Nekonečno v matematice

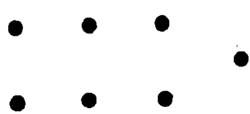
První část

In: Bedřich Pospíšil (author): Nekonečno v matematice. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1949. pp. 7–68.

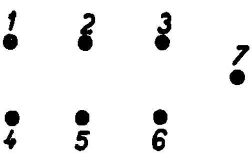
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403226

PRVNÍ ČÁST

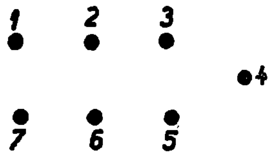
1,1. Spočetnost. Přirozenými čísly rozumíme čísla 1, 2, 3, 4, ... atd. do nekonečna. Užívá se jich k počítání konečných množin. Co to znamená na př., že množina M má 7 prvků? Znamená to, že je možno prvky množiny M očíslovat přirozenými čísly od jedné až do sedmi (včetně); při tom každému prvku množiny M jsme přiřadili přesně jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; různé prvky mají různá přirozená čísla a všecka čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 jsme při číslování uplatnili. Na př. množina teček v obr. 1 má 7 prvků; lze ji totiž očíslovat na př. takto:



Obr. 1.



anebo třeba

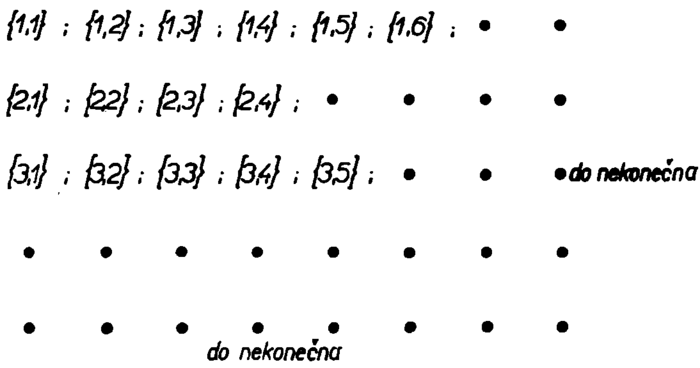


Obr. 2. Obr. 3.

Obecně řekneme, že množina M má m prvků, když její prvky lze očíslovat přirozenými čísly od 1 do m (včetně). Takové množiny M jsou právě množiny *konečné*. Tedy: množina M je konečná, když je možno její prvky očíslovat přirozenými čísly od 1 až do jistého m (včetně); to číslo m se nazývá počet prvků množiny M. Každá konečná množina má *zcela určitý* počet prvků; není možno, abychom při jednom očíslování upotřebili čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a při jiném očíslování jedné a téže množiny M upotřebili jenom čísel 1, 2, 3, 4, 5; čítáme-li dvakrát po sobě konečnou množinu M, po každé třeba jinak, musíme obakrát napočíst stejný počet prvků. To je přesně formulováno a dokázáno v dodatku.

I některé nekonečné množiny možno počítat pomocí přirozených čísel. Vezměte na př. samu množinu všech přirozených čísel, kterou vždy budu označovat N. Pak k očíslování prvků množiny N (což jsou zde náhodou přirozená čísla sama) arciť nestačí přirozená čísla od 1 až do jakéhosi m (včetně); těch by bylo příliš málo. Abychom očíslovali prvky množiny N, vezmeme na pomoc přirozená čísla *všechna*. A pak se ovšem očíslování hravě povede. Jedničku 1 očíslujeme jedničkou 1, dvojku 2 očíslujeme dvojkou 2, číslo 365 očíslujeme číslem 365 a vůbec každé číslo m očíslujeme týmž číslem m. Tímto nasnadě jsoucím způsobem jsme očíslovali celou množinu N; každému prvku množiny N jsme přiřadili přesně jedno z čísel 1, 2, 3, ... do nekonečna; různé prvky mají různá přirozená čísla a všechna čísla 1, 2, 3 do nekonečna jsou vyčerpána.

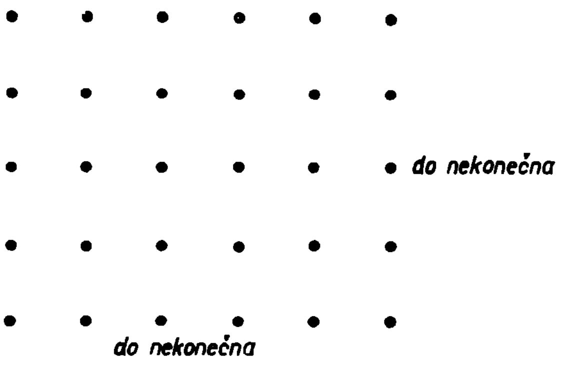
Tento příklad byl příliš triviální. Teď tedy nějaký těžší příklad. Označíme si N^2 množinu, do které patří právě všecky uspořádané *dvojice* $\{m; n\}$, kde m a n jsou přirozená čísla, na př. dvojice $\{1; 1\}$, $\{7; 5\}$, $\{2; 1866\}$, {dva miliony; 366} atp.



Obr. 4.

Při tom slovo „uspořádané“ znamená, že dvojici $\{7; 5\}$ a dvojici $\{5; 7\}$ považujeme za různé, tedy při dvojici $\{m; n\}$ záleží na tom, že m píšeme napřed a n potom; $\{n; m\}$ je obecně jiná dvojice. Nyní si napišme tabulku prvků množiny N^2. V prvním řádku budou všecky dvojice $\{1; n\}$, v druhém budou dvojice $\{2; n\}$ atd. (obr. 4).

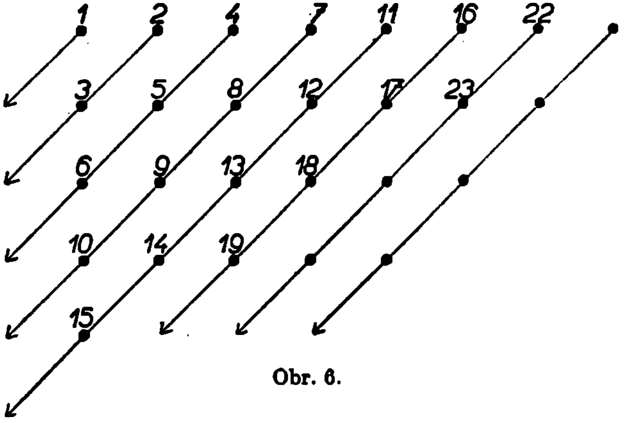
V naší tabulce jsou sepsány právě všechny prvky množiny N^2 a žádný není v tabulce dvakrát. Pro jednoduchost si tabulku označme schematem teček



Obr. 5.

Teď si ukážeme, že množinu N^2 je možno očíslovat právě všemi přirozenými čísly. Číslujeme jako na obrázku 6.

Popis. Od každého prvku v prvním řádku jsme si tedy vedli paprsek nalevo dolů (odchylky o 45 stupňů od vodorovných řádků). Začali jsme nahoře vlevo a šli po paprsku, dokud to šlo. Až jsme vyčerpali všecky tečky na jednom paprsku, přikročili jsme k nejbližšímu paprsku napravo. Tím způsobem pokračujíce do nekonečna jsme očíslovali všecky tečky v schematu a spotřebovali jsme postupně všecka přirozená čísla.

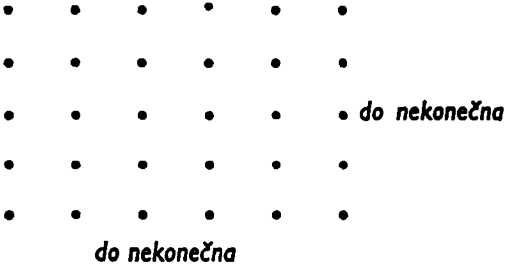


Obr. 6.

Vezmeme-li nyní zase na místo schematu s tečkami původní tabulku množiny N^2, dostáváme očíslování množiny N^2 pomocí *všech* přirozených čísel.

Množina N^2 *dá se tedy očíslovat pomocí (všech) přirozených čísel.*

Všimněme si ještě jedné věci. Buď M nějaká množina, zcela libovolná (nemusí to být množina N^2), jenom to o ní budeme předpokládat, že její prvky možno psát do schematu tvaru:

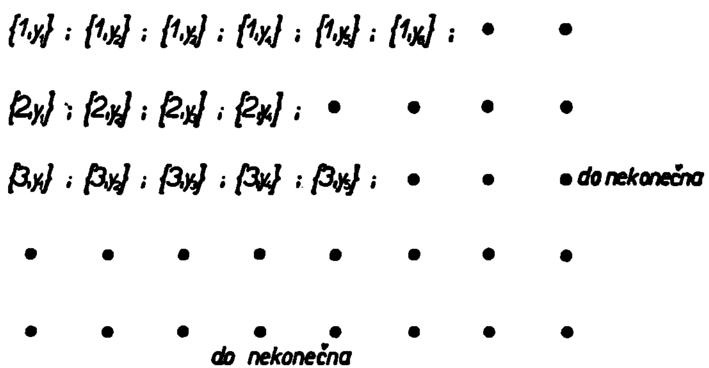


Obr. 7.

Pak podle obrázku (7) *je zase možno množinu* M *očíslovat pomocí všech přirozených čísel*; je to totiž úplně totéž jako tomu bylo u množiny N^2.

Poučka 1. *Dají-li se prvky nějaké množiny psát ve schematu tvaru jako v obr. 7, pak je možno tu množinu očíslovat pomocí (všech) přirozených čísel.*

Tato poučka vede k zajímavým důsledkům. Označme N^3 množinu všech uspořádaných *trojic* $\{m; n; p\}$, kde m, n a p jsou přirozená čísla; takové trojice jsou na př. $\{1; 2; 3\}$, $\{8;$ milion$; 365\}$, $\{3; 2; 1\}$ a podobně. Na pořádku členů trojice zase záleží. Takovou trojici, třeba $\{5; 365; 122\}$ můžeme si myslit rozloženu na první člen 5 a dvojici $\{365; 122\}$. A naopak ten první člen 5 a dvojice obou dalších členů $\{365; 122\}$ se složí právě v tu trojici $\{5; 365; 122\}$. Místo trojic $\{m; n; p\}$ možno si tedy myslet dvojice $\{x; y\}$, jichž první členy jsou první členy našich trojic, t. j. $x = m$ a druhé členy jsou dvojice utvořené z obou dalších členů, t. j. $y = \{n; p\}$. Tedy v $\{x; y\}$ je x přirozené číslo a y je prvek množiny N^2. Ale jak už víme, možno prvky množiny N^2 očíslovat; ten prvek, který má číslo m, označme y_m. Tedy $y_1, y_2, y_3, \ldots$ do nekonečna jsou právě prvky množiny N^2, každý jednou. Pak množinu N^3 možno psát v tabulce



Obr. 8.

což je právě schema jako v obr. 7. Tedy podle poučky 1 *umíme i množinu* N^3 *očíslovat pomocí (všech) přirozených čísel.*

Úplně stejně uvažujeme dál. N^4 bude množina všech uspořádaných čtveřic $\{m; n; p; q\}$, kde m; n; p a q jsou přirozená čísla. Čtveřici $\{m; n; p; q\}$ možno si myslit složenu z čísla m a trojice $\{n; p; q\}$, tedy místo našich čtveřic možno si myslit uspořádané dvojice $\{x; z\}$, kde x je přirozené číslo a z je uspořádaná trojice přirozených čísel, tedy z je prvek množiny N^3. Víme už, že prvky z množiny N^3 možno očíslovat přirozenými čísly: $z_1, z_2, z_3, \ldots$ do nekonečna. Dostaneme pak množinu N^4 v podobě tabulky

$\{1, z_1\}$;	$\{1, z_2\}$;	$\{1, z_3\}$;	$\{1, z_4\}$;	$\{1, z_5\}$;	$\{1, z_6\}$;	•	•	
$\{2, z_1\}$;	$\{2, z_2\}$;	$\{2, z_3\}$;	$\{2, z_4\}$;	•	•	•	•	
$\{3, z_1\}$;	$\{3, z_2\}$;	$\{3, z_3\}$;	$\{3, z_4\}$;	$\{3, z_5\}$;	•	•	•	do nekonečna
•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	

do nekonečna

Obr. 9.

A to je zase schema jako v obr. 7 a tedy podle poučky 1 *umíme i množinu* N^4 *očíslovat pomocí (všech) přirozených čísel.*

Stejně bychom mohli uspořádané pětice $\{m; n; p; q; r\}$, kde m; n; p; q a r jsou přirozená čísla, rozložit na čísla m a čtveřice $\{n; p; q; r\}$ a viděli bychom, že *i množinu* N^5 *umíme očíslovat pomocí (všech) přirozených čísel*; při tom N^5 je ovšem množina všech našich pětic. To si čtenář udělá sám za cvičení a totéž si udělá třeba ještě pro N^6 a N^7. Kroky, kterými jsme od N^2 přešli k N^3, od N^3 k N^4, od N^4 k N^5 atd. jsou pořád úplně stejné. Vidíme tedy, že bychom mohli pak postupovat jakkoliv daleko a stále by nám vycházelo, že *množinu* N^k *umíme očíslovat pomocí (všech) přirozených čísel*, ať je k rovno 2, nebo 3, nebo 4 atd., ať je k sebe větší. Při tom N^k je ovšem množina všech uspořádaných k-tic přirozených čísel, t. j. skupin k přirozených čísel, kde záleží na pořádku.

Teď se na moment vraťme ke konečným množinám. Mějme pět věcí, na př. přímo čísla 1, 2, 3, 4, 5. Utvořme teď všecky uspořádané dvojice $\{m; n\}$, kde m je jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5 a n je jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5. Tedy dvojice si můžeme sestavit do tabulky:

$$\begin{array}{ccccc}
\{1;1\}, & \{1;2\}, & \{1;3\}, & \{1;4\}, & \{1;5\}, \\
\{2;1\}, & \{2;2\}, & \{2;3\}, & \{2;4\}, & \{2;5\}, \\
\{3;1\}, & \{3;2\}, & \{3;3\}, & \{3;4\}, & \{3;5\}, \\
\{4;1\}, & \{4;2\}, & \{4;3\}, & \{4;4\}, & \{4;5\}, \\
\{5;1\}, & \{5;2\}, & \{5;3\}, & \{5;4\}, & \{5;5\},
\end{array} \qquad (*_5)$$

která má pět řádků a 5 sloupců. Všech našich dvojic je zase konečně mnoho a jejich počet je 5^2. Obecně máme-li k prvků, třeba nechť jsou to čísla $1, 2, 3, \ldots, k$ sama, pak všech uspořádaných dvojic, jichž členy jsou naše čísla $1, 2, 3, \ldots, k$, jest zase konečně mnoho a jejich počet označujeme k^2. A *ten počet* k^2 *se nikdy nerovná* k, je vždy větší s jedinou výjimkou, totiž $1^2 = 1$. Definuji: počet prvků množiny M je k^2, když je možno prvky množiny M očíslovat (všemi) uspořádanými dvojicemi $\{m; n\}$, kde m je jedno z čísel $1, 2, \ldots, k$ a n je jedno z čísel $1, 2, \ldots, k$.

Rovnice $5^2 = 25$ znamená: Je jedno a totéž, má-li množina 25 prvků, nebo 5^2 prvků, t. j. je jedno, zda číslujeme množinu přirozenými čísly 1, 2, 3, 4, ... až do 25 anebo dvojicemi $\{m; n\}$, kde m a n jsou čísla 1, 2, 3, 4, 5. Vskutku $5^2 = 25$, neboť možno v tabulce $(*_5)$ nahradit naše dvojice tak, aby vznikla tabulka

$$\begin{array}{ccccc} 1; & 2; & 3; & 4; & 5; \\ 6; & 7; & 8; & 9; & 10; \\ 11; & 12; & 13; & 14; & 15; \\ 16; & 17; & 18; & 19; & 20; \\ 21; & 22; & 23; & 24; & 25, \end{array}$$

a při číslování místo dvojic vzít stejnolehlá čísla, na př. místo $\{2; 3\}$ vzít 8, místo $\{4; 2\}$ vzít 17 a pod. Anebo zase místo čísel 1 až 25 lze při číslování užíti příslušné dvojice.

Snažme se dělat analogii pro nekonečné případy. Říkali jsme, že množina M má m prvků, když prvky množiny M bylo možno očíslovat čísly $1, 2, 3, \ldots, m$. Tím způsobem jsme mohli počítat konečné množiny. Abychom mohli obdobně počítat i nekonečné množiny (zatím aspoň některé), zavedeme si nový symbol $\aleph_0$.*) Budeme říkat, že množina M, tentokráte nekonečná, má $\aleph_0$ prvků, když se nám povede očíslovat prvky množiny M pomocí všech přirozených čísel. Pak též budeme $\aleph_0$ nazývat *počet prvků množiny* M. $\aleph_0$ je jakési nové číslo (a to ovšem nekonečné).

Hořejší výsledky můžeme vyslovit tedy takto:

Každá z množin N, N^2, N^3 *atd. má* $\aleph_0$ *prvků.*

Teď ale definujme mocniny čísla $\aleph_0$ obdobně k tomu, jak jsme definovali mocniny konečného čísla.

