4. UŽITÍ PLOCHY ROTAČNÍHO PARABOLOIDU K ŘEŠENÍ PLANIMETRICKÝCH ÚLOH[21]

Ježto orthogonálním průmětem eliptických řezů rovin s plochou rotačního paraboloidu na rovinu π kolmou k ose paraboloidu jsou kružnice[22] a protože naopak lze považovati každou kružnici v π za první průmět elipsy, která leží na takové pevně zvolené ploše paraboloidu, poskytuje toto vzájemně jednoznačné přiřadění elips na ploše a kružnic v π vhodnou pomůcku k řešení planimetrických úloh na základě vztahů prostorových, a to především pro kružnice.

4,1. Snadno lze z tohoto vztahu odvoditi i graficky jednoduše provésti **řešení obecné úlohy Apolloniovy**, t. j. sestrojiti kružnice, které se dotýkají tří kružnic, obecně daných v rovině π.

Řešení. Dané kružnice ${}^{i}k$, $i = 1, 2, 3$, považujme za první průměty elips ${}^{i}e$, které leží na ploše libovolně zvoleného rotačního paraboloidu, jehož osa je však kolmá k π. Pak lze každou dvojicí elips ${}^{i}e$ proložiti dvě plochy kuželové druhého stupně. Každá tečná rovina takové kuželové plochy seče plochu paraboloidu obecně v elipse e, která se dotýká obou elips ${}^{i}e$, jimiž plocha kuželová byla proložena; první průmět elipsy e je pak kružnice k, která se dotýká prvních průmětů obou použitých elips ${}^{i}e$, t. j. dvou příslušných kružnic ${}^{i}k$. Je-li tedy určena jedna plocha kuželová $\varkappa$, proložená elipsami na př. ${}^{1}e$, ${}^{2}e$, a její vrchol V, a pro elipsy ${}^{1}e$, ${}^{3}e$ opět jedna, $\varkappa'(V')$, pak společné tečné roviny ploch $\varkappa$, $\varkappa'$ poskytují svými řezy na ploše paraboloidu elipsy, které se dotýkají všech tří elips ${}^{i}e$; prvním průmětem oněch elips jsou pak kružnice,

[21]) *J. Holubář*: Rozhledy mat.-přírod., XX (1940), str. 11 a n.
[22]) Viz učebnici Dg VI—VII, str. 131.

které se dotýkají daných tří kružnic ^ik a jsou tedy výslednými kružnicemi úlohy Apolloniovy. Společné tečné roviny ploch kuželových $\varkappa$, $\varkappa'$ opravdu existují, protože plochy obsahují společnou elipsu ^1e; určíme je, sestrojíme-li vrcholovou přímku $o \equiv VV'$, pak její průsečík Q s rovinou elipsy ^1e a vedeme-li z něho tečny k elipse ^1e; tyto tečny určují spolu s přímkou o obecně dvě tečné roviny, jež poskytují vyloženým způsobem dvě kružnice, které se dotýkají daných kružnic.

