O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů

2. Prostorový důkaz planimetrických vět

In: Josef Holubář (author): O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1948. pp. 9–18.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403213

2. PROSTOROVÝ DŮKAZ PLANIMETRICKÝCH VĚT

2,1. Věta Desarguesova.[3]) Tato věta praví: Jsou-li dva trojúhelníky v takové poloze, že spojnice dvojic sdružených vrcholů procházejí jediným bodem, protínají se dvojice sdružených stran v bodech, které leží na jedné přímce, a naopak. Věta má zvláštní theoretickou důležitost v soustavě axiomů při bádání o základech geometrie a jest základní větou synthetické geometrie rovinné.[4]) Její planimetrický důkaz vyžaduje pomocných vět o příčkách trojúhelníka a dělicích poměrech, kdežto prostorový důkaz je velmi jednoduchý.

Považujme na obr. 3 spojnice AA', BB', CC', dvojic sdružených vrcholů trojúhelníků ABC a $A'B'C'$; které procházejí bodem O, za průmět, ať rovnoběžný nebo středový, tří hran trojhranu s vrcholem O, trojúhelníky pak ABC a $A'B'C'$ považujme za průmět řezů dvou rovin s trojhranem. Pak musí průsečíky sdružených stran řezů, t. j. body $I \equiv (BC, B'C')$, $II \equiv (CA, C'A')$ a $III \equiv (AB, A'B')$ ležeti v jediné přímce o, neboť ta je průmětem průsečnice obou rovin sečných. Pro náš planimetrický útvar jest přímka o osou perspektivnosti a bod O středem perspektivnosti daných trojúhelníků, které jsou v perspektivní poloze.

Z téže prostorové interpretace plyne i obrácená věta.

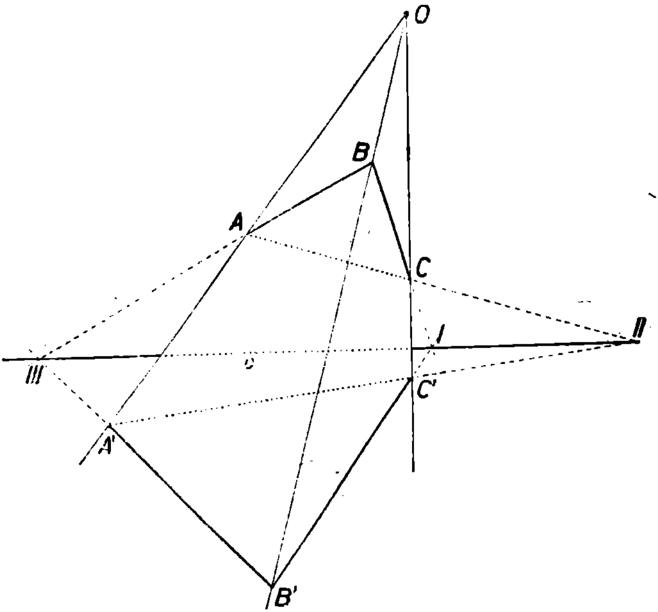
Kdyby byl bod na př. III úběžným bodem, čili kdyby sdružené přímky AB a $A'B'$ byly spolu rovnoběžné, byla by i osa o s těmito přímkami rovnoběžná, jak plyne opět z prostorové vlastnosti průsečnice rovin (ABC) a $(A'B'C')$. Zvláštní případ nastane, jestliže jsou dvě a dvě sdružené

[3]) Viz pozn. 4 na str. 25 M. rov. k.

