O nekonečných řadách

1. část: Řady s konstantními členy

1. ČÁST

ŘADY S KONSTANTNÍMI ČLENY

Úvod. Kdykoli bude v dalších výkladech řečeno „číslo", je tím míněno číslo reálné. V oboru reálných čísel se pohybuje většina výpočtů středoškolské matematiky: objasním stručně pojem tohoto oboru.

Pod názvem „reálné číslo" rozumíme jednak čísla t. zv. *racionální*, t. j. taková, která lze napsati ve tvaru obyčejných zlomků, jednak čísla t. zv. *iracionální*, jako jsou na př. $\sqrt{2}$, log 2, π. Tato poslední čísla byla zavedena buď na základě požadavku, aby jisté rovnice, které neměly racionální řešení, byly řešitelné (na př. rovnice $x^2 = 2$ má řešení $x = \sqrt{2}$, rovnice $10^x = 2$ má řešení $x = \log 2$); nebo limitním postupem při řešení některých úloh (na př. číslo π při výpočtu obvodu kruhu). Přitom se mlčky předpokládá, že lze každé iracionální číslo vyjádřit ve tvaru desetinného čísla s neomezeným počtem desetinných míst; v tomto předpokladu je vlastně obsažena nevyslovená definice reálného čísla.

Chceme-li si ji objasnit, dotýkáme se otázky, co je číslo. Pro naše účely postačí toto vysvětlení: číslo je symbol, pro který jsou vymezeny určité výkony, t. zv. početní, které s ním lze prováděti, a pravidla, kterými se provádění početních výkonů řídí. Tak na př.: čísla lze sčítati. Sčítání je výkon komutativní. Nedefinujeme tedy vlastně čísla, ale počítání s nimi.

Ve smyslu této poznámky definujeme tedy reálné číslo jako tento symbol: k celému číslu připojíme sled neomezeného počtu číslic, které nazýváme decimály. Přitom je dán předpis, podle něhož lze vypočísti kteroukoli decimálu.

Pro racionální čísla souhlasí tato definice s desetinným vyjádřením čísla, které je zlomek buď ukončený nebo periodický. Příslušný předpis je dělení čitatele zlomku jmenovatelem. Na př.

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}125;$$
$$\tfrac{1}{3} = 0{,}\bar{3} = 0{,}333\ldots$$

Pro iracionální čísla, na př. $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ určujeme jeho decimály postupně na základě nerovnin:

$$\begin{aligned} 1{,}4^2 &< 2 < 1{,}5^2 \\ 1{,}41^2 &< 2 < 1{,}42^2 \\ 1{,}414^2 &< 2 < 1{,}415^2 \\ 1{,}4142^2 &< 2 < 1{,}4143^2 \text{ atd.} \end{aligned}$$

Početní výkony s iracionálními čísly definujeme v podstatě rozšířením pravidel pro počítání racionálními čísly: jest ovšem třeba jistých doplňků vzhledem k „nekonečnému počtu decimál" iracionálního čísla. O počítání s iracionálními čísly se čtenář blíže poučí v odstavci 1,18, kde o věci ještě jednou pohovořím. V praxi se iracionální čísla nahrazují racionálními čísly, na př. číslo π nahrazujeme racionálním číslem:

$$\pi \doteq 3{,}14159.$$

Počet decimál racionálního čísla záleží na přesnosti, kterou od výpočtu požadujeme.

1,1. Pojem posloupnosti a řady. Od násobilky až k nejsložitějším úlohám — všude v matematice se setkáváme se sledy*) čísel, uspořádanými podle určitého zákona. Zákon může být vysloven tak, že buď nám dovoluje vytvořit přímo libovolný (čili jak říkáme obecný) člen sledu, nebo podle něho určíme následující člen z předcházejícího. Vzhledem k okolnosti, že zákon uspořádání členů dovoluje tvořit další členy, nazývám jej někdy také slovem „předpis".