Definujeme: Počet prvků množiny M je $\aleph_0^2$, když je možno prvky množiny M očíslovat množinou N^2, t. j. všemi uspořádanými dvojicemi $\{m; n\}$, kde m a n jsou přirozená čísla. Tedy na př. množina N^2 sama má $\aleph_0^2$ prvků. My ale víme, že N^2 má $\aleph_0$ prvků a tedy

$$\aleph_0^2 = \aleph_0.$$

Tato rovnice znamená: Je jedno a totéž, má-li množina $\aleph_0$ prvků anebo $\aleph_0^2$ prvků, t. j. je jedno, zda číslujeme množinu přirozenými čísly, nebo uspořádanými dvojicemi přirozených

*) Čteme jej *alef nula*.

čísel. A to je vskutku pravda. Neboť především možno naše dvojice $y = \{m; n\}$ očíslovat přirozenými čísly: $y_1, y_2, y_3, \ldots$ a místo dvojice y_k užít k číslování příslušného čísla k. Anebo zase místo čísla k lze při číslování užít příslušné dvojice y_k. Neboť čísla k a příslušné dvojice y_k si přesně odpovídají jak jsme už dokázali. [Na př. dvojice v tabulce v obr. 4 se stejnolehlými čísly v tabulce v obr. 6.]

A to je pozoruhodné! Pro jedničku je ještě $1^2 = 1$; pro dvojku se však už 2^2 liší od 2 a čím jdeme výše, tím více se k^2 od k liší. Posloupnost

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \text{atd.}$$

sice se v prvním členu shoduje s posloupností

$$1, 2, 3, 4, \text{atd.},$$

ale ve druhém členu se už od ní rozejde a ten rozchod se zvětšuje, čím větší členy bereme, a to velmi a velmi značně, čím dál více. Teď by se zdálo, když přejdeme od konečných čísel $1, 2, 3, \ldots$ k nekonečným, z nichž první $\aleph_0$ jsme si již zavedli, že rozchod druhé mocniny oproti číslu samému ještě jen vzroste. Pravý opak je však pravdou. Pro první nekonečné číslo $\aleph_0$ je druhá mocnina $\aleph_0^2$ zase rovna samému číslu $\aleph_0$, jako tomu bylo u jedničky. V dalším uvidíme, že na počítání všech nekonečných množin nevystačíme s jediným číslem $\aleph_0$. To jde jen u poměrně „malých“ nekonečných množin. Proto budeme musit k počítání nekonečných množin zavést mimo $\aleph_0$ ještě jiná nekonečná čísla. A uvidíme, že pro každé takové nekonečné číslo α bude $\alpha^2 = \alpha$. Z toho je vidět, že k rozlišení různých nekonečen je naprosto ilusorní zavádět symboly ∞, ∞^2, ∞^3 a podobně. Symbol ∞ sám nevystihl by ten fakt, že je nekonečných čísel mnoho; a ∞^2, ∞^3 atd., není zase nic jiného, než ∞ samo. Proto nutno na celou věc jít z jiného konce.

Množiny konečné dohromady s takovými nekonečnými množinami, které mají $\aleph_0$ prvků, jsou t. zv. množiny *spočetné*.

Dohodneme se, že mezi konečné a tedy i spočetné množiny budeme čítati t. zv. množinu prázdnou, již označíme $\emptyset$. Množina $\emptyset$ je definována tím, že nemá vůbec žádných prvků; je jen jedna prázdná množina. Počet prvků množiny $\emptyset$ označujeme 0. Na př. množina ruských carů, kteří vládli v roce 1923, je prázdná.

Množina, která není spočetná, nazývá se *nespočetná*. Dosud jsme poznali samé množiny spočetné. Zakladatelé theorie množin se jistou dobu domnívali, že jiných množin není. Brzo však poznali svůj omyl. A my si v dalším odstavci ukážeme, že skutečně jsou nespočetné množiny a to dokonce i mezi množinami, o nichž čtenář již slyšel.

I,2. Nespočetné množiny. V sextě se v aritmetice probírají posloupnosti konečné i nekonečné. Jak se dostane taková posloupnost:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \text{ do nekonečna?}$$

Každému přirozenému číslu k přiřadím jakousi určitou věc a_k; a_k je t. zv. k-tý člen posloupnosti; a_k nemusí být číslo, může to být věc jakéhokoli druhu; a také nemusí být ta a_k mezi sebou různá. Tak na př. máme posloupnost:

9, Jaroslav Vrchlický, 365, Jaroslav Vrchlický, Jaroslav Vrchlický atd. Všecky další členy nechť jsou Jaroslav Vrchlický. Jest tedy $a_1 = 9$, $a_3 = 365$ a pro všechna ostatní k jest $a_k =$ Jaroslav Vrchlický.

A teď k věci! Označme na okamžik M množinu všech posloupností, jejichž členy jsou vždy rovny buďto jedničce 1 anebo dvojce 2. Tedy na př. posloupnosti

$$1, 1, 1, 1, 1, \ldots \text{ (samé jedničky 1)},$$

anebo

$$1,2,\ 1,2,\ 1,2, \ldots \text{ (střídavě 1 a 2)}$$

jsou prvky množiny M. Množina M nám bude prvním příkladem množiny nespočetné. Že M je skutečně nespočetná, dokážeme tak, že budeme předpokládat, že je spočetná a z toho předpokladu odvodíme nějaké nesprávné tvrzení, nebo rozpor, protimluv. Pak ale musí býti náš předpoklad nesprávný, tedy M nebude moci býti spočetná, bude tedy nespočetná. Takové důkazy jsou v matematice velmi obvyklé; jsou to t. zv. důkazy nepřímé.

Mysleme si tedy (nesprávně), že M je spočetná množina. Pak M má buďto konečný počet prvků třebas n anebo má $\aleph_0$ prvků. Prvky množiny M, t. j. posloupnosti

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \text{ do nekonečna,}$$

kde a_k je buď 1 nebo 2, se dají tedy očíslovat pomocí přirozených čísel, a to buďto pomocí čísel $1, 2, \ldots, n$ anebo pomocí všech přirozených čísel. Ty posloupnosti si napišme do sloupce podle pořadových čísel.

$$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots \text{ do nekonečna}$$

je první z nich,

$$a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \ldots \text{ do nekonečna}$$

bude druhá z nich, a podobně další budou

$$a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \ldots \text{ do nekonečna,}$$
$$a_1^{(4)}, a_2^{(4)}, a_3^{(4)}, \ldots \text{ do nekonečna,}$$
atd.

Těch řádků je n v případě, že M má n prvků. V tom případě doplníme počet řádků na $\aleph_0$ tím, že jako další řádky píšeme vždy třeba

$$1, 1, 1, \ldots \text{ do nekonečna.}$$

Má-li M $\aleph_0$ prvků, je řádků už samo sebou nekonečně mnoho. Každý řádek je jeden prvek množiny M a *všecky prvky množiny* M *jsou tak vyčerpány*. A teď kýžený rozpor dostaneme tak, že si sestrojíme *prvek množiny* M, *který přece jen v žádném řádku napsán není.*

(Prvky množiny M jsou posloupnosti, tedy celé řádky.) Je-li $a_i^{(k)} = 1$, pak nechť $b_i^{(k)} = 2$ a je-li $a_i^{(k)} = 2$, pak nechť

$b_l^{(k)} = 1$. Tedy $b_l^{(k)}$ je vždy zase jedno z čísel 1 a 2, ale *jiné než* $a_l^{(k)}$. A teď uvažujme posloupnost

$$b_1^{(1)}, b_2^{(2)}, b_3^{(3)}, b_4^{(4)}, \dots \text{ do nekonečna.}$$

k-tý člen naší posloupnosti je tedy $b_k^{(k)}$. Členy $b_k^{(k)}$ naší po sloupnosti jsou čísla 1 a 2 a tedy naše posloupnost je prvkem množiny M. Ale naše posloupnost není napsána v žádném řádku:

$$\begin{array}{l} a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots, \\ a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Skutečně není napsána v prvním řádku: neboť první člen prvního řádku je $a_1^{(1)}$, kdežto první člen naší posloupnosti je jiný, totiž $b_1^{(1)}$. Není napsána v druhém řádku: neboť druhý člen druhého řádku je $a_2^{(2)}$, kdežto druhý člen naší posloupnosti je jiný, totiž $b_2^{(2)}$. A obecně není napsána v k-tém řádku, neboť k-tý člen k-tého řádku je $a_k^{(k)}$, kdežto k-tý člen naší posloupnosti je jiný, totiž $b_k^{(k)}$. Skutečně tedy naše posloupnosti není napsána v žádném řádku a to jsme chtěli za účelem dosažení rozporu dokázat. Tedy náš předpoklad, že by M byla spočetná množina, je nesprávný, tedy: *Množina všech posloupností, jichž členy jsou* 1 *nebo* 2, *je nespočetná.*

Methodě, kterou jsme získali posloupnost $b_1^{(1)}, b_2^{(2)}, b_3^{(3)}, \dots$ do nekonečna, budeme říkat *methoda diagonály*. Je to methoda stejně vtipná, jako jednoduchá. Máme-li sestrojit posloupnost, která není napsána ani v prvém, ani v druhém, ani v žádném jiném řádku, děláme to takto: První člen volíme jiný, než je první člen prvního řádku; pak ta posloupnost bude jiná než ta v prvním řádku. Druhý člen volíme jiný, než je druhý člen druhého řádku. Atd. Obecně k-tý člen volíme jiný než je k-tý člen k-tého řádku; pak ta posloupnost bude ovšem jiná, než ta v k-tém řádku. Nebude tedy rovna žádnému řádku. (Při tom jsme se ovšem musili starat o to, aby sestrojovaná posloupnost zůstala v množině M.)

Methoda diagonály nám dovolí dokázat nespočetnost jisté známé a důležité množiny. Jde o množinu všech *reálných čísel*; budeme ji vždy značit R. Především *ciframi* budu rozumět čísla 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Všimněme si reálného čísla na př. — 365,2222... (samé dvojky); to číslo je určeno třemi věcmi; především znaménkem minus —, za druhé jakýmsi číslem 365, které stojí před desetinnou čárkou a které je buďto nula anebo přirozené číslo (v našem případě 365) a za třetí jakousi posloupností cifer, která stojí za desetinnou tečkou, v našem případě posloupností 2, 2, 2, 2, ... (samé dvojky). Podobně číslo + 0,324000... (samé nuly) je určeno znaménkem +, číslem 0 před desetinnou čárkou a posloupností cifer 3, 2, 4, 0, 0 (samé nuly) za desetinnou čárkou.

Shrňme: Reálné číslo je určeno třemi věcmi: za prvé znaménkem + nebo —, za druhé číslem před desetinnou čárkou, které je rovno buďto nule anebo je to přirozené číslo, a za třetí posloupností cifer za desetinnou čárkou. Jestliže za desetinnou čárkou jsou od jistého místa samé nuly, pak je zvykem ty nuly vynechávat. Na př. + 0,324000... (samé nuly do nekonečna) lze psát též + 0,324 anebo + 0,32400 a pod. Podobně —368,000... (samé nuly) je totéž jako —368 atd. Dále považujeme za totéž + 0,000... (samé nuly), t. j. + 0 a —0,000... (samé nuly), t. j. —0. Tedy + 0 = —0. Místo + 0 či —0 pišme prostě 0. A ještě jedna věc. Je-li před desetinnou čárkou číslo a a za desetinnou čárkou samé devítky, pak je to totéž, jakoby před desetinnou čárkou bylo číslo $a + 1$ a za ní samé nuly. Na př. + 15,999... (samé devítky) se rovná + 16,000 (samé nuly) a pod. —37,999... = —38,000... = —38.

Podobně nechť za desetinnou čárkou na k-tém místě je cifra c různá od 9 a na všech dalších místech samé devítky, pak smíme nahradit c cifrou $c + 1$ a na dalších místech psát samé nuly. Na př.

+ 15,996594999... (samé devítky)

se rovná

+ 15,996595000... (samé nuly)

čili

$$+15{,}996595;$$

podobně

$$-368{,}9875 = -368{,}9875000\ldots \text{ (samé nuly)}$$

se rovná

$$-368{,}9874999\ldots \text{ (samé devítky)}.$$

Symbolům jako —368,9874999... říkáme (desetinné) *rozvoje* příslušného čísla. Vidíme tedy, že některá reálná čísla mají dva různé rozvoje.

Vzhledem k tomu, že je tu právě popsaná dvojznačnost, musíme být při aplikaci methody diagonály poněkud opatrnější než dříve. Jde o to dokázati, že

R *je množina nespočetná.*

Postupujeme jako dříve. Mysleme si (nesprávně), že R je spočetná množina. Pak R má buďto konečný počet prvků, třebas n, anebo má $\aleph_0$ prvků. Prvky množiny R se dají tedy očíslovat pomocí přirozených čísel, a to buďto pomocí čísel $1, 2, \ldots, n$, anebo pomocí všech přirozených čísel. Prvky množiny R napišme pod sebe a znaménka vynechávejme; v k-tém řádku bude reálné číslo mající pořadové číslo k.

V prvním řádku bude číslo

$$a^{(1)}, c_1^{(1)}c_2^{(1)}c_3^{(1)} \ldots \text{ do nekonečna;}$$

při tom číslo $a^{(1)}$ před desetinnou čárkou je přirozené číslo nebo nula a $c_1^{(1)}$, $c_2^{(1)}$, $c_3^{(1)}$ atd. jsou cifry. Podobně v druhém řádku je číslo

$$a^{(2)}, c_1^{(2)}c_2^{(2)}c_3^{(2)} \ldots \text{ do nekonečna,}$$

a další řádky jsou

$$a^{(3)}, c_1^{(3)}c_2^{(3)}c_3^{(3)} \ldots \text{ do nekonečna, atd.}$$

Těch řádků je n v případě, že M má n prvků. V tom případě doplníme počet řádků na $\aleph_0$ tím, že v dalších řádcích píšeme vždy třeba číslo

$$0{,}0000\ldots \text{ (samé nuly)}.$$

Má-li R $\aleph_0$ prvků, je řádků už samo sebou nekonečně mnoho. Každý řádek je jeden prvek množiny R a *všecky prvky množiny* R *jsou tak vyčerpány.*

A teď ten kýžený rozpor dostaneme tak, že sestrojíme *prvek množiny* R (t. j. reálné číslo), *který přece jen v žádném řádku napsán není*. Je-li cifra $c_l^{(k)}$ rovna jedné, t. j.: $c_l^{(k)} = 1$, pak nechť $d_l^{(k)} = 2$; v opačném případě, t. j. není-li $c_l^{(k)}$ rovna jedné, nechť zase $d_l^{(k)} = 1$. Tedy $d_l^{(k)}$ je vždy zase cifra, ale *jiná než* $c_l^{(k)}$. A teď si všimněme čísla

$$+\,0{,}d_1^{(1)}d_2^{(2)}d_3^{(3)}d_4^{(4)}\ldots;$$

na k-tém místě za desetinnou čárkou je cifra $d_k^{(k)}$. A teď buďme opatrní! Cifry $d_k^{(k)}$ jsou jedničky a dvojky. Proto to naše číslo se dá psát jen tím jedním způsobem. (Neboť dva způsoby psaní byly možné jen tam, kde od jistého místa byly za desetinnou čárkou samé devítky anebo nuly.) Má-li se tedy naše číslo rovnat nějakému číslu, musí se s ním shodovat ve všech cifrách za desetinnou čárkou. Tedy se naše číslo neshoduje s číslem

$$a^{(1)},c_1^{(1)}c_2^{(1)}c_3^{(1)}\ldots$$

napsaným v prvním řádku: neboť první místo za desetinnou čárkou v prvním řádku je $c_1^{(1)}$, kdežto u našeho čísla je jiné, totiž $d_1^{(1)}$. Neshoduje se ani s číslem

$$a^{(2)},c_1^{(2)}c_2^{(2)}c_3^{(2)}\ldots$$

napsaným v druhém řádku: neboť druhé místo za desetinnou čárkou v druhém řádku je $c_2^{(2)}$, kdežto u našeho čísla je jiné, totiž $d_2^{(2)}$.

A obecně se neshoduje s číslem

$$a^{(k)},c_1^{(k)}c_2^{(k)}c_3^{(k)}\ldots$$

napsaným v k-tém řádku: neboť k-té místo za desetinnou čárkou v k-tém řádku je $c_k^{(k)}$, kdežto u našeho čísla je jiné, totiž $d_k^{(k)}$.

Skutečně tedy nalezené číslo není napsáno v žádném řádku, a to jsme chtěli za účelem dosažení rozporu dokázat. Tedy náš předpoklad, že by R byla spočetná, je nesprávný, tedy R je nespočetná, což bylo dokázati.

1,3. Kardinální čísla. V první kapitole jsme si všimli, že $5^2 = 25$ a že $\aleph_0^2 = \aleph_0$. První rovnice znamenala, že je jedno, má-li množina 25 prvků nebo 5^2, t. j., že je jedno, číslujeme-li něco přirozenými čísly $1, 2, 3, \ldots$ až 25 anebo uspořádanými dvojicemi $\{m; n\}$, kde m a n je vždy 1 nebo 2 nebo 3 nebo 4 nebo 5. To proto, že těch čísel $1, 2, \ldots$ až 25 a našich dvojic je stejný počet, t. j., že naše dvojice se dají očíslovat pomocí čísel $1, 2, 3, \ldots, 25$.