[4]) Viz *D. Hilbert*: Grundlagen der Geometrie, Leipzig u. Berlin. 1913, kap. V.

strany trojúhelníků rovnoběžné; osa o se stane úběžnou přímkou, takže musí býti spolu rovnoběžné i strany třetí dvojice. Trojúhelníky jsou pak *homothetické*. Jiný zvláštní případ dostaneme, bude-li střed perspektivnosti v nekonečnu; trojúhelníky budou ve vztahu *perspektivní afinity*. Konečně bude-li současně také osa o v nekonečnu, budou trojúhelníky perspektivně *shodné*. Vztah trojúhelníků v perspektivní poloze vyznačené na obr. 3, když střed O i osa o jsou v konečnu, nazývá se *perspektivní kolineace*.

Poznámka. Na obr. 3 jeví se opět zvláštní uspořádání skupiny 10 bodů a 10 přímek. Snadno lze seznati, že kterýkoliv



Obr. 3. Věta Desarguesova — obraz rovinných řezů na trojhranu.

bod obrazu lze považovati za střed perspektivnosti dvou trojúhelníků, při čemž patří k němú jediná přímka jako osa perspektivnosti; na př.: střed I, trojúhelníky $BB'III$ a $CC'II$, osa OAA' a pod. Dospíváme ke konfiguraci $(10_3, 10_3)$, která se nazývá *konfigurace Desarguesova*. Značí se někdy krátce symbolem (10_3), neboť každým bodem procházejí 3 přímky a každá přímka obsahuje 3 body konfigurace.

Úloha 4. Dokažte prostorově větu: Mají-li tři trojúhelníky v rovině společný střed perspektivnosti, pak vzniklé tři osy perspektivnosti tří dvojic trojúhelníků se protínají v jednom bodě. Vzniká konfigurace $(20_3, 15_4)$, zvaná Hessova.[5])

Úloha 5. Podobně dokažte tuto větu: Jsou-li v rovině tři trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ tak položeny, že příslušné tři strany A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 atd. se vždy protínají v jednom bodě, tedy celkem ve třech bodech, které jsou na jedné přímce, pak leží příslušné tři středy perspektivnosti také na jedné přímce. Konfigurace $(15_4, 20_3)$.

Úloha 6. Dokažte větu: Jsou-li dva trojúhelníky (obrazce) homothetické k třetímu, jsou i spolu homothetické; tři středy homothetie tří dvojic trojúhelníků leží v jedné přímce. [Zvláštní případ předcházející věty.]

Úloha 7. Zvolte tři rovnoběžné úsečky, považujte je za homothetické průměry tří kružnic (vždy podle dvou středů — vnějšího a vnitřního) a dokažte pak prostorově větu Mongeovu.[6]) [Tři dané úsečky považujte za průmět pobočných hran trojbokého hranolu, na kterém jsou trojúhelníkové řezy.]

2,2. Věta Pascalova. Kuželosečka je, jak známo, určena pěti svými body. Vztah mezi šesti body kuželosečky vyjadřuje věta Pascalova: V šestiúhelníku do kuželosečky vepsaném protínají se tři dvojice protějších stran v bodech ležících na jedné přímce, t. zv. přímce Pascalově. Je to základní věta projektivní geometrie pro kuželosečky; planimetricky se dokazuje užitím věty Menelaovy[7]) a prostorově možno ji doká-

---

[5]) Podle geometra *Hesse* (zemřel 1874). Viz též Lit. V, odst. 64.

[6]) Viz GV, str. 116.

[7]) Příčka $\triangle ABC$, která neprochází žádným jeho vrcholem, protíná jeho strany v bodech A', B', C' tak, že vždycky platí $(ABC') \,.\, (BCA') \,.\, (CAB') = 1$.