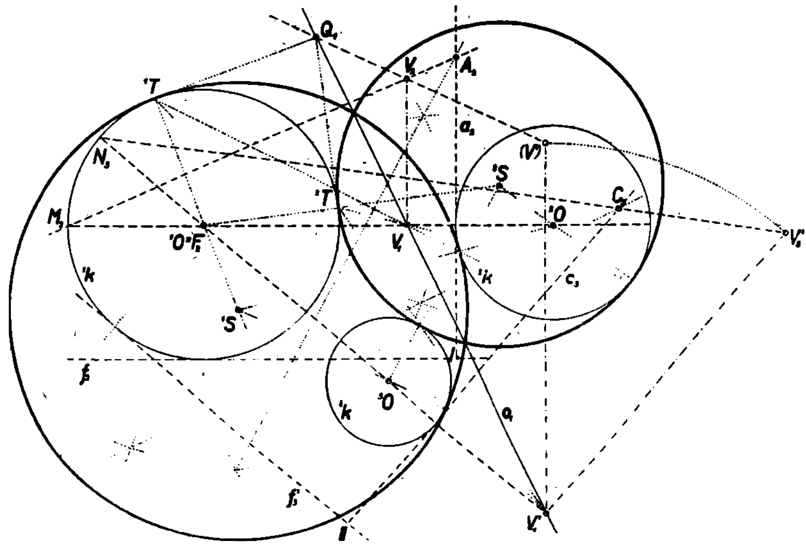
Snadno poznáme, že přímka o obsahuje také vrchol V'' třetí plochy kuželové $\varkappa''$, která je určena elipsami ^2e, ^3e, a že určené společné roviny tečné ploch $\varkappa, \varkappa'$ dotýkají se nutně i této třetí plochy $\varkappa''$. Když pak ještě použijeme dalších, druhých ploch kuželových s vrcholy U, U', U'', jež určují dvojice elips $(^1e^2e)$, $(^1e^3e)$ a $(^2e\,^3e)$, dostaneme celkem čtyři přímky vrcholové o.[23]) Ty poskytnou osm výsledků řešících obecnou úlohu Apolloniovu; výsledky mohou býti v sudém počtu někdy imaginární, to podle toho, jsou-li tečny vedené z příslušných bodů Q k elipse ^1e reálné nebo imaginární, čili jsou-li reálné nebo imaginární společné tečné roviny použitých ploch kuželových.

Provedení. Graficky úlohu provedeme jednoduše, zvolíme-li vhodně plochu rotačního paraboloidu a výhodnou polohu druhé, resp. třetí průmětny (ovšem bez rýsování elips). V obr. 17 neoznačeny pro zjednodušení indexy daných kružnic ^ik i jejich středů ^iO, které jsou jinak obvyklé pro první průměty útvarů.

Plochu rotačního paraboloidu proložme přímo kružnicí ^1k a za ohnisko F plochy zvolme pak bod ^1O. Druhou průmětnu veďme střednou $^1O^2O$, takže F_2 je v bodě ^1O a přímka řídicí f_2 druhého průmětu hlavního meridiánu je tečna kružnice ^1k, rovnoběžná s $^1O^2O$. Druhým průmětem elipsy ^2e je tedy úsečka, jejíž krajní body A_2, B_2 jsou na 2. průmětu hlavního

[23]) Bližší vysvětlení viz na konci odstavce 4,1.

meridiánu v jeho průsečících s druhým průmětem obrysových přímek promítací plochy válcové elipsy ${}^2e$, t. j. s tečnami a_2, resp. b_2, kružnice ${}^2k$, kolmými k ${}^1O{}^2O$. Stačí však určiti jen bod A_2, a to podle definice paraboly, že pro jeho průvodiče platí $\overline{IA_2} = \overline{F_2A_2}$. Jedna obrysová přímka plochy



Obr. 17. Obecná úloha Apolloniova — kružnice jako obrazy rovinných řezů na rotačním paraboloidu.

kuželové $\varkappa$, proložené dvojicí ${}^1k$, ${}^2e$, má tedy 2. průmět M_2A_2, neboť 2. průmětem kružnice ${}^1k$ jest její průměr jdoucí bodem M_2. Na M_2A_2 bude již 2. průmět V_2 vrcholu V plochy $\varkappa$. První jeho průmět V_1 jest jeden střed podobnosti kružnic ${}^1k$, ${}^2k$ (v obr. vnitřní), takže bod V_2 lze na M_2A_2 určiti ordinálou z V_1; úsečka V_1V_2 jest ovšem souřadnicí z bodu V.

Podobně proložme střednou ${}^1O{}^3O$ třetí průmětnu kolmou k π, mysleme si třetí průmět elipsy ${}^3e$ a sestrojme opět jen bod C_3, jeden krajní bod úsečky C_3D_3, která jest 3. průmětem elipsy ${}^3e$. Obdobně jako dříve je spojnice N_3C_3 třetím průmětem jedné obrysové přímky plochy kuželové $\varkappa'$; bod V'_3, třetí průmět vrcholu V' této plochy, určíme opět z 1. průmětu V'_1, který je jedním středem podobnosti kružnic ${}^1k$, ${}^3k$ (v obr. vnějším). V úsečce $V'_1V'_3$ získáváme opět souřadnici z bodu V'.