Úplně stejně rovnice $\aleph_0^2 = \aleph_0$ znamenala, že je jedno, má-li množina $\aleph_0$ prvků nebo $\aleph_0^2$, t. j., že je jedno číslovat přirozenými čísly $1, 2, 3, \ldots$ do nekonečna nebo uspořádanými dvojicemi $\{m; n\}$, kde m a n jsou přirozená čísla. To proto, že těch čísel $1, 2, \ldots$ do nekonečna a našich dvojic je stejný počet, t. j., že naše dvojice se dají očíslovat pomocí čísel $1, 2, 3, \ldots$ do nekonečna.

Teď si obecně mysleme dvě množiny A a B a nechť prvky množiny B se dají očíslovat pomocí prvků množiny A. (Při tom naše množiny mohou být nekonečné, dokonce i nespočetné.) Je-li C další množina, pak je úplně jedno, užijeme-li k číslování množiny C prvků množiny A nebo prvků množiny B. Zajisté. Mysleme si totiž, že prvky množiny A jsou jakési nálepky a prvky množiny B jakési štítky. (To ovšem jen kvůli názornosti.) Očíslování množiny B pomocí množiny A se provede tím, že každou nálepku nalepíme na příslušný štítek. Očíslování množiny C pomocí množiny B provedeme tím, že každý štítek (prvek množiny B) nalepíme na příslušnou věc z množiny C. Ale na tom štítku je nalepena nálepka, takže jsme prvky množiny C zároveň očíslovali nálepkami, t. j. prvky množiny A. Ty štítky jsou tam jen pro parádu. Tedy jsme k číslování množiny C místo množiny B mohli rovnou užít množiny A. A ovšem místo očíslování pomocí nálepek jsme stejně mohli užít štítků, protože o každém štítku víme, která nálepka na něj patří. Tedy zase místo množiny A bylo k číslování možno užít množiny B. Je to úplně jedno. Tedy:

Dá-li se množina B *očíslovat množinou* A, *je úplně jedno zda užijeme k číslování množiny* A *nebo množiny* B.

Jestliže dvě množiny A a B jsou takové, že je úplně jedno, čísluje-li se množinou A nebo množinou B, mohou-li se při číslování vzájemně zastupovat, říkáme, že jsou spolu *ekvivalentní* (rovnocenné). Tedy:

Dá-li se množina B *očíslovat množinou* A, *pak množiny* A *a* B *jsou ekvivalentní*. Jestliže naopak množiny A a B jsou ekvivalentní, pak se množina B dá očíslovat množinou A. Neboť množina B se samozřejmě dá očíslovat sama sebou, t. j. množinou B. Jelikož ale je jedno, číslujeme-li množinou A nebo B, můžeme množinu B očíslovat také množinou A. Hořejší výsledky shrneme:

Dvě množiny jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, když jedna z nich se dá očíslovat pomocí druhé.

Označme $\mathsf{N}(n)$ množinu přirozených čísel $1, 2, \ldots$ až do n včetně. Na př. $\mathsf{N}(5)$ má prvky $1, 2, 3, 4, 5$. Dále je-li B množina (třeba i nekonečná), pak $|\mathsf{B}|$ bude počet prvků množiny B. Na př. jsme měli

$$|\emptyset| = 0, \ |\mathsf{N}(5)| = 5, \ |\mathsf{N}| = \aleph_0, \ |\mathsf{N}^2| = \aleph_0^2.$$

Když se dala množina B očíslovat množinou N, říkali jsme, že B má $|\mathsf{N}|$ (totiž $\aleph_0$) prvků. Obecně B má $|\mathsf{A}|$ prvků, když se dá B očíslovat množinou A.

Rovnice $|\mathsf{A}| = |\mathsf{B}|$ znamená ovšem, že je jedno, zda řeknu, že nějaká množina má $|\mathsf{A}|$ prvků či $|\mathsf{B}|$ prvků.

Tedy to znamená, že je stejné číslovat množinou A či množinou B. Tedy: Že množiny A a B mají stejný počet prvků, t. j. že $|\mathsf{A}| = |\mathsf{B}|$, znamená, že množiny A a B jsou ekvivalentní, čili, že jedna z nich (kterákoliv) se dá očíslovat pomocí druhé.

Podle první kapitoly tedy

$$|\mathsf{N}^2| = |\mathsf{N}|,\ |\mathsf{N}^3| = |\mathsf{N}|,\ |\mathsf{N}^4| = |\mathsf{N}|$$

a obecně

$$|\mathsf{N}^k| = |\mathsf{N}|.$$

Označíme-li obecně $\aleph_0^k$ počet prvků množiny N^k, možno psáti

$$\aleph_0^2 = \aleph_0,\ \aleph_0^3 = \aleph_0,\ \aleph_0^4 = \aleph_0 \text{ a obecně } \aleph_0^k = \aleph_0.$$

Čtenář si sám uvědomí, že definice mocniny $\aleph_0^3, \aleph_0^4$ atd. skutečně odpovídá příslušné definici mocnin n^3, n^4 atd. pro přirozené n.

Symbol $|\mathsf{A}|$ označující počet prvků množiny A je jakési „číslo" konečné nebo nekonečné podle toho, je-li A množina konečná či nekonečná. Konečná z těch čísel jsou 0, 1, 2, ..., zkrátka nula a čísla přirozená. Neboť konečná množina je buďto prázdná a pak počet prvků je 0 anebo má n prvků, kde n je přirozené číslo. Těm číslům $|\mathsf{A}|$ říkáme *kardinální čísla.* V mluvnici se říká „základní" čili „kardinální" číslovky slovům jeden, dva, tři atd., která označují *počet* na rozdíl od číslovek první, druhý, třetí atd., t. zv. „řadových" čili „ordinálních", které označují pořadové číslo. V theorii množin se zavádějí též t. zv. čísla ordinální, jichž pravý rozdíl oproti kardinálním vysvitne až u nekonečných množin. To však přesahuje rámec knížky.

Kardinální čísla $|\emptyset|$, $|\mathsf{N}(1)|$, $|\mathsf{N}(2)|$ atd. a $|\mathsf{N}|$ je zvykem označovat 0, 1, 2, atd. a $\aleph_0$. V předešlém odstavci jsme poznali, že množina R všech reálných čísel se nedá očíslovat žádnou z množin $\mathsf{N}(1)$, $\mathsf{N}(2)$ atd., ani množinou N (tím méně ovšem množinou $\emptyset$). Tedy se nerovná ani 1, ani 2, ani 3 atd. ani $\aleph_0$ (tím méně ovšem nule). Tím jsme dospěli k novému kardinálnímu číslu $|\mathsf{R}|$, které je zvykem označit $\aleph$.*) Píšeme

*) Čteme alef.

tedy $\aleph = |\mathsf{R}|$. Čísla $\aleph_0$ a $\aleph$ nikterak ještě nejsou všechna nekonečná kardinální čísla.

Snažme se nyní porovnávat kardinální čísla podle velikosti. Napřed si ozřejmíme, oč jde, na konečných číslech. Co to znamená $5 < 7$ (čti: 5 je menší než 7)? Znamená to toto: Mějme sedm koleček ○○○○○○○ a pět křížků +++++. Pak můžeme číslovat kolečka pomocí křížků, ale vždy nám při tom některá kolečka zbudou, ač jsme křížky spotřebovali všecky:

○	○	○	○	○	○	○
+	+	+	+	+		

nebo třeba

○	○	○	○	○	○	○
+	+		+		+	+

Nějaká kolečka *vždy* zbudou. A to slůvko vždy je velmi důležité! Vidíme to na nekonečných množinách. Číslujme totiž množinu N touž množinou N, na př. čísla v závorkách číslujme čísly bez závorek. Možno to udělat rozmanitými způsoby. V následujících obrázcích jsou čísla v závorkách očíslována pod nimi stojícími čísly bez závorek. Jedno číslování je takové:

(1)	(2)	(3)	(4)	atd.
1	2	3	4	atd.

Číslo (n) bylo vždy očíslováno číslem n.

Nezbylo nic, žádné číslo v závorce a žádné číslo bez závorky. Ale můžeme číslovat jinak:

(1)	(2)	(3)	(4)	atd.
	1	2	3	atd.

číslo ($n + 1$) bylo očíslováno číslem n. Čísla bez závorek jsme vypotřebovali všecka a přes to jedna závorka zbyla, totiž (1). Dokonce i nekonečně mnoho závorek může zbýt:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	atd.
	1		2		3	atd.

Číslo $(2n)$ bylo očíslováno číslem n. Čísla bez závorek byla spotřebována všechna a přes to zbyly všechny liché závorky; jen sudé byly očíslovány.

Vzhledem k posledním dvěma příkladům bychom byli nakloněni říci, že čísel v závorkách je víc než čísel bez závorek. Ale chyba lávky. Vždyť přece obojích čísel bylo $\aleph_0$. A bylo by trapné říkat, že $\aleph_0$ je větší než $\aleph_0$. Z této trapné situace nás vyvede ono důležité slůvko *vždy*. Nám se sice podařilo, když jsme se o to snažili, číslování zařídit tak, aby zbyly nějaké závorky a aby při tom byla spotřebována všecka čísla bez závorek. Ale nestalo se to vždy. V prvním příkladě totiž žádná závorka nezbyla.

A teď tedy už můžeme definovat, co to znamená, že nějaké kardinální číslo $\mathfrak{a}$ je menší než jiné kardinální číslo $\mathfrak{b}$, což píšeme symbolicky $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$. *Definujeme takto*: Zvolíme si množinu A, která má $\mathfrak{a}$ prvků, a množinu B s $\mathfrak{b}$ prvky. Povede-li se nám očíslovat množinu B množinou A částečně a dovedeme-li mimo to dokázat, že úplné očíslování není možné, pak $\mathfrak{a}$ je menší než $\mathfrak{b}$, t. j. $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$. $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ znamená, že buďto $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ anebo $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, t. j., že umíme B očíslovat pomocí A ať už částečně nebo úplně. $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ se čte: $\mathfrak{a}$ je nanejvýš $\mathfrak{b}$, anebo $\mathfrak{b}$ je aspoň $\mathfrak{a}$. Ve druhé části uvidíme, že rovnice $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ se může dokázat tak, že se dokáže $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$. Je to velmi pohodlný způsob, jehož budeme hojně užívat.

Příklady. 1. $0 < 1$, $0 < 2$, ..., $0 < \aleph_0$, $0 < \aleph$, zkrátka $0 < \mathfrak{a}$, je-li jen $\mathfrak{a} \neq 0$.

Neboť když číslujeme jakoukoliv neprázdnou množinu množinou prázdnou, pak nemáme, čím bychom číslovali, a tedy ta neprázdná množina vždy zbude dokonce celá.

2. $1 < \aleph_0$, $2 < \aleph_0$, ..., zkrátka $n < \aleph_0$, je-li n přirozené.

Neboť čísla 1, 2, 3, 4, ... do nekonečna lze čísly 1, 2, ... až do n včetně očíslovat vždy jen částečně.

3. $\aleph_0 < \aleph$.

Částečně je možno totiž reálná čísla očíslovat čísly přirozenými. Číslo $+1$ očíslujeme číslem 1, číslo $+2$ číslem 2, zkrátka číslo $+n$ číslem n. Ale vždy nějaká reálná čísla zbudou. (Kdyby totiž bylo možno očíslovat všechna reálná čísla přirozenými čísly, pak by množina R měla $\aleph_0$ prvků, což víme, že nemá.)

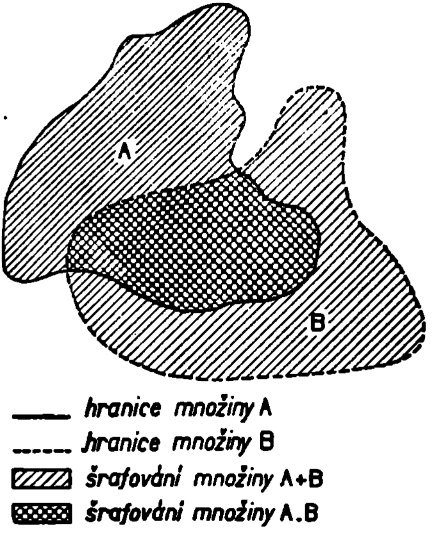
4. Je-li n přirozené, pak $n < \aleph$.

Vskutku čísly $1, 2, 3, \ldots, n$ možno očíslovat reálná čísla $+1, +2, +n$. Ale při číslování množiny R čísly $1, 2, \ldots, n$ vždy něco zbude. (Kdyby ne, pak by R měla n prvků, ale víme, že nemá.)

Kardinální čísla můžeme sečítat a násobit tak jako přirozená čísla. Co to znamená sečítat? Jsou-li A a B dvě množiny, pak A + B bude nám znamenat množinu, kterou dostaneme, když dáme obě množiny A a B dohromady. Tedy A + B je množina těch věcí, které patří do A anebo do B.

Věci, které patří i do A i do B, také k množině A + B čítáme, ovšem jen jednou. (Obr. 10.)

Máme-li nyní 5 věcí a mimo to 7 věcí, *ale jiných*, pak všech těch věcí dohromady je $5 + 7$. (Kdyby mezi těmi 5 věcmi a těmi 7 věcmi byly některé stejné, pak by



Obr. 10.

jich bylo dohromady méně.) Řekneme obecně: Jestliže množiny A a B nemají společných prvků a má-li A a prvků a B b prvků, pak množina A + B má $a + b$ prvků.

Tedy $a + b$ vypočteme takto: Zvolíme množinu A s a prvky a množinu B s b prvky, aby neměly společných prvků. Pak $a + b$ je počet prvků množiny A + B.

V tom je ale maličký háček. Mimo nás bude počítat $a + b$ nějaký náš přítel. Zvolí si množinu A′ s a prvky a množinu B′ s b prvky, aby neměly společných prvků. Pro něho $a + b$ bude počet prvků množiny A′ + B′. Počítali jsme oba úplně správně podle pravidla, ale nevědouce o sobě, zvolili jsme za A každý jinou množinu. Na př. $a = 5$ a já jsem zvolil za A množinu 1, 2, 3, 4, 5, kdežto můj přítel za A′ množinu I, II, III, IV, V. A také ty druhé množiny B a B′ jsme mohli zvoliti odlišně. Kdo nám zaručí, že nám oběma vyjde totéž? Vždyť pro mne $a + b$ byl počet prvků množiny A + B, kdežto pro něho, pro mého přítele, to byl počet prvků jiné množiny, totiž A′ + B′. Tato závada je jen zdánlivá. Počet prvků množiny A + B i množiny A′ + B′ bude totiž stejný a tedy nám oběma to $a + b$ vyjde stejně. Při čtení druhé části si to čtenář sám dokáže ve cvičení 12,2; je to tak lehké, že se o to může pokusit ihned.

Příklad. $5 + 7 = 12$; neboť 1, 2, 3, 4, 5 je 5 prvků, dále 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′ je 7 prvků a množinu 1, 2, 3, 4, 5, 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′, která má $5 + 7$ prvků, lze očíslovat

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,$$

tedy má 12 prvků.

Spočítejme si, co je to $1 + \aleph_0$. Za množinu A si vezmeme množinu, která obsahuje jeden jediný prvek, třebas číslo 0. A za B zvolíme množinu N všech přirozených čísel. Jelikož 0 nepatří do N, nemají množiny A a B společných prvků. Počet prvků množiny A je 1, počet prvků množiny B je $\aleph_0$. Tedy množina A + B má celkem $1 + \aleph_0$ prvků. Co to ale je A + B?

Množina A + B obsahuje 0 a přirozená čísla, t. j. A + B má prvky

$$0, 1, 2, 3, 4, \text{atd. do nekonečna},$$

které možno očíslovat přirozenými čísly:

$$\begin{array}{l} 0, 1, 2, 3, \ldots \\ 1, 2, 3, 4, \ldots \end{array}$$

a tedy množina A + B má $\aleph_0$ prvků. Tedy $1 + \aleph_0 = \aleph_0$. Úplně stejně na př. $5 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Máme-li totiž 5 prvků I, II, III, IV a V a $\aleph_0$ prvků 1, 2, 3, 4, ..., pak je možno dohromady je očíslovat přirozenými čísly:

$$\begin{array}{cccccccccl} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & 1 & 2 & 3 & 4 & \text{do nekonečna,} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \text{do nekonečna.} \end{array}$$

Obecně, je-li n libovolné přirozené číslo, pak

$$n + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Máme-li totiž n prvků $1', 2', 3', \ldots$ až n' a $\aleph_0$ prvků 1, 2, 3, ..., do nekonečna, pak je jich celkem $\aleph_0$, neboť je můžeme očíslovat přirozenými čísly:

$$1', 2', 3', \ldots, n', \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots \quad \text{do nekonečna,}$$

$$1, 2, 3, \ldots, n, \; n+1, n+2, n+3, n+4, \ldots \quad \text{do nekonečna.}$$

Ale nejen to! Dokonce

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Máme-li totiž $\aleph_0$ prvků $+1, +2, +3, \ldots$ do nekonečna a mimo to jiných $\aleph_0$ prvků $-1, -2, -3, \ldots$ do nekonečna, pak je jich celkem $\aleph_0$, protože se dají takto očíslovat:

$$+1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, \ldots \quad \text{do nekonečna,}$$

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \ldots \quad \text{do nekonečna.}$$

Má tedy číslo $\aleph_0$ tu pozoruhodnou vlastnost, že se vůbec nezvětší, když k němu připočtu 1 anebo 2 anebo jakékoliv přirozené číslo. Ba ani tehdy se nezvětší, když k němu připočtu to číslo $\aleph_0$ samo. Je tomu tedy zcela jinak než jsme na to zvyklí u konečných čísel.