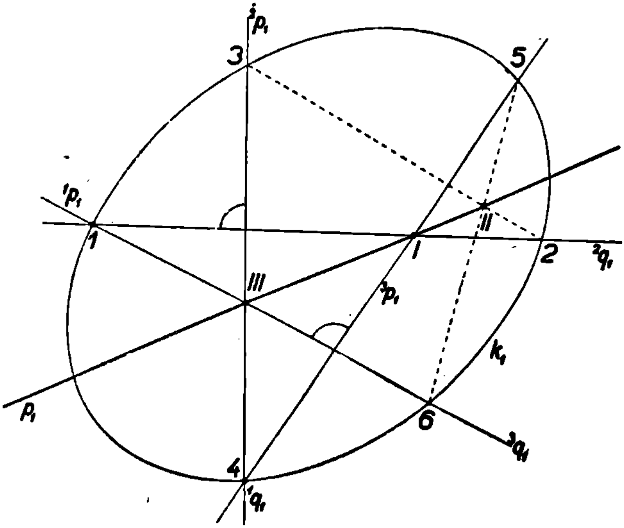
zati z vlastností povrchových přímek rotačního jednodílného hyperboloidu.[8])

Za tím účelem připomeňme si nejprve hlavní vlastnosti povrchových přímek rotačního jednodílného hyperboloidu. Tato plocha vzniká buď rotací tvořící hyperboly *h* kolem její vedlejší osy anebo otáčením přímky *p* kolem osy *o*, která je s přímkou *p* mimoběžná. Může též vzniknouti rotací přímky *q*, která je s přímkou *p* souměrně sdružena podle libovolné roviny σ, proložené osou *o*. Přímka *p* vytvoří otáčením jednu soustavu povrchových přímek plochy a přímka *q* druhou soustavu. Každá přímka *p* prvé soustavy protíná každou přímku *q* druhé soustavy, protože lze vždycky sestrojiti osou *o* rovinu souměrnosti σ zvolených přímek *p* a *q*, které se právě v σ protínají. Rovina určená přímkami *p*, *q* je tečnou rovinou hyperboloidu v bodě, který je v průsečíku přímek *p*, *q*. Přímky téže soustavy jsou však vzájemně mimoběžné: kdyby se totiž protínaly, muselo by se to státi na ose rotace *o*, ale pak by nebyly ani přímky *p* a osa *o* mimoběžné. Vedeme-li osou *o* rovinu ${}^1\sigma$ rovnoběžnou se zvolenou přímkou prvé soustavy ${}^1p$, jest přímka ${}^1q$ druhé soustavy, která je s ${}^1p$ souměrně sdružená podle roviny ${}^1\sigma$, s touto přímkou rovnoběžná: existují tedy na ploše dvojice přímek rovnoběžných, vždy jedna přímka dvojice z prvé soustavy a druhá přímka z druhé soustavy; rovina určená přímkami ${}^1p$, ${}^1q$ dotýká se hyperboloidu v úběžném bodě těchto přímek. Rotací této roviny kolem osy *o* dostaneme všecky možné takové tečné roviny hyperboloidu a ty obalují asymptotickou plochu kuželovou, která je vytvořena také otáčením asymptot tvořící hyperboly *h* kolem osy *o*.

Zvolme nyní průmětnu kolmou na rovnoběžné povrchové přímky ${}^1p$, ${}^1q$ a mysleme si libovolnou rovinu ${}^1\varrho$, protínající hyperboloid v kuželosečce *k*. Orthogonálními průměty přímek ${}^1p$, ${}^1q$ jsou body ${}^1p_1$, ${}^1q_1$ (obr. 4) a průmětem kuželosečky *k*

[8]) Pelcův důkaz; viz článek *J. Klímy* v Rozhledech mat.-přírodov., roč. II (1923), str. 38.

jest kuželosečka k_1, procházející body ${}^1p_1$, ${}^1q_1$. Průměty všech přímek prvé soustavy jdou bodem ${}^1q_1$, a průměty všech přímek druhé soustavy bodem ${}^1p_1$. Tak dvě přímky ${}^2p$, ${}^3p$ prvé soustavy a dvě přímky ${}^2q$, ${}^3q$ druhé soustavy mají na obr. své průměty ${}^2p_1$, ${}^3p_1$ procházející ${}^1q_1$ a průměty ${}^2q_1$, ${}^3q_1$ procháze-