A nyní již spojnice $VV' \equiv 0$ protne π, jakožto rovinu kružnice společné plochám $\varkappa, \varkappa'$, ve svém stopníku Q. Ten sestrojíme jednoduše tak, že souřadnici z bodu V' přeneseme od V'_1 na rovnoběžku tímto bodem vedenou s V_1V_2 do bodu (V'); spojnice $V_2(V')$ protíná o_1 již v bodě Q_1. Tečny vedené z Q_1 ke kružnici ${}^1k$ stanoví na ní dotykové body ${}^1T$ a ${}^2T$ dvou výsledných kružnic, řešících úlohu Apolloniovu. Středy těchto kružnic ${}^1S$, ${}^2S$ sestrojíme pak způsobem, známým z planimetrie: Spojnice ${}^1TV_1$ určuje na ${}^2k$ a spojnice ${}^1TV'_1$ na ${}^3k$ dotykové body s prvou kružnicí výslednou a podobně i spojnice ${}^2TV_1$, resp. ${}^2TV'_1$ dotykové body s druhou kružnicí výslednou; z nich už dostáváme oba středy ${}^1S$ a ${}^2S$.

Z obr. 17 je viděti, že jsou skutečně čtyři přímky o, které spojují po třech šest vrcholů $V \dots$ a $U \dots$ pomocných ploch kuželových, jak už bylo výše řečeno, neboť první průměty bodů $V \dots$ a $U \dots$ jsou středy podobnosti daných kružnic ${}^ik$ a tedy spojnice vždy tří z šesti středů podobnosti $V_1 \dots$ a $U_1 \dots$ jsou čtyři osy podobnosti kružnic ${}^ik$, o nichž platí věta Mongeova.[24]) Při sestrojování dalších dvojic výsledných kružnic dotykových by se jen opakovala konstrukce provedená v obraze ještě třikrát.

4,2. Jako jsme ke každé kružnici k v průmětně π přiřadili na našem paraboloidu jeho elipsu e pomocí promítací plochy válcové této elipsy, tak i každé přímce a v π ležící odpovídá

[24]) Viz GV, str. 116.

na paraboloidu parabola, jejímž průmětem je právě přímka a. Konečně i každému bodu A v π odpovídá vždy jediný bod plochy a opačně. Přiřadění je opět i pro tyto útvary vzájemně jednoznačné a můžeme tedy obdobně jako v odst. 4,1 řešiti i **zvláštní úlohy Apolloniovy**, když některou danou kružnici nahradíme přímkou nebo bodem, zůstane-li mezi danými třemi prvky aspoň jedna kružnice. Provedení takových úloh jest jen pozměněním postupu užitého při úloze obecné.

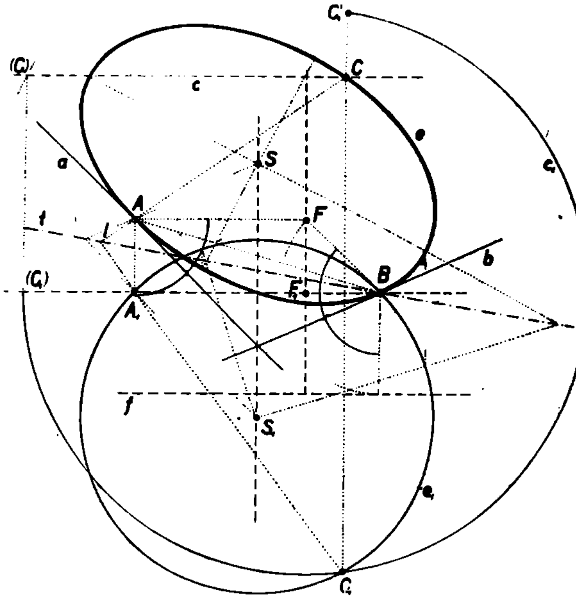
4,3. Jiné užití řezů rovin s plochou rotačního paraboloidu, jehož osa je kolmá k π, na úlohy planimetrické vyplyne z afinního vztahu mezi elipsou e_2, která je nárysem eliptického řezu na naší ploše, a kružnicí e_1, která je jeho půdorysem. Osou afinity je, jak známo, obraz t_{12} průsečnice roviny řezu s rovinou totožnosti.