*) Slovem „sled" rozumím jisté uspořádání čísel; slovu „řada" se úmyslně vyhýbám, neboť má v dalším jiný význam.

Příklady takových předpisů:

1,1. Obecný (n-tý) člen je přirozené číslo n. Tak dostaneme sled:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

1,2. Násobky čísla 3, srovnané podle rostoucích násobitelů:

$$3, 6, 9, 12, 15, \ldots;$$

n-tý člen je $3n$.

1,3. První člen je 1; každý další je $\frac{1}{2}$ předcházejícího. Dostaneme členy

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots;$$

n-tý člen je $\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

1,4. Obecný (n-tý) člen je $\dfrac{1}{n}$; sled má členy:

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots$$

1,5. První člen je 180; každý další je největší pravý dělitel předcházejícího. Dostaneme členy:

$$180, 90, 45, 15, 5, 1.$$

1,6. n-tý člen — označíme jej a_n — je největší desetinný zlomek n-místný takový, že $a_n^2 < 2$. První člen je tedy $a_1 = 1,4$; neboť $1,4^2 < 2$, ale $1,5^2 > 2$. Druhý člen je $a_2 = 1,41$; neboť $1,41^2 < 2$, ale $1,42^2 > 2$. Tak postupujeme dále a dostaneme sled:

$$1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ 1,41421;\ \ldots$$

1,7. Předpis může býti třeba geometrický. Do daného kruhu vepišme postupně pravidelný 4-úhelník, 8-úhelník, 16-úhelník atd. a vypočtěme obsahy těchto obrazců. n-tý člen sledu budiž obsah vepsaného pravidelného 2^{n+1}-úhelníku.

Z předchozích příkladů je patrno, že předpis dovoluje obyčejně vytvořit neomezený počet členů; jen někdy (příklad 1,5) se tvoření členů samo zastaví. Sledy, jejichž počet členů je neomezený, se nazývají **posloupnosti** (čísel; jejich členy při obecném označování indexujeme, index znamená pořadí členu. Je tedy obecná posloupnost

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

zkráceně píšeme $\{a_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ nebo jen $\{a_n\}$.

V posloupnostech z příkladů 1,1, 1,2 je rozdíl (diference) dvou sousedních členů stálý (roven 1 resp. 3); taková posloupnost se nazývá *aritmetická*. V posloupnosti příkladu 1,3 je podíl (kvocient) dvou sousedních členů stálý; posloupnost se nazývá *geometrická*. Příklady 1,4 1,6 1,7 ukazují složitější posloupnosti.

Cvičení. Najděte zákon vytvoření posloupnosti a vyjádřete, je-li to možné, její n-tý člen:

1,1. $1, -3, 9, -27, 81, \ldots$; **1,2.** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$; **1,3.** $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$; **1,4.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \frac{1}{24}, \ldots$; **1,5.** $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \ldots$; **1,6.** $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$; **1,7.** $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$.

Výsledky: **1,1.** $(-3)^{n-1}$; **1,2.** $\frac{n}{n+1}$; **1,3.** $\binom{n+1}{2}$; **1,4.** $\frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{n(n+2)}$; **1,5.** $\frac{2}{n+1}$ pro n liché, $\frac{n+2}{n}$ pro n sudé; **1,6.** $(-1)^{n-1}\,n$; **1,7.** Počínaje třetím členem je každý člen součet obou předchozích.

V mnohých matematických úlohách je potřeba buď sečísti nebo znásobiti určitý počet prvních členů nějaké posloupnosti. Naznačíme-li tyto početní výkony, dostaneme výraz, kterému říkáme *řada*, resp. *součin*.