Co to je násobení? Je-li A nějaká množina a B také nějaká množina, označíme $A \times B$ množinu všech uspořádaných dvojic $\{a; b\}$, kde a je prvek množiny A a b je prvek množiny B. Má-li A 5 prvků, na př. 1, 2, 3, 4, 5 a má-li B 7 prvků, na př. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, pak $A \times B$ sestavme do tabulky

$$\begin{array}{l} \{1; 1\}, \{1; 2\}, \ldots, \{1; 7\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \{5; 1\}, \{5; 2\}, \ldots, \{5; 7\}. \end{array}$$

Tato tabulka má 5krát 7 prvků.

Obecně se vypočte $a \times b$ (čili $a \,.\, b$, čili ab) takto: Zvolíme nějakou množinu A s a prvky a množinu B s b prvky. Utvoříme množinu $A \times B$ (všech uspořádaných dvojic $\{a; b\}$, kde a je prvek množiny A a b je prvek množiny B). Pak $a \times b$ je počet prvků množiny $A \times B$.

Stejně jako při sčítání může náš přítel počítat tak, že si zvolí jakési jiné množiny A′ s a prvky a B′ s b prvky; $a \,.\, b$ pro něho bude počet prvků množiny $A' \times B'$. Bude to ale totéž jako počet prvků množiny $A \times B$; vyjde mu tedy totéž jako nám (cvičení 12,2 ve druhé části).

Příklad. $5 \times 7 = 35$, neboť 5×7 je počet prvků množiny $A \times B$, kde A má 5 prvků 1, 2, 3, 4, 5 a B má 7 prvků, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Rovnice $5 \times 7 = 35$ plyne pak z toho, že prvky v poslední tabulce, kterých je 5×7, se dají očíslovat čísly 1 až 35 na př. takto:

$$\begin{array}{rrrrrrr} 7, & 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1, \\ 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, \\ 21, & 20, & 19, & 18, & 17, & 16, & 15, \\ 22, & 23, & 24, & 25, & 26, & 27, & 28, \\ 35, & 34, & 33, & 32, & 31, & 30, & 29. \end{array}$$

Vypočteme si $\aleph_0 \times \aleph_0$. Jest $\aleph_0 \times \aleph_0 = |\mathsf{N} \times \mathsf{N}|$. Avšak $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ je množina dvojic $\{m; n\}$, kde m a n jsou přirozená čísla, tedy $\mathsf{N} \times \mathsf{N} = \mathsf{N}^2$. Tedy $\aleph_0 \times \aleph_0 = |\mathsf{N} \times \mathsf{N}| = |\mathsf{N}^2| = \aleph_0^2 = \aleph_0$.

Tedy

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0.$$

Co je to $2 \times \aleph_0$? $\mathsf{N}(2)$ obsahuje dva prvky a to 1 a 2. Pak prvky množiny $\mathsf{N}(2) \times \mathsf{N}$ jsou

$$\begin{array}{l} \{1; 1\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \ldots \text{ do nekonečna,} \\ \{2; 1\}, \{2; 2\}, \{2; 3\}, \ldots \text{ do nekonečna.} \end{array}$$

A možno je očíslovat přirozenými čísly třeba takto:

$$\begin{array}{l} 1, 3, 5, 7, \text{ atd.} \\ 2, 4, 6, 8, \text{ atd.} \end{array}$$

Tedy $\mathsf{N}(2) \times \mathsf{N}$ má $\aleph_0$ prvků. Avšak $\mathsf{N}(2)$ má dva prvky a N má $\aleph_0$ prvků a tedy $\mathsf{N}(2) \times \mathsf{N}$ má $\aleph_0$ prvků, čili

$$2 \times \aleph_0 = \aleph_0.$$

Je-li n přirozené číslo, pak vždycky

$$n \times \aleph_0 = \aleph_0.$$

$n \times \aleph_0$ je totiž počet prvků množiny $\mathsf{N}(n) \times \mathsf{N}$; neboť $\mathsf{N}(n)$ má n prvků a N má $\aleph_0$ prvků.

Prvky množiny $\mathsf{N}(n) \times \mathsf{N}$ jsou uspořádané dvojice, jichž první člen je nějaké z čísel $1, 2, \ldots$ až n a druhý člen je libovolné přirozené číslo. Možno si tedy $\mathsf{N}(n) \times \mathsf{N}$ sepsat do tabulky

$$\begin{array}{l} \{1; 1\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \ldots \text{ do nekonečna,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \{n; 1\}, \{n; 2\}, \{n; 3\}, \ldots \text{ do nekonečna} \end{array}$$

a očíslovat přirozenými čísly takto:

$$\begin{array}{llll} 1, & n + 1, & 2n + 1, & \text{atd.} \\ 2, & n + 2, & 2n + 2, & \text{atd.} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n, & 2n, & 3n, & \text{atd.} \end{array}$$

Popis. Od každého členu prvního řádku vedeme svisle dolů paprsek. Začneme číslovat nahoře vlevo a jdeme po jednom paprsku, dokud to jde. Když jsme očíslovali všecky prvky na jednom paprsku, přejdeme k nejbližšímu pravému a očíslujeme zase shora dolů atd.

Mocnění kardinálních čísel jsme už měli:

Zopakujme: A^n je množina uspořádaných n-tic, jichž členy jsou prvky množiny A. a^n se vypočte takto: Zvolíme množinu A s a prvky, pak a^n je počet prvků množiny A^n. Našemu příteli, který místo A volil množiny A′ s a prvky, vyšel pro a^n počet prvků množiny A'^n, který je stejný jako počet prvků množiny A^n. Tedy mu vyšlo totéž co nám.

Ve cvičení 12,4 si čtenář sám zjistí, že pro kardinální čísla platí stejná početní pravidla jako pro čísla přirozená (viz druhou část). Budeme jich užívat.

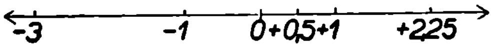
1,4. Kolik je racionálních čísel? Jsou-li a a b dvě reálná čísla, pak jedno z nich je menší a jedno větší. Je-li na př. a to menší, píšeme $a < b$. Na př. záporná čísla (t. j. čísla se znaménkem —) jsou menší než 0 a než kladná čísla (t. j. čísla se znaménkem +). 0 je menší než kladná čísla.

Některá reálná čísla se nazývají racionální. Jsou to taková, která se dostanou dělením dvou celých čísel. (Celá čísla jsou taková, která mají za desetinnou čárkou samé nuly.) Nulou dělit nesmíme.

Čísla, s kterými se při praktickém měření setkáváme, jsou vesměs racionální. Žádnou délku nelze změřiti absolutně přesně. Vždy nám vyjde jakési číslo přesné jen na jistý počet desetinných míst.

Ať měříme sebe přesněji, vždy náš výsledek lze vyjádřit racionálním číslem. I když správná hodnota není racionální, čili jak říkáme, je irracionální, vždy se dá nahradit racionálním číslem a vždy s jakousi chybou, ale ta chyba může býti libovolně malá. Ať ale stupňujeme přesnost pozorování sebe víc, ať máme přístroje (theoreticky mluveno) naprosto přesné, t. j. tak přesné, že chyba se dá zmenšit pod každou sebe menší mez, nikdy se nám nepodaří rozeznat reálná čísla od racionálních, vždy nám racionální čísla budou prakticky vyplňovat celou osu číselnou.

Osou číselnou rozumíme při tom přímku, jejíž body jsou očíslovány reálnými čísly, a to tak, jak jdou za sebou podle velikosti:



Obr. 11.

Racionální čísla při tom leží na ose číselné *hustě*. To znamená, že *prakticky* vyplní celou osu, že ke každému reálnému číslu ve vzdálenosti sebe kratší se najde racionální číslo. Čili mezi každými dvěma (sebe bližšími) reálnými čísly leží vždy nějaké racionální číslo. Na př. mezi čísly —5,874... (atd. jakési cifry) a +6 leží číslo 0, mezi +2,75... (atd. jakési cifry) a +2,76... (atd. jakési cifry) leží číslo +2,755000... (samé nuly). Anebo mezi číslem

—366,9968395795... (atd. jakési cifry)

a číslem

—366,9968417574... (atd. jakési cifry)

leží číslo

—366,996839580000... (samé nuly).

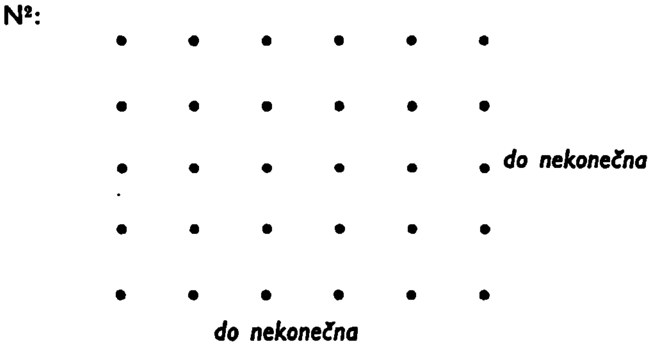
Mezi dvěma čísly leží vždy nějaké číslo, které má za desetinnou čárkou skoro samé nuly a takové číslo je vždy racionální. Na př. poslední číslo se dostane dělením celých čísel; rovná se totiž

—36699683958 : 100000000.

Tedy na každém sebe menším kousku osy číselné se vyskytují racionální čísla. Zakreslíme-li si na osu číselnou jen racionální čísla, pak se nám i při sebe podrobnějším pozorování jeví osa číselná dokonale vyplněna.

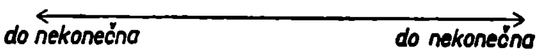
Měli jsme dosud dvě nekonečná čísla: $\aleph_0$ a $\aleph$. $\aleph$ bylo větší. Ale také byl rozdíl v množinách, které měly $\aleph_0$ prvků a $\aleph$ prvků. Množiny s $\aleph_0$ prvky byly množiny N, N^2 a pod. Všimneme-li si příslušných schemat, vypadalo to takto:

Obr. 12.



Obr. 13.

A $\aleph$ prvků měla osa číselná:



Obr. 14.

Vidíme hned rozdíl. Ta první schemata jsou řídká, jednotlivé body jsou daleko od sebe. To poslední schema je přímka, body jsou těsně u sebe, jsou husté, vzdálenosti jsou libovolně malé.

Snad proto má tedy poslední množina více prvků než ty dřívější? A označíme-li si Rac množinu všech racionálních čísel, pak i při naprosto dokonalém pozorování (kdy se přesnost dá *libovolně* stupňovat) schema množiny Rac bude vypadat zase jako ukazuje obr. 14.

Od celé reálné osy se nerozezná. Má tedy množina Rac také $\aleph$ bodů, nebo při nejmenším aspoň víc než $\aleph_0$. Ale chyba lávky!

Všech racionálních čísel je pouze $\aleph_0$, *tedy právě tolik jako přirozených čísel a o nic víc.* A dokonce toho už tolik umíme, že si to dokážeme úplně hravě. Racionální číslo je dáno „párem" (t. j. uspořádanou dvojicí) celých čísel. Na př. číslo $+0{,}328 = +328 : +1000$ je dáno párem $\{+328; +1000\}$. Nebo číslo $+3{,}333$ (samé trojky) se rovná $+10 : +3$ a je dáno párem $\{+10; +3\}$. To racionální číslo se dostane tím, že první člen páru dělíme druhým členem.

Nejdříve si spočítáme, kolik je těch párů celých čísel.

První členy jsou celá čísla, t. j.

jednak číslo 0 .... v počtu 1

jednak čísla

$+1, +2, +3, \ldots\ldots$ v počtu $\aleph_0$

$-1, -2, -3, \ldots\ldots$ v počtu $\aleph_0$

Celkem .... $1+\aleph_0+\aleph_0=(1+\aleph_0)+\aleph_0=\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0.$

Tedy: Prvních členů našich párů je $\aleph_0$. Druhé členy jsou zase celá čísla a tedy: Druhých členů našich párů je $\aleph_0$. Našich párů je tedy

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Tedy našich párů celých čísel je $\aleph_0$. Ty páry možno tedy očíslovat přirozenými čísly:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

Každému páru p_k patří jakési racionální číslo r_k. Na př. páru $\{-8; +7\}$ patří číslo

$$-8 : +7 = -1{,}142857142857\ldots$$

(cifry 142857 se stále opakují). Místo párů p_k pišme příslušná racionální čísla:

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$$

tím dostaneme posloupnost, která obsahuje všecka racionální čísla. Ale ještě nejsme úplně hotovi. Může se stát, že různým párům patří stejná racionální čísla. Na př. páru $\{+32; -28\}$ patří číslo

$$+32 : -28 = -1{,}142857142857\ldots$$

(cifry 142857 se stále opakují). A to je stejné číslo, které patřilo páru $\{-8; +7\}$. Proto jsou v naší posloupnosti

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$$

některá racionální čísla napsána několikrát. Není to ještě správné číslování. Ale hned to napravíme. Nahoru k r_k si připišme $^{(1)}$. Místo r_k píšeme $r_k^{(1)}$; naše posloupnost je:

$$r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, r_3^{(1)}, r_4^{(1)}, \ldots$$

Obsahuje všecka racionální čísla, ale některá se opakují.

Když se některé číslo v naší řadě opakuje, tak je tam prostě necháme jen jednou a to (na př.) na tom místě, kde se vyskytuje po prvé, a ta opakovaná vynecháme. Na př. $r_1^{(1)}$ necháme a škrtneme všecka $r_k^{(1)}$, která se rovnají $r_1^{(1)}$. Zbude jakási menší řada:

$$r_1^{(1)}, r_2^{(2)}, r_3^{(2)}, \ldots$$

Číslo $r_1^{(1)}$ se v ní vyskytuje jen jednou. Teď $r_2^{(2)}$ necháme a škrtneme všecka $r_k^{(1)}$, která jsou rovna $r_2^{(2)}$; vznikne řada

$$r_1^{(1)}, r_2^{(2)}, r_3^{(3)}, r_4^{(3)}, r_5^{(3)}, \ldots$$

V ní se první dvě čísla vyskytují jen jednou. Z ní zase $r_3^{(3)}$ po-necháme, ale jinak škrtneme vše, co se rovná $r_3^{(3)}$ a ve zbylé řadě

$$r_1^{(1)}, r_2^{(2)}, r_3^{(3)}, r_4^{(4)}, r_5^{(4)}, r_6^{(4)}, \ldots$$

se první tři čísla vyskytují jen jednou.

A tak stále pokračujme. Tím postupně jsme si určili čísla $r_1^{(1)}, r_2^{(2)}, r_3^{(3)}$ atd. Sestavíme z nich posloupnost

$$r_1^{(1)}, r_2^{(2)}, r_3^{(3)}, r_4^{(4)}, \ldots,$$

která vznikla škrtnutím všeho zbytečného.

Tvrdím, že tato posloupnost obsahuje všecka racionální čísla. To jistě, neboť jsme při našem škrtání vlastně nic neubírali. Škrtli jsme jen opakovaná čísla, ponechávajíce vždy jeden exemplář neškrtnut. Dále se v naší posloupnosti nic neopakuje. Při prvním škrtnutí jsme totiž škrtli vše, co se rovnalo $r_1^{(1)}$, při druhém vše co se rovnalo $r_2^{(2)}$ atd., při k-tém škrtání jsme škrtli vše, co bylo rovno $r_k^{(k)}$. Ze dvou stejných čísel je vždy jedno škrtnuto, nic se tedy neopakuje.

Tedy máme (všecka) racionální čísla očíslována (bez opakování)

$$\begin{matrix} r_1^{(1)}, & r_2^{(2)}, & r_3^{(3)}, & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & \ldots \end{matrix}$$

Ještě si nutno uvědomit, že to číslování jde skutečně do nekonečna. To ale jistě. Mezi racionální čísla patří totiž také na př. čísla $+1, +2, +3, \ldots$ a těch je nekonečně mnoho; tedy tím spíše všech racionálních čísel musí být nekonečně mnoho. A naše číslování ukazuje, že je jich přesně $\aleph_0$, jak jsme chtěli dokázati.

1,5. Diskontinuum. V předešlé kapitole jsme si ukázali, že nespočetnost množiny nikterak nesouvisí s její hustotou, aspoň v tom smyslu, že mohou být množiny husté (jako na př. množina racionálních čísel) a přesto spočetné. A teď si uděláme naopak zase příklad množiny velice řídké a přes to nespočetné. Racionální čísla vyplňovala prakticky celou osu číselnou a přece jich bylo velmi málo; naproti tomu množina, kterou si teď popíšeme, bude na první pohled na ose číselné takřka mizet a přec to bude mít bodů velmi mnoho. Ta pamětihodná množina se jmenuje *diskontinuum* (protože je velice nespojitá, úplně sporadická) a má velikou důležitost v aplikacích. Dostane se tím, že z osy číselné postupně jisté části vynecháváme a to tak mnoho, že laikovi se na první pohled zdá, že nic nezbylo. Ale zbude přec jen něco a to něco je právě to diskontinuum a má to dokonce velmi mnoho, nespočetně mnoho bodů. Později se ukáže, že diskontinuum má dokonce $\aleph$ bodů, t. j. přesně tolik jako celá osa číselná.

