiny dané i měřené měly by vyhověti všem podmínkám shora uvedeným, vlivem nevyhnutelných chyb vzniknou však odchylky, lišící se více nebo méně od nuly.

1,6. Uzavřený polygonový pořad (obr. 19). Je dáno šest bodů, které byly spojeny v uzavřený polygonový pořad $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_1$ a ve všech byly měřeny vrcholové úhly ω a jejich doplňky na 360°. Dále byly změřeny všechny délky s_{12} až s_{61}.

Pro výpočet jsou dány buď:

1. souřadnice bodů *1* a *2* nebo
2. souřadnice bodu *1* a jižník $\sigma_{12} = \alpha_{12}$ strany P_1P_2 nebo
3. souřadnice bodů A a B, jsoucích mimo obvod uzavřeného obrazce, který je k nim připojen délkově a úhlově.



Obr. 19. Uzavřený polygonový pořad.

Ve všech třech případech se nejdříve přesvědčíme, zda měřené úhly v uzavřeném obrazci vyhovují podmínce

$$[\omega] - (n - 2) \,.\, 180^\circ = 0.$$

Obdrží-li se místo nuly odchylka, která je v přípustných mezích, rozdělí se způsobem, jak bylo již uvedeno na str. 33. Nato se přikročí k výpočtu jižníků. V prvých dvou případech je postup stejný a vyjde se od jižníku strany s_{12}. Postupným určováním jižníků dalších stran se vrátíme zpět k prvé straně:

$$\sigma_{12} = \text{dán nebo vypočten}, \qquad \alpha_{45} = \alpha_{34} + 180^\circ - \omega_4,$$
$$\alpha_{23} = \sigma_{12} + 180^\circ - \omega_2, \qquad \alpha_{56} = \alpha_{45} + 180^\circ - \omega_5,$$
$$\alpha_{34} = \alpha_{23} + 180^\circ - \omega_3, \qquad \alpha_{61} = \alpha_{56} + 180^\circ - \omega_6,$$

a pro kontrolu

$$\alpha_{12} = \alpha_{61} + 180^\circ - \omega_1 = \sigma_{12}.$$

Místo připočítávání 180° lze 180° odečítat a obdržíme tytéž hodnoty. Nyní lze přikročiti k výpočtu souřadnicových rozdílů:

$$\Delta y_n = s_n \,.\, \sin \alpha_n \text{ a } \Delta x_n = s_n \,.\, \cos \alpha_n$$

a kontrolou výpočtu je

$$[\Delta y] = [s \,.\, \sin \alpha] = 0, \; [\Delta x] = [s \,.\, \cos \alpha] = 0.$$

Poněvadž nebude těmto podmínkám přesně vyhověno, vzniknou odchylky, jež musí být v přípustných mezích a rozdělí se stejným způsobem jako u oboustranně usměrněného polygonového pořadu.

Ve třetím případě, kdy se vyjde od jižníku strany AB, určíme stejným způsobem jižníky všech dalších stran a vrátíme se k jižníku strany S_{1B} nebo S_{12}.

Pro výpočet souřadnic se stanoví nejdříve souřadnice bodu *1* z připojovacího pořadu *AB1*, počítaného jako volný pořad. Pak se počítají souřadnicové rozdíly uzavřeného pořadu.

Kdyby nebyly dány souřadnice nebo jižníky některé strany, vypočítaly by se směrníky a souřadnice bodů uzavřeného obrazce v pomocné souřadnicové soustavě zvolené tak, že počátek soustavy by se zvolil v některém vrcholu polygonu a osa $+X$ by se ztotožnila s jednou stranou, vrcholem procházející. Nejlépe se k tomu hodí nejdelší strana polygonu. Výpočet je stejný jako v případech předešlých.

1,7. Zauzlené pořady. Polygonové pořady vycházející z trigonometrických bodů nebo z bodů určených protínáním a spojující se v jednom bodě, nazýváme zauzlenými a společný bod uzlovým. Každý polygonový pořad zauzlený se nejdříve počítá jako pořad s usměrněním jen na počátku a vypočtou se přibližné souřadnice uzlového bodu, které se vyrovnají. Po úhlovém vyrovnání připojovací strany a souřadnic uzlového bodu se výpočet rozpadá na tolik pořadů, kolik se jich v uzlovém bodě spojuje.

Jak se vyrovná jižník vyrovnávací strany a souřadnice uzlového bodu, je nutno poukázat na odbornou literaturu a zvláště na *Návod A pro katastrální měřické práce.*

Zauzlené pořady se mohou spojovati též ve dvou a několika bodech uzlových, u nichž je výpočet složitější a postup výpočtu je uveden v knize: *J. Petřík: Úvod do polygonálních a trigonometrických výpočtů*, Praha 1920 a *Dr Frant. Fiala: Geodetické počtářství* II. b, Praha 1947.