Tak na př. řada je výraz:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Podobně součin je výraz:

$$1 \,.\, 2 \,.\, \ldots \,.\, n.$$

Chceme-li vyjádřit, že ze členů posloupnosti budeme tvořit postupně součty o vzrůstajícím počtu členů (resp. součiny o vzrůstajícím počtu činitelů), píšeme schematicky

$$1 + 2 + 3 + \dots \text{(in inf.)}; \ 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \dots \text{(in inf.)}^{*)}$$

Těmto schematům říkáme **nekonečná řada**, resp. **nekonečný součin.** Zdůrazňuji, že znaménka „plus“ nebo „krát“ neznamenají provádění početního výkonu mezi nekonečně mnoha čísly (to je nemožné), ale naznačují, že tvoříme součty resp. součiny o stále vzrůstajícím počtu členů, resp. činitelů.

Připomínám ještě zkrácený a výhodný způsob psaní součtů a součinů. Používáme řeckých písmen Σ (velké sigma) pro sčítání a Π (velké pí) pro násobení takto: před obecným členem součtu (činitelem součinu) napíšeme písmeno Σ (Π) a poznamenáme, od kterého členu (činitele) po který se má sčítání, resp. násobení provádět. Tak na př. píšeme:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \dots + \tfrac{1}{100} = \sum_{n+1}^{100} \frac{1}{n}$$

$$3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, \dots \,.\, 45 = \prod_{n=3}^{45} n.$$

Analogicky k tomuto způsobu psaní píšeme *symbolicky* nekonečnou řadu nebo součin; na př.:

$$1 + 2 + 3 + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n; \ 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \dots \equiv \prod_{n=1}^{\infty} n^{**)}$$

Obecně napíšeme tedy nekonečnou řadu nebo součin

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \ \prod_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Součty $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ nazýváme *částečné součty* řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

*) Zkratka „in inf.“, t. j. „in infinitum“ znamená „do nekonečna“. Tuto zkratku obyčejně vynecháváme; není-li napsán poslední člen, znamená to vždy in inf.

**) Úmyslně zde užívám znaménka $\equiv$ (totožnost), neboť tu nejde o rovnost dvou čísel, nýbrž jen totožnost dvou označení.

tyto částečné součty zřejmě tvoří posloupnost. Podobně je tomu s částečnými součiny u nekonečného součinu.

V matematice jsou důležitější nekonečné řady než nekonečné součiny. Proto je tato příručka věnována hlavně řadám.

Cvičení 1,8. Z každé z posloupností příkladu 2, 3, 4 a úloh 1 až 7 utvořte řadu a vyjádřete ji s pomocí symbolu Σ.

Ještě jedna důležitá **poznámka:**

Členy posloupnosti můžeme — jakožto reálná čísla — graficky znázorniti body na ose číselné. Podobně z členů řady algebraickým sčítáním úseček dostaneme body, které nám představují částečné součty řady. Toto znázornění je velice výhodné pro sledování vlastností posloupností i řad a budu se často na ně odvolávati.

Cvičení 1,9. Znázorněte ve velkém měřítku na ose číselné několik prvních členů posloupnosti a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$; b) $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$

1,2. O řadách aritmetických. Řada, utvořená z členů aritmetické posloupnosti, se nazývá *aritmetická*. Je to zvláštní případ obecnějšího druhu řad, t. zv. aritmetických řad vyšších stupňů, o kterých stručně pojednám v tomto odstavci.

Utvoříme-li rozdíly sousedních členů dané řady, dostaneme novou řadu, které říkáme *diferenční*; k řadě diferenční můžeme utvořit opět diferenční řadu; je to t. zv. *2. diferenční řada* k původní řadě, atd. Na př. řada:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots$$

má 1. diferenční řadu:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$$

a 2. diferenční řadu:

$$2 + 2 + 2 + 2 + \ldots$$

Definujeme: řada se nazývá *aritmetická stupně k*, má-li její k-tá diferenční řada všechny členy stejné.