Především z osy číselné vynecháme všecka čísla záporná a všecka čísla větší než $+1$. Zbude interval J (úsečka) od 0 do 1. (Viz obr. 15 a.)

Tuto úsečku rozdělíme na deset stejných dílků a vynecháme všecky díly mimo první a poslední; koncové body u prvního a posledního dílku nevynecháme; zbudou dva intervaly. (Viz obr. 15b.) Teď s těmi zbylými kousky naložíme zrovna tak; rozdělíme je na deset stejných dílků a všecky mimo první a poslední vynecháme; koncové body ponechaných dílků nevynecháme. Zbudou čtyři intervaly. (Viz obr. 15c.)

Obr. 15.

Koncové body jsou 0; $+0{,}01$; dále $+0{,}09$; $+0{,}1$; dále $+0{,}9$; $+0{,}91$; dále $+0{,}99$; $+1$. A ze zbylých čtyř kousků zase vynecháme prostředních osm desetin. A tak pokračujme stále a stále až do nekonečna. Ze zbylých kousků vždy vynecháváme prostředních osm desetin; ale koncové body ponechaných dílků nikdy nevynecháme. Zbývá toho méně a méně. To, co zbude nakonec po nekonečně mnoha vynecháních, to je právě to diskontinuum.

A co vlastně zbylo? Záporná čísla a čísla větší než $+1$ jsme vynechali. Tedy zbylá čísla mají před desetinnou čárkou $+0$. (I číslo $+1$ lze tak psát: $+1 = +0,\overline{9}$.) Za druhé jsme vynechali prostředních osm desetin. Ta zbylá čísla mají tedy na prvním místě za desetinnou čárkou buď 0 anebo 9. (I číslo $+0,1$ lze tak psát: $+0,1 = +0,0\overline{9}$). Dále jsme ze zbylých kousků (což jsou desetiny) vynechali prostředních osm desetin (což jsou setiny) a tedy zbylá čísla mají na druhém desetinném místě buďto 0 nebo 9. (I čísla $+0,01$; $+0,91$ lze pak psát: $+0,01 = +0,00\overline{9}$; $+0,91 = +0,90\overline{9}$.) Atd. A tak pokračujíce vidíme, že nám zbyla právě taková čísla, která je možno psát s $+0$ před desetinnou čárkou a se samými nulami a devítkami za desetinnou čárkou. Tedy: *Diskontinuum* D *je množina reálných čísel, kterou lze psát tak, že před desetinnou čárkou je* $+0$ *a za ní samé nuly a devítky.*

A zase je na místě opatrnost, neboť víme, že dekadické rozvoje jsou dvojznačné. Ale takové rozvoje, které mají za desetinnou čárkou jenom nuly a devítky, jsou tím jednoznačně určeny. Neboť při přechodu k jinému vyjádření se některá cifra změní o jednu a to už nebude ani nula ani devítka. Tedy opatrnost je zbytečná.

A nespočetnost množiny D dokážeme zase methodou diagonály. Nechť D je spočetná. Pak lze všecka čísla z D sepsat do sloupce, každé do jednoho řádku. Možno předpokládat, že řádků je nekonečně mnoho. Kdyby náhodou D měla jen konečný počet prvků, pak jako další řádky píšeme třeba číslo $+0,000\ldots$ (samé nuly). Tedy D je sepsána takto:

$$
\begin{gathered}
+0,c_1^{(1)}c_2^{(1)}c_3^{(1)}\ldots,\\
+0,c_1^{(2)}c_2^{(2)}c_3^{(2)}\ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}
$$

Cifry $c_i^{(k)}$ jsou nuly a devítky. A teď nechť $d_i^{(k)} = 0$ v případě, že $c_i^{(k)} = 9$; a nechť $d_i^{(k)} = 9$ v případě $c_i^{(k)} = 0$. Pak číslo

$+ 0{,}d_1^{(1)}d_2^{(2)}d_3^{(3)} \ldots$ má za desetinnou čárkou samé nuly a devítky a tedy patří do D. A není napsáno v žádném řádku, neboť od k-tého řádku se liší na k-tém místě za desetinnou čárkou. Tento rozpor ukazuje nesprávnost našeho předpokladu, že D je spočetná. *Tedy diskontinuum* D *je nespočetná množina.*

A teď něco pro ty, kteří si pamatují ze sexty něco o řadách. Abychom si uvědomili, jak řídce je diskontinuum D rozloženo na ose číselné, vypočteme si celkovou délku toho, co jsme z intervalu J ubrali. Nejdříve jsme ubrali osm desetin, potom dvakráte po osmi setinách, potom čtyřikrát po osmi tisícinách atd., celkem tedy jsme ubrali

$$\tfrac{8}{10} + 2 \cdot \tfrac{8}{100} + 4 \cdot \tfrac{8}{1000} + \ldots$$

Je to geometrická řada, první člen $a_1 = \frac{8}{10}$ a kvocient $q = \frac{2}{10}$. Její součet je

$$a_1 \cdot \frac{1}{1 - q} = \tfrac{8}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{10}} = \tfrac{8}{10} \cdot \tfrac{10}{8} = 1.$$

Tedy celková délka toho, co jsme z intervalu J ubrali, je 1, t. j. rovná se délce celého intervalu J. Na diskontinuum už žádná délka nezbyla; říkáme, že diskontinuum má míru nula.

A přes to, že celková délka toho ubraného je tak velká, jako délka intervalu, z něhož jsme ubírali, zbylo nám stále ještě nespočetně mnoho bodů. Diskontinuum má nespočetně mnoho bodů, přes to, že jeho míra je nula. Dokonce si ihned zjistíme, že počet bodů diskontinua je stejně veliký jako počet bodů celé osy číselné. Vypočteme si přesně, kolik má bodů diskontinuum D. Uvidíme, že nám vyjde $\aleph$.

Především D je částí osy číselné, tedy má jistě nejvýše tolik bodů, co celá osa číselná. Tedy má D nanejvýš $\aleph$ bodů, tedy buďto stejně mnoho, anebo méně. Abychom dokázali, že D má stejně mnoho bodů jako R, stačí tedy dokázat, že jich nemůže mít méně. Tedy nám zbývá dokázat, že D má aspoň tolik bodů jako R, t. j. že $|R| \leq |D|$. To znamená: Máme očíslovat D pomocí R, ať už částečně či úplně. Podaří-li se nám to, bude dokázáno, že R má přesně $\aleph$ bodů.

Vezmeme si na pomoc výsledky předchozí kapitoly. Racionálních čísel je $\aleph_0$; můžeme tedy všecka racionální čísla očíslovat čísly 1, 2, ... do nekonečna:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots \text{ do nekonečna.}$$

A teď mějme nějaké reálné číslo ϱ. Tomu číslu přiřadíme jistý bod v diskontinuu; ten bude

$$+0{,}c_1c_2c_3\ldots \text{ (nuly a devítky)}$$

a sestrojí se takto: Je-li $r_1 < \varrho$, bude $c_1 = 0$; v opačném případě bude $c_1 = 9$. Je-li $r_2 < \varrho$, bude $c_2 = 0$; v opačném případě bude $c_2 = 9$. Obecně stojí na k-tém místě nula v případě, že $r_k < \varrho$; v opačném případě se k-tá cifra c_k rovná devíti.

Vezmu-li teď jiné reálné číslo ϱ', na př. $\varrho < \varrho'$, pak mezi čísly ϱ a ϱ' je jakési racionální číslo r. Číslo r je napsáno v řadě

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

řekněme na l-tém místě, tedy $r = r_l$, tedy $\varrho < r_l < \varrho'$. A teď číslu ϱ je přiřazen bod diskontinua:

$$+0{,}c_1c_2c_3\ldots$$

a číslu ϱ' jakýsi bod

$$+0{,}c'_1c'_2c'_3\ldots$$

Jelikož $r_l < \varrho'$, jest $c'_l = 0$. Avšak $\varrho < r$ a tedy $c_l = 9$. Tedy různým reálným číslům ϱ a ϱ' patří různé body diskontinua. Tedy je to správné číslování. Podařilo se nám tedy D očíslovat aspoň částečně pomocí množiny R, což jsme právě chtěli. Tedy: *Diskontinuum* D *má přesně* $\aleph$ *bodů.*

To je výsledek proto důležitý, že s diskontinuem se manipuluje mnohem pohodlněji než s celou osou číselnou, takže je pomocí D mnohem snazší odvodit početní pravidla pro číslo $\aleph$.

I,6. Početní pravidla pro číslo $\aleph$. Nejdříve si dokážeme: *Je-li n přirozené číslo, jest vždy $n + \aleph = \aleph$;* dokonce $\aleph_0 + \aleph = \aleph$. Diskontinuum D má $\aleph$ bodů; dále buď C množina všech čísel -1, -2, -3, ... do nekonečna. Pak množina C + D má $\aleph_0 + \aleph$ prvků. Protože obsahuje celé diskontinuum D, musí mít naše množina C + D aspoň $\aleph$ bodů. Ale víc jich mít nemůže, neboť je to část osy číselné a ta má celkem jen $\aleph$ bodů. Tedy C + D má přesně $\aleph$ bodů, t. j.

$$\aleph_0 + \aleph = \aleph.$$

Je-li n přirozené, pak $n + \aleph = n + (\aleph_0 + \aleph) = (n + \aleph_0) + + \aleph = \aleph_0 + \aleph = \aleph$. Tím je vše dokázáno.

A teď co je to $\aleph + \aleph$? Diskontinuum D si mysleme ve dvou exemplářích. První exemplář D, to bude diskontinuum samo, jak bylo popsáno v předešlé kapitole. Druhý exemplář označme D'; vznikne tím, že se D posune po ose číselné o dva dílky doprava. (Viz obr. 16.)

Obr. 16.

Tedy D' se liší od D jenom tím, že před desetinnou čárkou místo $+0$ stojí $+2$. A množiny D a D' ovšem nemají žádných společných bodů. (Proto jsme posunovali o *dva* dílky. Při posunutí jen o jeden dílek by obě množiny měly společný bod $+1$.) Množina D má $\aleph$ bodů a množina D', která se od D v podstatě ničím neliší, má ovšem též $\aleph$ bodů. Množina D + D' má tedy $\aleph + \aleph$ bodů. A kolik to je? Především má množina D + D' aspoň tolik bodů jako D, tedy aspoň $\aleph$ bodů. Za druhé je D + D' část osy číselné. Má tedy nejvýš tolik bodů co osa číselná, tedy nanejvýš $\aleph$ bodů. Tedy má D + D' přesně $\aleph$ bodů, t. j.

$$\aleph + \aleph = \aleph.$$

Teď si dokážeme:

Je-li n *přirozené číslo, jest vždy* $n\,.\,\aleph = \aleph$; *dokonce* $\aleph_0\,.\,\aleph = \aleph$.

Nejdříve si vypočteme $\aleph_0\,.\,\aleph$. Je to počet prvků množiny $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$. Prvky množiny $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ jsou uspořádané dvojice

$$\{m; +0{,}c_1c_2c_3\ldots\},$$

kde m je přirozené číslo a $+0{,}c_1c_2c_3\ldots$ je bod diskontinua, t. j. $c_1, c_2, \ldots$ jsou nuly a devítky.

Množina $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ má aspoň $\aleph$ prvků. Neboť když každému číslu $+0{,}c_1c_2c_3\ldots$ z diskontinua přiřadíme dvojici

$$\{1; +0{,}c_1c_2c_3\ldots\},$$

tak jsme $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ částečně očíslovali diskontinuem D a tedy má skutečně $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ aspoň tolik prvků co D, t. j. aspoň $\aleph$.

Množina $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ má však nanejvýš $\aleph$ prvků. Každému prvku

$$\{m; +0{,}c_1c_2c_3\ldots\}$$

množiny $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ můžeme totiž přiřadit reálné číslo $+m$; $c_1c_2c_3\ldots$; tím jsme částečně očíslovali osu číselnou R naší množinou $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$. Tedy $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ má nanejvýš tolik prvků co R, t. j. $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ má nanejvýš $\aleph$ prvků.

Celkem tedy má $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ přesně $\aleph$ prvků, t. j. $\aleph_0\,.\,\aleph = \aleph$. Rovnici $n\,.\,\aleph = \aleph$ z toho odvodíme už lehko; místo $\aleph$ můžeme totiž psát $\aleph_0\,.\,\aleph$ a máme $n\,.\,\aleph = n\,.\,(\aleph_0\,.\,\aleph) = (n\,.\,\aleph_0)\,.\,\aleph = \aleph_0\,.\,\aleph = \aleph$.

A teď si vypočteme $\aleph\,.\,\aleph$ čili $\aleph^2$. Je to počet prvků množiny $\mathsf{D} \times \mathsf{D}$ čili D^2. Prvky té množiny jsou uspořádané dvojice

$$\{+0{,}c_1c_2c_3\ldots; +0{,}d_1d_2d_3\ldots\}.$$

Při tom $c_1, c_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots$ jsou nuly a devítky. Ty dvojice můžeme (úplně) očíslovat pomocí prvků množiny D a to takto: Naše dvojice

$$\{+0{,}c_1c_2c_3\ldots; +0{,}d_1d_2d_3\ldots\}$$

bude očíslována prvkem

$$+0{,}c_1d_1c_2d_2c_3d_3\ldots$$

množiny D. Každému prvku

$$+0{,}e_1e_2e_3e_4\ldots$$

množiny D tak skutečně odpovídá přesně jedna dvojice, totiž

$$\{+0{,}e_1e_3e_5e_7\ldots;\ +0{,}e_2e_4e_6e_8\ldots\}.$$

Tedy množiny $D\times D$ a D mají stejně mnoho prvků, t. j.

$$\aleph\,.\,\aleph=\aleph,$$

čili

$$\aleph^2=\aleph.$$

Pak ale též $\aleph^3=\aleph$, $\aleph^4=\aleph$ atd. Neboť $\aleph^3=\aleph^2\,.\,\aleph=\aleph\,.$ $.\,\aleph=\aleph$ a podobně $\aleph^4=\aleph^3\,.\,\aleph=\aleph\,.\,\aleph=\aleph$ atd. Obecně tedy:

Je-li n přirozené číslo, jest vždy $\aleph^n=\aleph$.

Dokažme si na př. $\aleph^3=\aleph$ přímo. $\aleph^3$ je počet prvků množiny D^3, t. j. uspořádaných trojic

$$\{+0{,}c_1c_2c_3\ldots;\ +0{,}d_1d_2d_3\ldots;\ +0{,}e_1e_2e_3\ldots\}.$$

$c_1, c_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots, e_1, e_2, \ldots$ jsou samé nuly a devítky. Podaří-li se nám D^3 (úplně) očíslovat množinou D, která má $\aleph$ prvků, budeme hotovi. To se nám ale podaří snadno. Naši trojici totiž očíslujeme prvkem

$$+0{,}c_1d_1e_1c_2d_2e_2c_3d_3e_3\ldots$$

Každému prvku

$$+0{,}f_1f_2f_3\ldots$$

množiny D pak skutečně odpovídá přesně jedna trojice, totiž

$$\{+0{,}f_1f_4f_7f_{10}\ldots;\ +0{,}f_2f_5f_8f_{11}\ldots;\ +0{,}f_3f_6f_9f_{12}\ldots\}.$$

Čtenář si za cvičení úplně obdobně dokáže $\aleph^4=\aleph$ a třeba ještě $\aleph^5=\aleph$ přímo.

Dosud jsme za mocnitele připouštěli jenom konečná čísla 1, 2, 3, 4, … Teď si řekneme, co je to $A^{\aleph_0}$. Prvky množiny A^4

byly uspořádané čtveřice prvků množiny A, t. j. čtyřčlenné řady prvků množiny A. Obdobně prvky množiny $A^{\aleph_0}$ budou $\aleph_0$-členné řady prvků množiny A, t. j. prvky množiny $A^{\aleph_0}$ jsou posloupnosti, jejichž členy jsou prvky množiny A. A $a^{\aleph_0}$ se vypočte takto: zvolíme množinu A s a prvky; pak $a^{\aleph_0}$ je počet prvků množiny $A^{\aleph_0}$. (Na tom, jak volíme A, zase nezáleží, jen když A má a prvků.)