Tak lze **sestrojiti elipsu,** danou třemi body A, B, C a tečnami a, b v bodech A, B, považujeme-li ji za nárys eliptického řezu na ploše rotačního paraboloidu, afinitou s kružnicí, kterážto úloha se obyčejně řeší středovou kolineací s kružnicí pomocí řezu na ploše rotačního kužele. (Viz kap. 3, odst. 3,2, c.)

Plochu rotačního paraboloidu určíme (obr. 18) hlavním meridiánem, t. j. parabolou, jdoucí danými body A, B a dotýkající se v nich daných tečen a, b.[25]) Hledaná elipsa musí se totiž dotýkati hlavního meridiánu ve dvou bodech — ať už reálných (jako v našem případě) nebo imaginárních; v imaginárních patrně tehdy, když průsečnice roviny řezu s rovinou hlavního meridiánu neprotíná hlavní meridián reálně. — Pro naši úlohu vystačíme v obraze s ohniskem F a přímkou řídicí f hlavního meridiánu, jejichž sestrojení je známo z výkladů školních a je v obrazci provedeno. Vedeme-li kdekoliv rovnoběžku s f, můžeme ji považovati za půdorys hlavního meridiánu a na ní určiti ordinálami F_1, A_1 a B_1 — v obrazci jsme ji vedli bodem B, takže $B_1 \equiv B$. Abychom určili půdo-

[25]) Indexy značící nárys pro zjednodušení v obraze vynecháme.

rys bodu C, který leží na ploše, veďme bodem C (vlastně C_2) nárys rovnoběžky (označíme jej c) a stanovme jeho krajní bod (C), jako průsečík přímky c s hlavním meridiánem (F, f). Na půdoryse c_1 rovnoběžky je pak ordinálou dvojznačně určen bod C_1, resp. C'_1. Kružnice e_1, vedená body A_1, B_1, C_1,



Obr. 18. Elipsa daná body A, B, C a tečnami a, b v bodech A, B — elipsa nárysem rovinného řezu na rotačním paraboloidu.

jest pak afinně sdružena s elipsou e. Osou afinity je přímka $t \equiv BI$. Bod C'_1 by určil druhou kružnici, opět afinně sdruženou s elipsou e; osou afinity by byla přímka t', jdoucí opět samodružným bodem B. Další určení elipsy e, t. j. sestrojení jejího středu S a os, je již známé a je provedeno i v našem obraze.

Kdyby daný bod C s prvky $A(a)$, $B(b)$ neurčoval elipsu, nýbrž hyperbolu, ukázalo by se to v obraze tak, že body C_1 a C'_1 by vyšly imaginární — ordinála jdoucí bodem C by kružnici c_1 neprotínala reálně. Kdyby konečně oba body C_1 a C'_1 splynuly na spojnici A_1B_1, pak by bod C náležel hlavnímu meridiánu a ten by určoval parabolu, při této zvláštní poloze daných prvků jimi stanovenou.

Kdyby byla dána elipsa e dvěma body A, B, jejich tečnami a, b a další tečnou c, mohli bychom ovšem větou Brianchonovou sestrojiti dotykový bod C a řešiti tuto úlohu stejným způsobem. Bylo by však možno postupovati přímo takto: Proložíme přímkou c druhou její promítací rovinu ϱ, stanovíme snadno půdorys eliptického řezu r roviny ϱ, a to kružnici r_1, mající průměr na půdoryse hlavního meridiánu, a pak určíme kružnici e_1, resp. e'_1, která prochází body A_1, B_1 a dotýká se r_1; elipsa e je pak opět afinně sdružena s e_1, resp. s druhou kružnicí e'_1.

Úloha 26. Užitím rotačního paraboloidu řešte zvláštní úlohu Apolloniovu (*kpB*). Viz označení v M. rov. k., str. 15.

Úloha 27. Sestrojte elipsu, je-li dána dvěma tečnami a, b s jejich body dotyku A, B a další tečnou. [Podle předcházejícího pokynu.]