Podle této definice je obyčejná aritmetická řada stupně 1, nahoře uvedená řada stupně 2. Z definice je dále patrné, že aritmetická řada stupně k je jednoznačně určena svým prvním členem a prvními členy svých k diferenčních řad, tedy $k + 1$ veličinami.

Abychom mohli pracovati s těmito řadami, je třeba vyjádřit n-tý člen. U aritmetické řady prvního stupně je její n-tý člen — jak známo ze střední školy — polynom v n stupně 1; platí totiž

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = (a_1 - d) + d \cdot n.$$

Obráceně řada, jejíž obecný člen je polynom v n stupně 1, je aritmetická stupně 1. Obecněji řada, jejíž n-tý člen je polynom v n stupně k, t. j.

$$a_n = \alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} n + \alpha_k, \tag{1}$$

je aritmetická stupně k. Neboť její 1. diferenční řada má obecný člen:

$$b_n = a_{n+1} - a_n = \alpha_0(n^k + n^{k-1} + \ldots + 1) + \\ + \alpha_1(n^{k-1} + \ldots + 1) + \ldots + \alpha_{k-1},$$

t. j. polynom v n stupně $k - 1$. 2. diferenční řada bude tedy stupně $k - 2$, atd.; k-tá diferenční řada bude stupně 0, t. j. původní řada je stupně k.

Je nyní otázka, lze-li n-tý člen *každé* aritmetické řady stupně k vyjádřit jako polynom (1). Odpověď je kladná a důkaz se provede takto:

Stačí dokázat, že koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ lze vhodně zvolit tak, aby první člen řady Σa_n i první členy jejich k diferenčních řad byly rovny $k + 1$ předem zvoleným číslům. Tyto první členy jsou po řadě:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1} + \alpha_k, & \\
A_0\alpha_0 + A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_{k-1}\alpha_{k-1}, & A_{k-1} \neq 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
M_0\alpha_0 + M_1\alpha_1, & M_1 \neq 0 \\
N_0\alpha_0, & N_0 \neq 0
\end{array}$$

kde $A_0, \ldots, N_0$ jsou zvláštní čísla. Položíme-li těchto $k + 1$ výrazů rovných $k + 1$ daným číslům, můžeme z těchto rovnic vypočísti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Tím je tvrzení dokázáno.

Součty ar. řady stupně k tvoří patrně aritmetickou řadu stupně $k + 1$, neboť její $(k + 1)$-ní řada diferenční má všechny členy stejné. Připojíme-li k řadě součtů jako první člen nulu, je součet s_n původní řady roven $(n + 1)$-nímu členu této řady součtů, t. j. polynom v $n + 1$ stupně $k + 1$:

$$s_n = \beta_0(n + 1)^{k+1} + \beta_1(n + 1)^k + \ldots + \beta_{k+1}.$$

Poněvadž 1. člen řady součtů je nula, anuluje se tento polynom pro $n = 0$. T. j. s_n lze vyjádřit jako polynom v n stupně $k + 1$ s nulovým absolutním členem.

Máme tedy výsledek

(V. 1,1.) *Obecný člen aritmetické řady stupně k je polynom v n stupně k; součty této řady jsou dány polynomem v n stupně $k + 1$ s nulovým absolutním členem.*

Většina čtenářů zná asi vtipný způsob, kterým *Gauss* kdysi odvodil vzorec pro součet aritmetické řady:

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} = \frac{d}{2} n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) n.$$

K témuž výsledku dospějeme podle vyslovené věty takto: součet ar. řady je polynom v n stupně 2, t. j.

$$s_n = \beta_0 n^2 + \beta_1 n.$$

Koeficienty β_0, β_1 určíme z rovnic, které dostaneme dosazením $n = 1, 2$;

$$\beta_0 + \beta_1 = s_1 = a_1$$
$$4\beta_0 + 2\beta_1 = s_2 = 2a_1 + d.$$

Odtud $\beta_0 = \frac{d}{2}$, $\beta_1 = a_1 - \frac{d}{2}$.