Platí $$\aleph = 2^{\aleph_0}.$$

Tuto neobyčejně důležitou rovnici dokážeme úplně snadno. U diskontinua je před desetinnou čárkou vždy $+0$; tedy se stačí starati jen o to, co je za desetinnou čárkou. Prvky diskontinua jsou tedy v podstatě posloupnosti ze samých nul a devítek. Je-li A množina, která obsahuje přesně dva prvky, totiž nulu a devítku, pak D je v podstatě totéž jako $A^{\aleph_0}$; a D má $\aleph$ bodů a $A^{\aleph_0}$ má $2^{\aleph_0}$ prvků. Tedy $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

Dále platí. *Je-li n přirozené číslo, větší než 1, pak vždy* $n^{\aleph_0} = \aleph$; dokonce

$$\aleph_0{}^{\aleph_0} = \aleph \text{ a } \aleph^{\aleph_0} = \aleph.$$

Nejdříve si vypočteme $\aleph^{\aleph_0}$. Je to počet prvků množiny $D^{\aleph_0}$, jejíž prvky jsou posloupnosti

$$d_1, d_2, d_3, \ldots$$

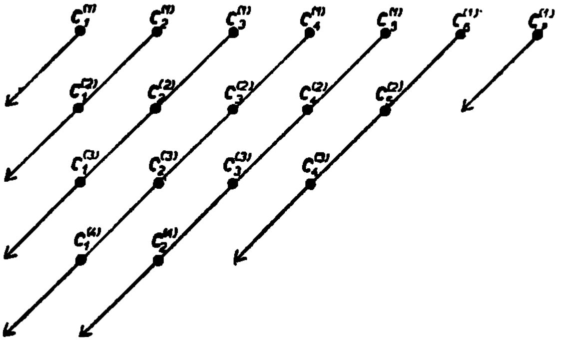
a to takové, že $d_1, d_2, \ldots$ jsou body diskontinua. Tedy

$$\begin{aligned} d_1 &= +0{,}c_1{}^{(1)}c_2{}^{(1)}c_3{}^{(1)}\ldots \\ d_2 &= +0{,}c_1{}^{(2)}c_2{}^{(2)}c_3{}^{(2)}\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Abychom dokázali $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$, stačí naši posloupnost očíslovat (úplně) pomocí prvků množiny D. To se nám snadno povede. Naši posloupnost $d_1, d_2, \ldots$ totiž očíslujeme číslem

$$+0{,}c_1{}^{(1)}c_2{}^{(1)}c_1{}^{(2)}c_3{}^{(1)}c_2{}^{(2)}c_1{}^{(3)}\ldots,$$

které patří do diskontinua a dostane se takto. Od každé cifry za desetinnou čárkou v čísle d_1 vedeme nalevo dolů paprsek odchýlený od vodorovného směru o 45°. Začneme cifrou $c_1^{(1)}$ a píšeme cifry za sebou jdouce vždy po paprsku; a když vyčerpáme jeden paprsek, přejdeme k nejbližšímu paprsku. (Viz obr. 17.)



Obr. 17.

A každému číslu

$$+0{,}e_1e_2e_3e_4\ldots$$

pak skutečně odpovídá zcela určitá posloupnost

$$d_1, d_2, d_3, \ldots$$

totiž

$$\begin{aligned} d_1 &= +0{,}e_1e_2e_4e_7\ldots, \\ d_2 &= +0{,}e_3e_5e_8\ldots, \\ d_3 &= +0{,}e_6e_9\ldots, \\ &\text{atd.} \end{aligned}$$

Tedy našich posloupností je stejně mnoho jako prvků diskontinua, t. j. $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

Z toho plyne lehko také $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$.

Označme totiž A množinu obsahující jenom dvě čísla $+1$ a $+2$. Označme B množinu, která obsahuje b čísel $+1, +2, +3, \ldots$; b nechť je větší než jedna. Obsahuje-li B n čísel (t. j. $b = n$), jest $B = N(n)$. Anebo obsahuje B $\aleph_0$ čísel (t. j. $b = \aleph_0$) a pak $B = N$. V každém případě B obsahuje mimo jiné také čísla $+1$, $+2$, tedy A je část množiny B a ovšem B je část množiny R. Je tedy A^N část množiny B^N a to je část množiny R^N. Tedy

$$|A^N| \leqq |B^N| \leqq |R^N|,$$

t. j.

$$2^{\aleph_0} \leqq b^{\aleph_0} \leqq \aleph^{\aleph_0}.$$

Avšak $2^{\aleph_0}$ je totéž jako $\aleph^{\aleph_0}$ (obojí je to rovno $\aleph$) a tedy $2^{\aleph_0} = b^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0}$. Při tom b bylo buď n (> 1) anebo $\aleph_0$.

Tedy

$$2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = 4^{\aleph_0} = \ldots = \aleph_0{}^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0} = \aleph.$$

1,7. Příklady množin, které mají $\aleph$ prvků. A) *Kladných čísel je $\aleph$.* Víc jich býti nemůže, protože všech reálných čísel je jenom $\aleph$. A na druhé straně mezi kladná čísla patří též čísla, která mají před desetinnou tečkou $+2$ a za ní samé nuly a devítky. Ta čísla tvoří množinu D′ zmíněnou už v odst. 1,6. (D′ je vlastně diskontinuum posunuté na ose číselné o 2 dílky napravo.) D′ má $\aleph$ prvků a tedy kladných čísel je aspoň $\aleph$. Tedy jich je přesně $\aleph$.

Uspořádaných skupin po 17 kladných čísel je $\aleph^{17} = \aleph$. *Obecně je uspořádaných n-tic kladných čísel $\aleph^n = \aleph$. A posloupností kladných čísel je $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$.*

Početní pravidla pro číslo $\aleph$ jsme odvodili pomocí diskontinua, protože je to pohodlné. A teď užijeme těch formulí na jiné množiny (na př. množinu reálných čísel), které mají také $\aleph$ bodů, ale pro které by bylo svízelné ona pravidla odvozovat přímo.

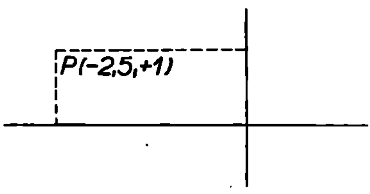
V této kapitole předpokládám jisté (ostatně zcela nepatrné) znalosti geometrie. Tím se nikterak neprohřešuji zásadě, že nepředpokládám nic, protože jde o pouhé příklady k objasnění, stojící vedle vlastní látky.

Především kolik má bodů přímka? Osa číselná měla $\aleph$ bodů; ty body byly reálná čísla. A každá jiná přímka má zrovna tolik bodů. Jako v analytické geometrii si totiž na naši přímce zvolíme jakýsi bod za počátek i jakousi délku za jednotku měřítka (na př. cm). Každý bod napravo od počátku označíme číslem se znaménkem plus, které nám udává, o kolik cm je vzdálen od počátku. A každý bod nalevo od počátku označíme též jeho vzdáleností od počátku, ale se znaménkem minus. A počátek označíme 0.

Situace je stejná jako na ose číselné v obr. 11. Body naší přímky jsou očíslovány reálnými čísly. Tedy:

Přímka má $\aleph$ bodů.

A teď kolik bodů má rovina? Jako v analytické geometrii si nakreslíme v naší rovině dvě kolmice, t. zv. osy, řekněme „jednu vodorovnou a jednu svislou". A pro každý bod *P* naší roviny si určíme jakousi uspořádanou dvojici reálných čísel. Říká se jim „souřadnice bodu *P*". První souřadnice značí vzdálenost od svislé osy; má znaménko plus, je-li *P* od svislé osy napravo; je-li nalevo, má znaménko minus. Druhá souřadnice značí vzdálenost od vodorovné osy; znaménko má plus či minus podle toho, je-li náš bod od vodorovné osy nahoru, či dolů. (Viz obr. 18.)



Obr. 18.

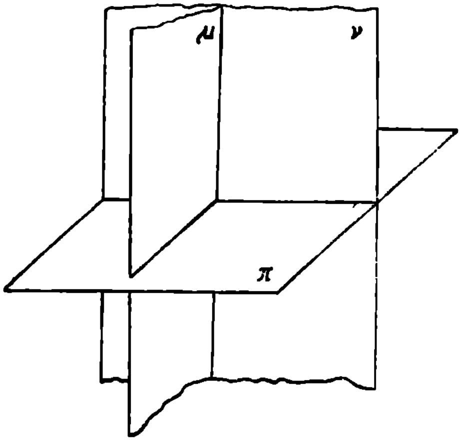
Body roviny jsou tak očíslovány uspořádanými dvojicemi reálných čísel. Je jich tedy tolik co těch dvojic, t. j. $\aleph^2 = \aleph$.

Tedy:

Rovina má také $\aleph$ bodů.

A kolik bodů má prostor? Zvolíme si v našem prostoru tři roviny na sebe kolmé: vodorovnou (rovinu π) a dvě svislé (roviny ν a μ).

A body prostoru si očíslujeme uspořádanými trojicemi reálných čísel; ta čísla se jmenují zase souřadnice. První



Obr. 19.

značí vzdálenost od roviny μ (napravo plus, nalevo minus), druhá značí vzdálenost od roviny ν (dopředu plus, dozadu minus) a třetí značí vzdálenost od roviny π (nahoru plus, dolů minus). Body našeho prostoru se tedy dají očíslovat uspořádanými trojicemi reálných čísel. Je jich tedy $\aleph^3 = \aleph$. Tedy

prostor má $\aleph$ bodů.

Vidíme tedy, že *přímka, rovina i prostor mají stejný počet bodů.*

Starší matematika užívala k počítání nekonečných množin symbolů $\infty = \infty^1, \infty^2, \infty^3, \dots$ Říkalo se, že přímka má $\infty = \infty^1$ bodů, že rovina má ∞^2 bodů, že prostor má ∞^3 bodů. Na druhé straně přirozených čísel bylo také ∞, racionálních čísel též ∞. Uspořádaných dvojic přirozených čísel bylo ∞^2 a podobně. Nám ale vyšlo něco zcela jiného. Na rozdíl od staré matematiky jsme napočítali, že přímka, rovina i prostor mají stejný počet bodů. Naproti tomu racionálních čísel je méně, ale je jich stejně mnoho jako na př. uspořádaných dvojic přirozených čísel. To počítání po staru, pokud má vůbec smysl, má smysl zcela jiný než naše. Nemá vůbec co dělat s počtem prvků, jak se snad někteří při logické nejasnosti pojmů domnívali. Pokud se přirozených čísel, uspořádaných dvojic přirozených čísel a pod. týče, má ∞, ∞^2 atd. smysl dosti pochybný.

Naproti tomu symbolům $\infty = \infty^1$, ∞^2 atd. pro přímku, rovinu, prostor a vůbec v geometrii možno přikládat rozumný význam, který však s počtem prvků nemá co dělat. Exponent 1, 2 a 3 pro přímku, rovinu a prostor mají názorný význam dimense. Přímka je jednorozměrná, rovina dvojrozměrná, prostor trojrozměrný. Přímka a rovina mají stejný počet bodů; to znamená: každému bodu roviny lze přiřadit určitý bod přímky a to tak, že různým bodům jsou přiřazeny různé body a rovina i přímka se tím vyčerpají. To je pravda, ale takové přiřazení (očíslování) je vždy velmi nenázorné. Že takové očíslování existuje, jsme vyčetli z formule $\aleph^2 = \aleph$, která byla odvozena z diskontinua a ne z roviny a přímky. To proto, že autor nepřišel na žádný způsob, jak přímo očíslovat body přímky pomocí bodů roviny, který by byl tak jednoduchý, aby jej bylo vhodno vykládat v populární knížce. Takové přiřazení s jednoduchými vlastnostmi geometrickými totiž žádné není.

B) Úlohy v následujících odstavcích s hvězdičkami mají vyložit názorně bez logické precisace, oč vlastně jde, mluví-li se o ∞^1, ∞^2, ∞^3 atp. Netýkají se vlastního předmětu knížky a mají za úkol objasnit čtenáři, že při $\infty^1, \infty^2, \ldots$ jde o něco zcela jiného než o nějakou škálu nekonečna.

* Požadujme na našem přiřazení, aby bylo spojité. T. j. dvěma blízkým bodům v rovině přiřazené body na přímce jsou zase blízké, spojitým pohybům v rovině odpovídají spojité pohyby na přímce. Pak souvislá množina (která se skládá jen z jednoho kusu) v rovině dá na přímce zase souvislou množinu. Teď z naší roviny odstraníme bod. Ta rovina se nerozpadne. Tomu odstraněnému bodu v rovině patří na přímce jakýsi bod. A ten bod patřil jenom tomu vynechanému bodu v rovině, takže ochuzení naší roviny o jeden bod nutně ochudí o příslušný bod i přímku. Ale přímka odnětím bodu přestane býti souvislou, ačkoli rovina bez jednoho bodu souvislou zůstala. Tedy souvislé množině je přiřazena množina nesouvislá. Nemůže být tedy naše přiřazení spojité. To znamená:

* Při očíslování přímky body roviny jistým blízkým bodům jsou nutně přiřazeny body vzdálené, to očíslování je vždy „nepořádné"; spojitým pohybům v rovině odpovídají skoky na přímce.

* Požaduje-li se na číslování, aby bylo spojité, nedá se už přímka očíslovat rovinou. Přímka a rovina jsou sice ekvivalentní s hlediska theorie množin (jak jsme o ekvivalenci mluvili v odst. I,3), ale dají se rozeznat pomocí pojmů *spojitého* číslování. Nauka, která se zabývá spojitými přiřazeními, se nazývá topologie. Tedy přímka a rovina se dají rozeznat topologicky. Rovněž i prostor se dá od nich topologicky rozeznat, ač s hlediska theorie množin, t. j. staráme-li se jen o počet prvků, jen o očíslování, aniž klademe požadavky spojitosti, je s oběma ekvivalentní.

* Ve školách se učí, že trojúhelník je určen třemi na sobě nezávislými údaji a žádným jiným počtem nezávislých údajů. (Údaje jsou kladná čísla.) Vzhledem k tomu se říká, že je ∞^3 trojúhelníků. V této formě to ale není vůbec pravda. Tvrdím,

že trojúhelník je určen takovým jediným údajem, nebo také sedmnácti zcela na sobě nezávislými údaji; ba dokonce možno trojúhelníky určovat $\aleph_0$ (tedy nekonečně mnoha) údaji, které jsou na sobě naprosto nezávislé.

Spočteme si totiž, kolik je trojúhelníků. Každý trojúhelník má tři strany; napišme si jejich délky podle velikosti za sebou (největší napřed). Tím jsme každému trojúhelníku přiřadili uspořádanou trojici kladných čísel. Tedy množina uspořádaných trojic kladných čísel je částečně očíslována pomocí trojúhelníku. Tedy je trojúhelníků nanejvýš tolik, co takových trojic, t. j. nanejvýš $\aleph^3 = \aleph$. Na druhé straně každému kladnému číslu c přiřaďme trojúhelník, jehož všecky strany jsou c. Tím jsme trojúhelníky částečně očíslovali kladnými čísly. Je tedy trojúhelníků aspoň tolik, co těch čísel, tedy aspoň $\aleph$. Celkem tedy:

Trojúhelníků je přesně $\aleph$.

Možno tedy trojúhelníky „určovat" (přesně očíslovat) kladnými čísly. Takový jediný údaj (kladné číslo) určí přesně trojúhelník (který je tím číslem očíslován) a ten trojúhelník určí to číslo. Tedy trojúhelník je určen jediným údajem (kladným číslem).

Pro každé přirozené číslo n jsme však měli rovnici $\aleph^n = \aleph$. Na př. tedy $\aleph^{17} = \aleph$. Avšak $\aleph^{17}$ je počet uspořádaných sedmnáctic kladných čísel (neboť $\aleph$ je počet kladných čísel) a tedy je trojúhelníků právě tolik co uspořádaných sedmnáctic kladných čísel. Možno tedy trojúhelníky „určovat" (přesně očíslovat) uspořádanými sedmnácticemi kladných čísel. Každými takovými sedmnácti údaji je určen zcela určitý trojúhelník. A změní-li se ta sedmnáctice, t. j. změní-li se některý z těch 17 údajů, změní se i náš trojúhelník. Každý z těch sedmnácti údajů můžeme zvlášť a zcela libovolně změnit; změní se tím prostě ta sedmnáctice a náš trojúhelník. *Trojúhelník je určen sedmnácti zcela nezávislými na sobě údaji* (kladnými čísly).

Číslo 17 jsme vzali jen jako příklad. Ať je n zcela libovolně přirozené číslo, jest $\aleph^n = \aleph$ a tedy trojúhelník je určen n zcela na sobě nezávislými údaji (kladnými čísly).

Trojúhelníky je možno určovat dvěma nebo stotisíci nezávislými údaji stejně dobře jako třemi.

Dokonce jest $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$. *Tedy je trojúhelník určen také* $\aleph_0$, *tedy nekonečně mnoho na sobě zcela nezávislými údaji (kladnými čísly).*

Ale zase nevykládám, jakých je těch 17 či $\aleph_0$ údajů. To proto, že ty údaje nemají nijaký „názorný“ smysl. Že trojúhelník je určen třemi a žádným jiným počtem „názorných“ údajů, není však žádný matematický výrok: „Názornost“ není logický pojem.

* Mají smysl výroky: Trojúhelník je určen třemi stranami, stranou a oběma přilehlými úhly a podobně. Kdo nám ale zaručí, že při určování trojúhelníka těžnicemi, výškami atp. nevyjde počet nezávislých určovacích prvků jiný? O tom se sice přesvědčujeme případ od případu (ač ne zcela přesně, neboť někdy ty úlohy jsou víceznačné, tedy ne zcela určené a zase naopak — dokonce při určení třemi stranami — někdy nevyjde vůbec žádný trojúhelník), ale obecná formulace problému a jeho řešení ve staré geometrii chybí.