Obr. 4. Věta Pascalova — obraz rovinného řezu a přímek rotačního jednodílného hyperboloidu.

jící ${}^1p_1$. Přímky ${}^2p$ a ${}^2q$, jakožto dvě různoběžky, určují rovinu ${}^2\varrho$ a podobně přímky ${}^3p$ a ${}^3q$ stanoví rovinu ${}^3\varrho$. Označíme-li průměty průsečíků přímek ${}^2p$ a ${}^3p$ s rovinou ${}^1\varrho$ kuželosečky k číslicemi *3, 5*, jsou tyto body v průsečících ${}^2p_1$ a ${}^3p_1$ s k_1; podobně také průměty průsečíků přímek ${}^2q$ a ${}^3q$ s rovinou ${}^1\varrho$, body *2* a *6*, leží na ${}^2q_1$, ${}^3q_1$ a k_1. A nyní je spojnice *23* průmětem průsečnice rovin ${}^2\varrho$, ${}^1\varrho$, spojnice *56* průmětem průsečnice rovin ${}^3\varrho$, ${}^1\varrho$ a dále spojnice průsečíků *III*, *I*, dvojic přímek ${}^2p$, ${}^3q$, resp. ${}^3p$, ${}^2q$, je průsečnicí p rovin ${}^2\varrho$, ${}^3\varrho$. Tyto tři průsečnice rovin ${}^i\varrho$ ($i = 1, 2, 3$) se protínají v bodě, jehož průmětem jest bod *II*. Leží tedy body *I*, *II*, *III* na jedné přímce p_1, která je Pascalovou přímkou pro šestiúhelník *123456*, jehož vrcholy *1*, *4* jsou v bodech ${}^1p_1$, resp. ${}^1q_1$, a který je vepsán kuželosečce k_1. Její body *I*, *II*, *III* určujeme vhodně podle tohoto schematu:

$$\left.\begin{array}{l} 12 \,.\, 45 \equiv I \\ 23 \,.\, 56 \equiv II \\ 34 \,.\, 61 \equiv III \end{array}\right\} p.$$

A každou kuželosečku k_1, procházející body *1*, *4*, můžeme považovati za průmět kuželosečky k, která náleží zvolenému hyperboloidu, neboť promítací válcová plocha obsahující k_1 má s hyperboloidem společné dvě jeho přímky ${}^1p$ a ${}^1q$, takže zbývající částí pronikové křivky obou ploch je kuželosečka k.

Zvláštní případ Pascalova šestiúhelníka nastane, jestliže degeneruje kuželosečka k_1 ve dvě přímky ${}^1k$, ${}^2k$ (obr. 5). Zvolíme-li na ${}^1k$ tři libovolné body označené *1*, *5*, *3* a na ${}^2k$ body *4*, *2*, *6*, protínají se příslušné dvojice přímek podle Pascalova schematu ve třech bodech *I*, *II*, *III* na přímce p. Dospějeme k zvláštní větě Pascalově, kterou znal již alexandrijský geometr Pappus (okolo r. 300 po Kr.). V projektivní geometrii nazývá se přímka p osou projektivních bodových řad na přímkách ${}^1k$, ${}^2k$ nebo též jejich direkční osou a slouží k sestrojování sdružených bodů těchto řad.[9])