* Přesto lze výroku, že je ∞^3 trojúhelníků, dát rozumný smysl. V topologii se totiž pojem prostoru přenáší i tam, kde na to nejsme zvyklí. Z množiny všech trojúhelníků si uděláme také jakýsi „prostor“; jeho „body“ jsou trojúhelníky. Aby to byl prostor, musí mezi body být jisté vztahy; musíme vědět, co to znamená, že dva body jsou blízko sebe. Na př. v našem případě to bude znamenat, že strany jednoho z obou trojúhelníků se málo liší od stran druhého. Říkáme, že jsme do množiny trojúhelníků zavedli topologii. A teď se dá zcela obdobně jako u přímky, roviny a obyčejného prostoru zavést pojem dimense. (Topologům se to podařilo zcela obecně.) A tu nám vyjde, že ten prostor trojúhelníků má dimensi 3.

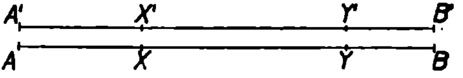
A to je výklad výroku, že „trojúhelníků je ∞^3", či že trojúhelník je určen právě třemi nezávislými údaji."

* Ale s dimensemi do tří nikterak nevystačíme. Prostor, jehož body jsou přímky v obyčejném prostoru, je čtyrrozměrný, je ∞^4 přímek v obyčejném prostoru. Prostor všech elips v rovině je pětirozměrný, těch elips je ∞^5. (Blízké jsou patrně dvě elipsy tehdy, když ke každému bodu na jedné z nich možno najíti blízký bod na druhé.) O prostoru s takovouto topologií, jehož body jsou elipsy v rovině, jest dokázat, že má dimensi 5 ve smyslu topologické theorie dimense. Tím teprv nabudeme oprávnění tvrdit, že je těch elips ∞^5. Při tom všem je *počet* přímek v prostoru, jakož i *počet* elips v rovině zase $\aleph$.

* Celkem tedy lze říci, že symbolům ∞^1, ∞^2, ∞^3, ... možno přisoudit v geometrii jistý rozumný smysl, ale že nikterak nesouvisí s počtem nějakých věcí. Ty exponenty 1, 2, atd. udávají dimensi, což je pojem patřící do topologie. Útvary různých dimensí nerozeznávají se pomocí číslování. Rozeznávají se teprve topologicky, t. j. když na číslování klademe požadavky spojitosti: A teď další příklady z geometrie.

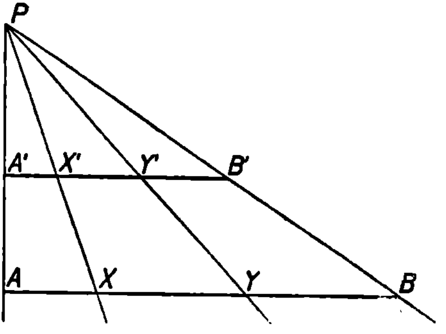
Úsečka je, jak známo, množina bodů na přímce, které jsou mezi dvěma různými body, t. zv. *koncovými body* té úsečky. Při tom ty koncové body buď k úsečce čítáme a mluvíme o úsečce *uzavřené*, nebo nečítáme a mluvíme o úsečce *otevřené*, nebo k úsečce čítáme jen jeden z těch koncových bodů a mluvíme o úsečce *polootevřené*.

Především tvrdím, že *všecky otevřené úsečky mají stejný počet bodů*.



Obr. 20.

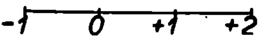
Koncové body těch úseček budou A a B u jedné a u druhé A' a B'. (K otevřeným úsečkám jich nečítáme.) Jsou-li ty úsečky stejně dlouhé, pak je položíme na sebe a body obou si přesně odpovídají. (Obr. 20.) Když jsou různě dlouhé, pak si je položme podle obr. 21, spojme bod A s A', B s B' a z průsečíku P promítejme jednu tu úsečku na druhou. Pak jsme bod X promítli do X', bod Y do Y' atd. A tím jsme body X, Y, atd. očíslovali pomocí bodů $X', Y', \ldots$ Je tedy těch bodů obojích stejně mnoho.



Obr. 21.

Abychom tedy spočítali, kolik bodů má otevřená úsečka, stačí si vybrat zcela určitou otevřenou úsečku, ty ostatní mají bodů také tolik. Vybereme si na ose číselné úsečku U s koncovými body -1 a $+2$. (Obr. 22.)

Diskontinuum D leží na téže úsečce (leží totiž mezi body 0 a $+1$). A D má $\aleph$ bodů, takže naše úsečka U má aspoň $\aleph$ bodů. Ale víc než $\aleph$ bodů mít nemůže, protože celá osa číselná má jenom $\aleph$ bodů. *Tedy U a vůbec každá jiná otevřená úsečka má $\aleph$ bodů.*



Obr. 22.

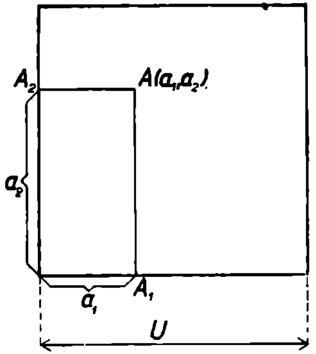
Je-li úsečka polootevřená, má o jeden bod víc, jeden z konců totiž k ní čítáme. Má tedy $\aleph + 1$ bodů; avšak $\aleph + 1 = \aleph$. *Tedy i polootevřená úsečka má $\aleph$ bodů.*

Uzavřená úsečka má o dva koncové body víc než otevřená úsečka; má tedy $\aleph + 2$ body; avšak $\aleph + 2 = \aleph$. *Tedy i uzavřená úsečka má $\aleph$ bodů.*

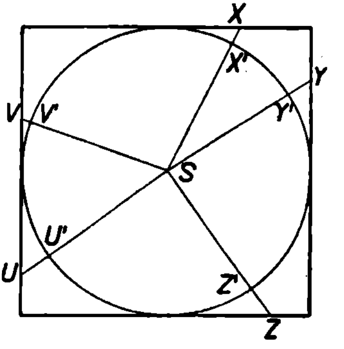
Celkem máme výsledek:

Každá úsečka má $\aleph$ bodů.

Kolik bodů má čtverec (bez obvodu)? Strana čtverce je (otevřená) úsečka U a čtverec sám je vlastně množina $U^2 = U \times U$.



Obr. 23.



Obr. 24.

Bod A ve čtverci (obr. 23) si můžeme totiž myslet označen jako uspořádanou dvojici $\{A_1; A_2\}$, kde

A_1 je bod „základny" U,
A_2 je bod „výšky" U.

A U má $\aleph$ bodů, tedy náš čtverec U^2 má $\aleph^2$ bodů; avšak $\aleph^2 = \aleph$, tedy *čtverec má $\aleph$ bodů.*

Obvod čtverce se skládá ze čtyř otevřených úseček (zatím totiž vrcholy nečítáme) a mimo to čtyř vrcholů. Každá z těch úseček má $\aleph$ bodů a tedy ten obvod má $4 . \aleph + 4$ body. Avšak $4 . \aleph = \aleph$, tedy $4 . \aleph + 4 = \aleph + 4 = \aleph$. Tedy *obvod čtverce má $\aleph$ bodů.*

* Kolik má bodů kružnice? Narýsujme si kružnici o poloměru r a o středu S a opišme jí čtverec (o straně $2r$). Zvolím-li

na naší kružnici bod Y', pak se Y' promítne do bodu Y na obvodu čtverce. Body na obvodu čtverce se promítají do bodů kružnice a naopak, ty body si přesně odpovídají. Tedy má kružnice stejně mnoho bodů jako obvod čtverce, t. j. *kružnice má $\aleph$ bodů*. (Obr. 24.)

Podobně si můžeme vypočíst počet bodů jiných geometrických útvarů.

Povrch krychle se skládá ze šesti stěn, což jsou čtverce, z 12 hran (otevřených úseček) a osmi vrcholů. Má tedy $6 . \aleph + 12 . \aleph + 8$ bodů. A to je $\aleph$ bodů. *Tedy povrch krychle má $\aleph$ bodů.*

* *A povrch koule má také $\aleph$ bodů.* Možno totiž té kouli opsat krychli a ze středu povrch koule promítnout na povrch té krychle (jako u kružnice a čtverce). Vidíme, že povrch koule a povrch krychle mají stejně mnoho, tedy $\aleph$ bodů.

Povrch krychle, povrch koule, kružnice atd. měly $\aleph$ bodů bez ohledu na velikost.

Cvičení. Kolik bodů má plná krychle? ($\aleph^3 = \aleph$).

Kolik bodů má plná koule? (Také $\aleph$, neboť jí lze vepsat i opsat krychli. Má tedy aspoň i nejvýš tolik bodů co krychle.)

Kolik bodů má trojúhelník, plný kruh, obvod šestiúhelníka, povrch válce (promítej na krychli!), vnitřek válce (opiš a vepiš krychli!) (Vesměs $\aleph$ bodů.)

I,8. Nekonečných kardinálních čísel je mnoho. Dosud jsme poznali dvě nekonečná kardinální čísla, totiž $\aleph_0$ a $\aleph$. To první značilo počet přirozených čísel 1, 2, 3, ...; to druhé značilo řekněme počet bodů v rovině. Teď si všimněme, kolik je všech částí roviny; uvidíme, že jejich počet t bude větší než počet bodů v rovině, t. j. t bude větší než $\aleph$ a ovšem také než $\aleph_0$.

Především body roviny jsou též jejími částmi. Je tedy částí roviny aspoň tolik jako bodů roviny, t. j. $t \geqq \aleph$. Abychom dokázali, že $t > \aleph$, stačí tedy zjistit, že není pravda $t = \aleph$, t. j. že není možno části roviny očíslovat body roviny (tak aby nic nezbylo). Budeme to dokazovat zase nepřímo. Budeme (nesprávně) předpokládat, že všecky části roviny je možno očíslovat body roviny. Jde jen o to dokázat rozpor. Tu část roviny, která je očíslována bodem P, označíme $č(P)$. A teď přijde úsudek úplně obdobný nám známé methodě diagonály. Sestrojíme si jím jakousi část $č$ roviny. Ta část $č$ bude určena, budeme-li vědět o každém bodě roviny, jestli do $č$ patří nebo ne. Bude to takto. Je-li P bod roviny, pak se může stát, že P patří do $č(P)$; pak bod P do $č$ nedáme. Stane-li se však naopak, že P nepatří do $č(P)$, pak bod P dáme do $č$. Teď ale všecky části byly očíslovány body; tedy i naše $č$ byla očíslována jakýmsi bodem Q. Tedy $č = č(Q)$. A teď mohou nastat dva případy:

I. Q patří do $č(Q)$. Avšak body P, které patřily do $č(P)$, jsme do $č$ nedali; tedy ani Q jsme do $č$ nedali. Tedy Q přece jen do $č(Q)$ nepatří. V prvém případě jsme už kýžený rozpor dostali.

II. Q nepatří do $č(Q)$. Avšak body P, které nepatřily do $č(P)$, jsme do $č$ dali; tedy zvláště jsme do $č$ dali náš bod Q. Tedy Q přece jen do $č(Q)$ patří. I v tomto případě máme rozpor.

V každém případě, ať už Q do $č(Q)$ patří či ne, jsme dospěli k rozporu, který ukazuje nesprávnost našeho předpokladu, že by totiž bylo možno všecky části roviny očíslovat jejími body. Tedy to možno není, t. j. rovina má jiný počet částí než bodů, $\mathfrak{t}$ se nerovná $\aleph$. Ježto však $\mathfrak{t} \geqq \aleph$, je nutně $\mathfrak{t}$ větší než $\aleph$:

$$\aleph_0 < \aleph < \mathfrak{t}.$$

Tak jsme získali nové nekonečné kardinální číslo $\mathfrak{t}$, které je větší než obě nám již známá, totiž $\aleph_0$ a $\aleph$.

Způsob jak jsme postupovali je vlastně zase methoda diagonály. Vtip je úplně stejný jako při důkazu existence nespočetných množin. Čtenář, který má smysl pro abstrakci, si toho všimne.

Teď si můžeme sestrojit kardinální číslo, které je ještě větší než t. Postupujeme takto: Především si opatříme nějakou množinu M, která má t prvků. (Je to na př. množina všech částí roviny.) Je-li nyní u počet všech částí množiny M, pak $u > t$. Je to úplně stejné jako prve. Především prvky množiny M jsou také jejími částmi a tedy počet těch částí je aspoň roven počtu prvků, t. j. $u \geqq t$. Kdyby bylo $u = t$, mohli bychom zase části množiny M očíslovat jejími prvky; $\check{c}(p)$ budiž zase část očíslovaná prvkem p. A zase bychom si sestrojili $\check{c}$ a našli prvek množiny q u množiny M takový, že $\check{c} = \check{c}(q)$ a dospěli ke stejnému rozporu jako prve. Čtenář si to sám provede; stačí si prostě přečíst hořejší úvahu. (Místo roviny a jejích bodů přijde prostě množina M a její prvky.)

A úplně stejně bychom i k číslu u našli číslo ještě větší. A obecně:

Ke každému kardinálnímu číslu se dá najít číslo ještě větší.

Úvaha je vždycky úplně stejná. Možno to také říci takto: *Ke každé množině se dá najít množina, která má ještě víc prvků.*

Tedy je nekonečných kardinálních čísel velká spousta; k danému číslu lze vždy nacházet stále větší a větší a ke konci nedojdeme. Je jich rozhodně nekonečně mnoho. Je jich mnohem více než čísel konečných (těch je $\aleph_0$); o tom, jak strašně mnoho je nekonečných kardinálních čísel, se dočte čtenář na konci odst. 2,12 v druhé části. Bylo by sice lze to vyložit už tady, ale nechci čtenáři poplést představy, které si sotva ujasnil.

1,9. K čemu potřebujeme tak mnoho reálných čísel. Řekli jsme, že daleko nejdůležitější nekonečná čísla jsou $\aleph_0$ a $\aleph$. Proč je číslo $\aleph_0$ tak důležité? Prostě proto, že přirozená řada čísel je to hlavní nejen v matematice, ale ve všem myšlení vůbec; slavný matematik Kronecker řekl: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.“ (Celá čísla otvořil Pán Bůh, všecko ostatní vymyslili lidé.) A ta tak důležitá přirozená řada čísel má $\aleph_0$ prvků, proto je často $\aleph_0$ tak důležité.

A teď prosím, racionálních čísel je také $\aleph_0$. A když počítáme, tak se vždy nutně omezíme na konečný počet cifer za desetinnou čárkou; místo $\sqrt{2}$ píšeme jen $+1{,}4$ nebo $+1{,}41$ nebo $+1{,}414\ldots$, místo π píšeme $+3{,}14$ nebo $+3{,}14159$ a podobně, prostě z technických důvodů, ač víme, že je to jen přibližné. Prakticky počítáme jen s racionálními čísly, kterých je $\aleph_0$. K čemu tedy zavádět i ostatní, neracionální, reálná čísla? Nač si zbytečně počet čísel zvyšovat na $\aleph$?

Má to mnoho velmi závažných důvodů, proč je to zcela nezbytné. Především má být věda objektivní, t. j. vyhovovat všem. Není vhodné, aby každý měl svou zvláštní matematiku. Může, pravda, ten, kdo počítá jen na tři cifry, místo $\sqrt{2}$ vzít 1,41 a místo π vzít $+3{,}14$. To ale už nevyhovuje tomu, kdo počítá přesně na čtyři cifry. Je pravda, že v počítání nutno se vždy omezit na určitou přesnost. Ale objektivně všem vyhovující matematika musí řešit otázky pro každého, ať si přesnost počítání jakkoliv předepíše. Řekněme, že by poloměr nějaké kružnice byl $+5$ (pro jednoduchost přesně). Pak její obvod pro toho, kdo počítá přesně na tři cifry je $+31{,}4$.

Pro toho, kdo počítá přesně na šest cifer, je ten obvod $+31{,}4159$ atd. Matematika ale říká, že ten obvod je $(+2\pi)\,.\,(+5)$. Tento výrok znamená: Podle jakýchsi pravidel se čísla $+2\pi$ a $+5$ znásobí, výsledek je jakési reálné číslo. Ten kdo chce počítat na tři cifry, vezme z toho čísla první tři cifry a to, co mu vyjde, bude pro něho hledaný obvod; vyjde mu $+31{,}4$. Ten, kdo počítá na šest cifer, vezme číslo $(+2\pi)\,.\,(+5)$ na šest cifer a to, co mu vyjde, bude pro něho hledaný obvod; vyjde mu $+31{,}4159$. Vzorec $(+2\pi)\,.\,(+5)$ vyhoví každému, ať si počítá na kolik chce cifer. Ty příslušné cifry se dokonce dají vypočíst, aniž bychom hledali ostatní pro nás nepotřebné cifry; dokonce už v daných číslech $+2\pi$ a $+5$ se omezíme na vhodný počet cifer; v našem případě na tolik cifer, na kolik chceme mít přesný výsledek. Někdy je však nutno znát daná čísla přesněji, na více cifer než na kolik chceme mít přesný výsledek.