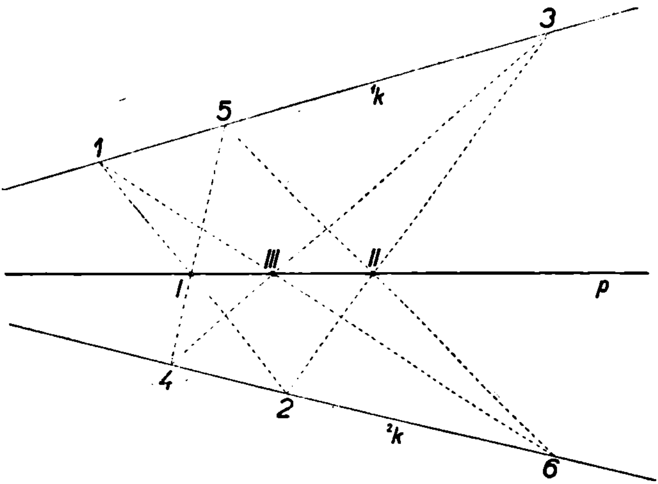
Poznámka. Na obr. 5 jest sestrojeno celkem devět přímek a každá přímka obsahuje tři body; je zde také 9 bodů a každým bodem procházejí 3 přímky. Vzniká zde konfigurace, zvaná Pascalova, jíž náleží znak (9_3). Kterákoliv přímka

[9]) Viz Lit. III, str. 12.

obrazce je Pascalovou přímkou pro určitou dvojici přímek, které představují degenerovanou kuželosečku.

Úloha 8. Dokažte prostorově větu obsaženou v obr. 5. Jak nutno voliti zde rovinu $^1\varrho$? [Rovina $^1\varrho$ je tečnou rovinou hyperboloidu.]

Úloha 9. Jakou zvláštní větu poskytne obr. 5, budou-li jednak spojnice *12* a *45* a jednak spojnice *23* a *56* spolu rovnoběžné?



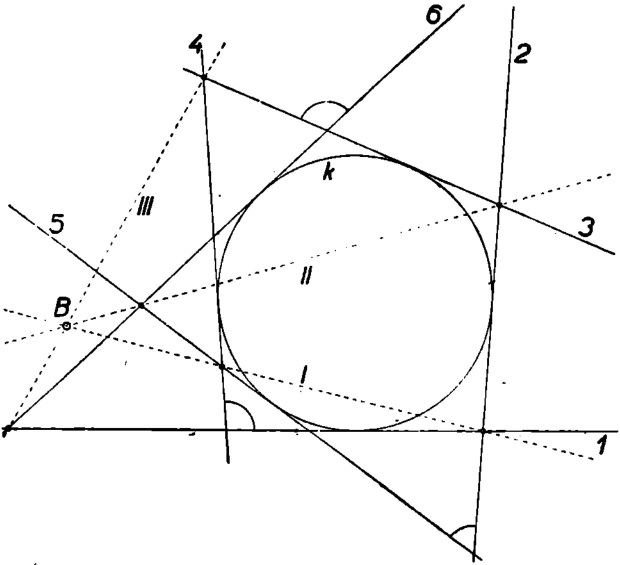
Obr. 5. Zvláštní případ Pascalova šestiúhelníka.

2,3. Věta Brianchonova. Z Pascalovy věty lze polárností odvoditi planimetricky větu Brianchonovu:[10]) V šestiúhelníku opsaném kuželosečce (kružnici) procházejí spojnice tří dvojic protějších vrcholů jediným bodem, který se nazývá bod Brianchonův. I tuto větu dokážeme prostorovou interpretací příslušného obrazce, a to pro kružnici.

---

[10]) Viz Lit. III, str. 21 a 35.

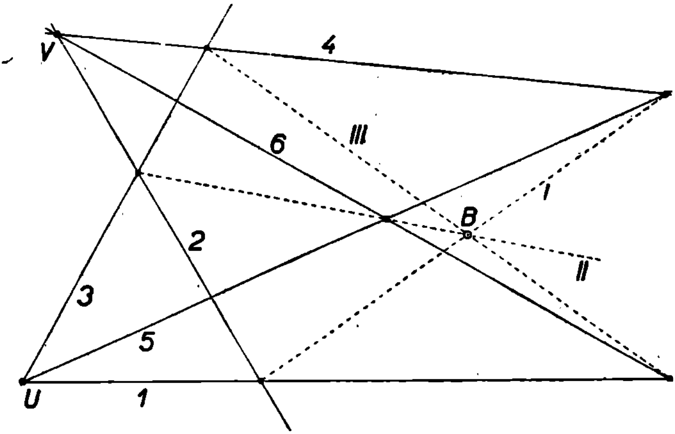
Mysleme si danou kružnici k (obr. 6) jako první obrys rotačního jednodílného hyperboloidu, jehož osa je kolmá k průmětně. Pak můžeme tečny kružnice k, označené na obr. číslicemi *1*, ..., *6*, považovati za průměty šesti povrchových přímek naší plochy. Přímky plochy *1*, *3*, *5* nechť náležejí



Obr. 6. Věta Brianchonova — obrys a obrazy přímek rotačního jednodílného hyperboloidu.

jedné soustavě povrchových přímek a přímky *2*, *4*, *6* druhé soustavě, takže jsou mimoběžné všechny liché mezi sebou a také všechny sudé mezi sebou, kdežto každá lichá protíná všechny sudé. Přímky *1* a *4* určují tedy rovinu ${}^1\varrho$, *2* a *5* rovinu ${}^2\varrho$, *3* a *6* rovinu ${}^3\varrho$. Průsečnice rovin ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$ má pak průmět v přímce *I*, jež spojuje průsečíky dvojic přímek *1*, *2* a

4, *5*. Podobně průsečnice rovin ${}^2\varrho, {}^3\varrho$ má průmět v přímce $II \equiv (2 . 3; 5 . 6)$ a průsečnice třetí dvojice rovin ${}^3\varrho, {}^1\varrho$ v přímce $III \equiv (3 . 4; 6 . 1)$. A průmět průsečíku tří rovin ${}^i\varrho$, ($i = 1, 2, 3$), jest bod B, průsečík průmětů oněch tří průsečnic I, II, III, a to bod Brianchonův. Schema, určující přímky $I, \ldots, III$ a bod B, jest totéž jako schema pro Pascalovu přímku v odst. 2,2.



Obr. 7. Zvláštní případ věty Brianchonovy.

Věta platí ovšem pro kuželosečky vůbec, což plyne ze středového průmětu obrazce 6.

K zvláštnímu případu věty Brianchonovy dospějeme, zvolíme-li degenerovanou kuželosečku, t. j. kuželosečku, která se rozpadá v dvojici bodů U, V (obr. 7):[11]) Vedeme-li bodem U tři libovolné paprsky a označíme-li je číslicemi *1*, *3*, *5* a bodem V podobně tři paprsky *2*, *4*, *6*, pak procházejí tři

[11]) Kuželosečka je vytvořena svými tečnami jako jejich obálka, a rozpadá-li se v dvojici bodů, tvoří tečny dva paprskové svazky se středy U, V.

spojnice I, II, III průsečíků příslušných dvojic paprsků 1 až 6, sestrojených podle našeho schematu, jediným bodem B.

Poznámka. Věta vyjadřující vlastnost obr. 7 je duální[12]) k zvláštní větě předcházejícího odstavce a souhrn devíti přímek a devíti bodů tvoří zde opět konfiguraci (9_3), duální ke konfiguraci Pascalově: Kterýkoliv bod je Brianchonovým bodem pro určitou bodovou dvojici, a to vždy jedinou, která představuje degenerovanou kuželosečku.

Úloha 10. Dokažte prostorově zvláštní větu Brianchonovu obrazce 7. [Považujte body U, V za orthogonální průměty dvou rovnoběžných přímek hyperboloidu do roviny k nim kolmé atd.]

[12]) Princip duality platí v projektivní geometrii pro rovinné útvary tak, že si bod a přímka přísluší duálně. Z platné věty jedné dostaneme duální větu rovněž platnou, nahradíme-li ve větě prvé prvky a útvary v ní se vyskytující prvky a útvary duálními. Bližší poučení viz na př. Lit. V, str. 515 a n.