Reálná čísla s nekonečnými (a zcela nepravidelnými jako u $\sqrt{2}$ a π) rozvoji nám vystihují racionální čísla, s nimiž prakticky počítáme, vždy, ať počítáme sebe přesněji. Místo abychom říkali: obvod naší kružnice je $+31{,}4$ při počítání na tři místa, $+31{,}4159$ při počítání na šest míst atd., místo abychom pro každý počet cifer musili udávat zvlášť výsledek, řekneme jednoduše, že náš obvod je roven jakémusi reálnému číslu $(+2\pi)\,.\,(+5)$. A ten jediný výrok už vše vystihuje.

K tomu tedy zavádí se reálná čísla, jichž je $\aleph$.

A ještě je jiný důvod, proč je zcela nutno zabývat se množinami, které mají více než $\aleph_0$ prvků. Vynechme z osy číselné jeden bod (na př. 0). Pak na vynechaném místě vznikne t. zv. *mezera*. To znamená: naše přímka se rozpadne ve dva kusy K_1 a K_2 (to, co je před vynechaným bodem, a to, co je za ním), při tom oba ty kusy jsou otevřené. To znamená, že nemají žádných koncových bodů. Skutečně v prvním z těch kusů K_1 (což je množina všech záporných čísel) zvolme libovolně bod p; máme ukázat, že to není koncový bod prvního kusu. Ten bod je jakési záporné číslo. Zvětšíme-li o jednu cifru před desetinnou čárkou, dostaneme číslo, které leží před p. Tedy není p levým koncovým bodem. A mezi p a 0 je, jak víme, také nějaké číslo q a to q (protože je před 0) patří do našeho kusu K_1 a je za p. Tedy p není ani pravým koncovým bodem našeho kusu K_1. Stejně je tomu s kusem K_2, ani ten nemá koncových bodů. Při tom celý jeden kus (totiž K_1) je před druhým kusem (před K_2). Tomu právě říkáme, že mezi K_1 a K_2 je mezera.

Přímka je uspořádaná množina (když ji probíráme v určitém směru). V geometrii se žádá, aby přímka byla souvislá, abychom se spojitě dostali na ní z jednoho bodu do druhého. To znamená dvě věci. Především na ní nesmějí být t. zv. *skoky* (obr. 25):

Obr. 25.

t. j. mezi každými dvěma body musí ležet nějaké body, přímka musí být hustá. Na to by stačilo ovšem $\aleph_0$ bodů. Neboť jsme viděli, že racionálních čísel je jenom $\aleph_0$ a přes to jsou hustá, mezi každými dvěma leží zase nějaká. Za druhé však žádáme, aby na přímce nebylo mezer. A k tomu, abychom splnili oba dva ty požadavky, už nikterak nevystačíme s $\aleph_0$ body, jak si dokážeme v druhé části. K tomu, aby přímka byla souvislá, je naprosto nutno, aby měla více než $\aleph_0$ bodů. Dokonce nesmí mít o nic méně než $\aleph$ bodů. Stejně je tomu s rovinou a prostorem; kdyby měly méně než $\aleph$ bodů, nebylo by možno dostat se spojitě z jednoho bodu do druhého, což by se zcela příčilo našim geometrickým představám.

Viděli jsme tedy, že s číslem $\aleph_0$ nevystačíme ani v aritmetice ani v geometrii. Ale s číslem $\aleph$ už úplně vystačíme: reálných čísel je $\aleph$, bodů v prostoru je $\aleph$. Ostatně si aritmetika a geometrie přesně odpovídají; přímka a osa číselná je v podstatě totéž. (To je základní myšlenka analytické geometrie.)

1,10. Co jsou to t. zv. veličiny nekonečně malé. Čísla $\aleph_0$, $\aleph$ a pod., o kterých jsme dosud mluvili, jsou nekonečně veliká. Mnohdy se slyší, že derivace je podíl nekonečně malých veličin, že integrál je součet nekonečně mnoha nekonečně malých veličin a pod. Zvláště dříve byly tyto fráze v oblibě. Takové výroky mají tu nectnost, že u laiků vzbuzují nesprávné představy a někdy vedou i k chybnému počítání. Je chyba si myslit, že by derivace skutečně byla podílem jakýchsi „čísel". Ty fráze mají smysl spíše obrazný. Jak jest jim rozumět, vyložím pro úplnost v této kapitole.

Myslím si, že se automobil pohybuje po silnici. Silnice má v různých místech různé stoupání; automobil jede do kopce pomaleji. Pohyb automobilu není rovnoměrný. Průměrnou rychlost automobilu v jisté době, na př. mezi 9. a 11. hodinou vypočteme tak, že v té době ujetou dráhu dělíme příslušnou dobou. Ujel-li automobil od 9. do 11. hodin 72 km, je jeho průměrná rychlost za tu dobu 72 km : 2 hod. = 36 km za hod. Teď počítejme jeho průměrnou rychlost mezi 9. a 10. hodinou. Ujel-li v té době 37,5 km, je to průměrná rychlost 37,5 km : 1 hod. = 37,5 km za hod. Mezi 9 hod. 15 min. a 9 hod. 45 min. ujel náš automobil třebas 18,5 km. Průměrná jeho rychlost v té půlhodině je 18,5 km : $\frac{1}{2}$ hod. = 37 km za hodinu.

Teď se ptejme, jak rychle jel náš automobil o půl desáté. Jak to zjistíme? Změříme dráhu za jistou dobu kolem půl desáté a dělíme ji tou dobou. Může nám vyjít ovšem leccos. Dělili jsme to třikráte a vyšlo nám pokaždé něco jiného; po prvé 36, po druhé 37,5, po třetí 37 km za hodinu. To proto, že jsme brali ty doby kolem půl desáté různé a automobil jel nerovnoměrně. Ta první doba byla 2 hodiny, to je příliš mnoho. Poslední výsledek je asi nejspolehlivější. Budou-li různí lidé měřit tu rychlost automobilu o půl desáté, vyjde jim (i když předpokládáme theoreticky naprostou přesnost měření) každému něco jiného, prostě proto, že měřili dráhu za různé doby. Ale ty výsledky všecky mají tu pozoruhodnou vlastnost, že se „hromadí" všecky kolem jistého čísla, více či méně se od něho lišíce. To číslo je t. zv. *okamžitá rychlost* našeho automobilu o půl desáté. Ta okamžitá rychlost sice obecně nikomu z měření nevyjde, ale všecky výsledky měření aproximuje. Ať si předepíši sebe menší přípustné chyby, řekněme menší než ε, které si libovolně předem zvolím, vždycky se bude naměřená průměrná rychlost od té okamžité rychlosti lišit o méně než ε, jen když časové intervaly kolem půl desáté volím dost krátké, řekneme kratší než δ. Čím větší přesnost vyžaduji, t. j. čím menší ε předepíši, tím ovšem musím volit kratší časové intervaly, menší δ.

To právě, co jsem popsal, se vyjadřuje výrokem: okamžitá rychlost je „nekonečně krátká dráha dělená příslušnou nekonečně krátkou dobou“. Ale ta okamžitá rychlost není vůbec žádný podíl. Průměrné rychlosti v časových intervalech kolem půl desáté jsou aproximovány právě tou okamžitou rychlostí a to s libovolnou přesností, jen když ty intervaly často volíme dost krátké. A výrokem o podílu nekonečně malých čísel se má právě vyjádřit, že se aproximují skutečné podíly a to s přesností libovolně se zvyšující, když ty intervaly časové a tedy i příslušné dráhy se volí kratší a kratší, aniž bychom kdy dosáhli naprosté přesnosti. Naprosté přesnosti bychom dosáhli (t. j. chybu ε stlačili na nulu), kdyby bylo možno i ty intervaly časové a příslušné dráhy stlačit na nulu, což ovšem nejde: podíl dvou nul není nic rozumného. Ta představa právě, že okamžitá rychlost je to, co bychom v tomto nemožném případě měli dostat, vedla k tomu způsobu vyjadřování o podílu nekonečně malé dráhy a nekonečně krátkého času.

Vděčíme Newtonovi a Leibnizovi za methodu, která dovoluje vypočíst takové „podíly nekonečně malých čísel“. Je to t. zv. *počet diferenciální*.

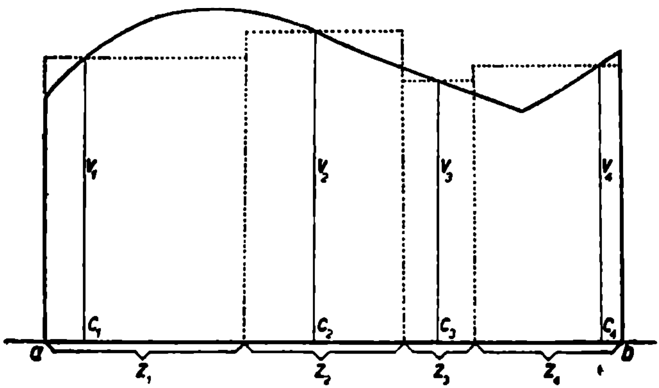
Každému číslu t přiřaďme číslo $s(t)$; na př. může t značit čas, $s(t)$ vzdálenost našeho automobilu od pevného bodu na silnici (měřeno po silnici). Mezi okamžiky t_1 a t_2 uplynula doba $t_2 - t_1$ a ujetá dráha jest $s(t_2) - s(t_1)$. Průměrná rychlost mezi okamžiky t_1 a t_2 jest

$$c_{t_1, t_2} = [s(t_2) - s(t_1)] : (t_2 - t_1).$$

Když teď v je okamžitá rychlost v okamžiku t_1, pak, ať si zvolím ε sebe menší, vždy najdu δ takové, že c_{t_1, t_2} se rovná v s chybou menší než ε, jen když jsem okamžiky t_1 a t_2 volil k t_0 blíže než o δ.

Ve fysice i v technické praxi se vyskytují na každém řádku příklady podobného druhu, kde t obecně nemusí být čas a s nemusí být vzdálenost. Číslo v, jež určíme, není ovšem obecně rychlost; v se nazývá *derivace* veličiny s podle t v „bodě“ t_0. Je tedy okamžitá rychlost v čase t_0 rovna derivaci dráhy s podle času t v okamžiku t_0.

Derivace nejsou žádné podíly; jsou podíly jen aproximovány. A pravidla pro počítání s derivacemi mnohdy jsou obdobná s příslušnými pravidly pro podíly. Nesmíme se však tím dát svést a o každém takovém pravidle, chceme-li ho užívat, musíme *vědět* zvlášť, že pro derivace platí.



Obr. 26.

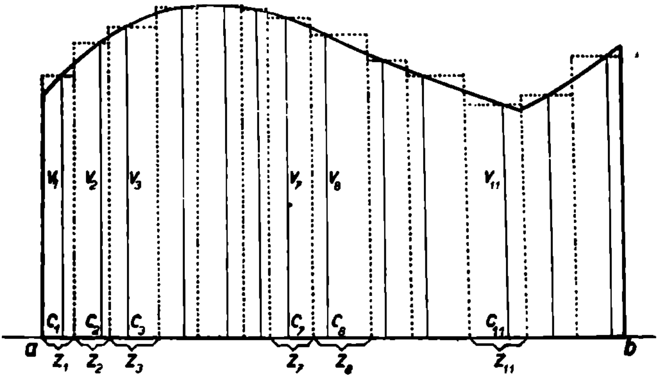
Teď zas něco jiného. Počítejme obsah plochy ohraničené silně vytaženým obrysem. (Obr. 26.)

Obsah plochy je přibližně roven obsahu plochy tečkovaných obdélníků. Obsah prvního z nich je základna z_1 krát výška v_1, obsah druhého je $z_2 . v_2$ atd. Celkem je ten přibližný obsah roven součtu všech obsahů $z_i v_i$, t. j.

$$\Sigma z_i v_i .$$

Teď místo na čtyři dílky můžeme rozdělit úsečku ab na 13 dílků, vesměs třeba kratších než byly předchozí. Zase si v těch dílcích zvolíme nějak body $c_1, c_2, \ldots$ a sestrojíme obdélníky jako prve. (Obr. 27.)

Vyjde nám zase jiný přibližný obsah. Ten závisí na počtu dílků, na tom, jaké jsou, na tom, kde volíme body $c_1, c_2, \ldots$ Ale co pak je to skutečný obsah našeho obrazce? Je to takové číslo P, které je všemi těmi přibližnými výsledky aproximováno. Ať připustná chyba je jakkoliv malá, menší než předem zvolené ε, vždycky se nám podaří P aproximovat



Obr. 27.

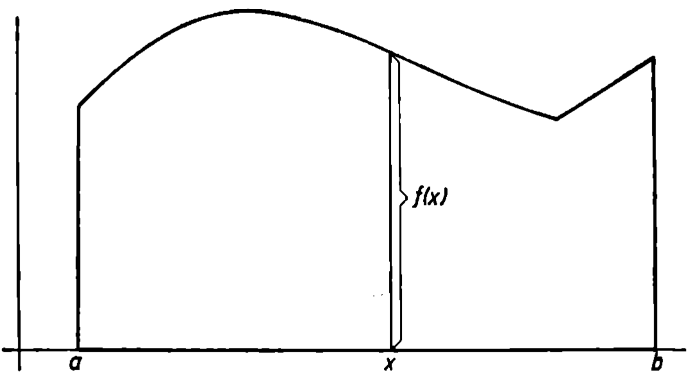
s chybou menší než ε těmi přibližnými plochami $\Sigma z_i v_i$, které mají dílky z_i, dost malé, menší než jakési δ. Čím jsou dílky z_i menší, tím je jich ovšem víc. Přesný výsledek ale nikdy nedostaneme, obsah P se žádnému z těch součtů nerovná. Je však aproximován tím lépe, čím jsou dílky z_i menší (a čím je jich tedy víc).

Říkává se, že obsah P je součet nekonečně mnoha nekonečně malých plošek $z_i v_i$. Tím se chce říci, že aproximace by byla přesná (t. j. chyba sražena na nulu), kdyby dílky byly přímo nulové a bylo jich za to nekonečně mnoho; ovšem součet nekonečně mnoha nul, myšlený v této frázi, nic rozumného není.

Je-li $f(x)$ výška křivky v bodě x (obr. 28); pak na př. $v_i = f(c_i)$ a naše součty $\Sigma z_i v_i$ jsou $\Sigma f(c_i) \, . \, z_i$. Známe-li $f(x)$ v každém bodě x, známe naši křivku. To číslo, které součty $\Sigma f(c_i) \, z_i$ aproximují, t. j. náš obsah P, se označuje

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x,$$

což se čte „integrál od a do b funkce $f(x)$". Integrál je apro-



Obr. 28.

ximován součty $\Sigma f(c_i) \, z_i$, sám však součtem není. Platí pro něj některá pravidla jako pro součty; avšak mnohá pravidla platná pro součty jsou pro integrály prostě nesprávná. Integrální počet pochází též od Newtona a Leibnize.

Není úkolem této knížky se tím podrobněji zabývat. Upozorňuji znovu na to, že s derivacemi a integrály nesmíme počítat jako s podíly a součty, pokud nám o užívaných pravidlech není o každém zvlášť známo, že pro derivace a integrály platí.

Poznámka ke konci první části. Ještě s jiného druhu „nekonečnem“ se setkáváme. My jsme si všímali nekonečného počtu prvků množiny. Odedávna však lidé uvažovali o tom, je-li prostor, v němž žijí, konečný či nekonečný. Při tom se nikterak neptali snad na to, kolik má bodů; je předem jasno, že má nekonečně mnoho bodů. Otázka po nekonečnosti prostoru se týká něčeho jiného, totiž jeho *rozlohy*. Prostor je nekonečný, když vzdálenosti jeho bodů jsou jakkoliv veliké. Zvolím-li si libovolný bod A a libovolně velikou délku δ, pak se vždycky dá najít takový bod B, který je od A vzdálen o délku ještě větší než δ. To se tedy míní nekonečností prostoru. Prostor eukleidovský, kterým se zabýváme na školách, je nekonečný. Moderní fysika však leckdy měří vzdálenosti takovým způsobem, že se náš prostor „zkroutí“, přestane být eukleidovský. Při měření běžných „malých“ délek do pouhých milionů kilometrů se ta nová míra liší od eukleidovské neuvěřitelně málo. „Zakřivení“ se objeví až při větších vzdálenostech. A jaký je ten zkroucený prostor, zda je konečný nebo nekonečný, je věcí měření a ne úvah, jako jsou věcí měření rozměry naší ložnice. Abstraktní theorie neopřená o měření nám nemůže říci nic o rozměrech konkretní ložnice, ani o rozměrech konkretního prostoru, v němž žijeme.

Zakřivení trojrozměrného prostoru lze si snad těžko představit. Ale naše představa je to poslední, čím lze ověřovat pravdu. Je zcela myslitelný trojrozměrný prostor sám o sobě uzavřený asi tak, jako ve dvou dimensích je sám o sobě uzavřen povrch koule. A tak zakřivený prostor je konečný (a nemá okraje). Zakřivení a rozměry prostoru se počítají podle rozložení hmoty, které nutno zjišťovat měřením. Definitivně uspokojivou odpověď, jak velký je náš prostor, dosud nemáme a dohady nepopularisuji.