Cvičení 1,10. Odvoďte podobným způsobem výsledky:

a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1,11. Vypočtěte součty:

a) $1.(1+3) + 2.(2+3) + \ldots + n(n+3)$ $\left[s_n = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}\right]$

b) $\sum_{i=1}^{n} \binom{i+1}{2}$ $\left[s_n = \binom{n+2}{3}\right]$

c) $\sum_{i=1}^{n} (i^2 - 3i + 2)$ $\left[s_n = 2\binom{n}{3}\right]$

U *nekonečných* řad aritmetických nás zajímá otázka, jak se chovají součty s_n takové řady, vzrůstá-li index n neomezeně. Obecný součet je dán podle dokázané věty vzorcem:

$$s_n = \beta_0 n^{k+1} + \beta_1 n^k + \beta_2 n^{k-1} + \ldots + \beta_k n.$$

Dokážeme: je-li $\beta_0 > 0$ (kladné), pak součty s_n o rostoucím n vzrůstají nade všecky meze, čili — jak říkáme — rostou do $+\infty$. O řadě pak pravíme, že *diverguje k* $+\infty$:.

Je-li $\beta_0 < 0$ (záporné), pak součty s_n s rostoucím n se zmenšují pod všecky meze, čili — jak říkáme — rostou do $-\infty$. O řadě pak pravíme, že *diverguje k* $-\infty$.

Řady (nekonečné), jejichž částečné součty mají jednu nebo druhou vlastnost, nazýváme **určitě divergentní** (rozbíhavé). Máme tedy výsledek:

(V. 1,2.) *Každá aritmetická řada nekonečná je určitě divergentní.*

Důkaz hořejšího tvrzení:

Budiž třeba $\beta_0 > 0$. Nejnepříznivější případ pro vzrůst s_n je, jsou-li všechna ostatní β_i záporná, t. j. $\beta_1 = -\gamma_1 < 0, \ldots$ $\ldots, \beta_{k+1} = -\gamma_{k+1} < 0$.

$$s_n = \beta_0 n^{k+1} - (\gamma_1 n^k + \gamma_2 n^{k-1} + \ldots + \gamma_{k+1} n^0). \qquad (2)$$

Ježto platí $n^i < n^k$, je-li $i < k$, zmenší se pravá strana rovnice (2), nahradíme-li v závorce všechny mocniny n^i mocninou n^k, t. j.

$$s_n > \beta_0 n^{k+1} - (\gamma_1 n^k + \gamma_2 n^k + \ldots + \gamma_{k+1} n^k) = n^k(\beta_0 n - \\ - \gamma_1 - \gamma_2 - \ldots - \gamma_{k+1}) \qquad (3)$$

Pro dostatečně velké n je závorka výrazu (3) kladná a protože mocnina n^k roste s rostoucím n nade všecky meze, platí totéž i o součtu s_n. Podobně postupujeme v případě $\beta_0 < 0$.

1,3. Řada geometrická jako příklad řady konvergentní. Pro součty řady geometrické, t. j. řady utvořené z členů geometrické posloupnosti, se odvozuje na střední škole vzorec:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad (4)$$

kde a_1 je první člen řady, q její kvocient. Jde tedy o řadu

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}.$$

Chování součtů nekonečné geometrické řady je rozmanitější, než je tomu u aritmetických řad.

1. Je-li $q > 1$ (tedy kladné), usoudíme snadno ze vzorce (4), že řada je **určitě divergentní**, a to diverguje k $\pm \infty$ podle toho, je-li $a_1 \gtrless 0$.

2. Obdobný výsledek platí pro $q = 1$. V tomto případě ovšem nelze užít vzorce (4) (v jmenovateli by byla 0), ale výsledek je — jak říkáme — triviální, neboť řada má všechny členy $= a_1$.

3. Je-li $q < -1$ (tedy záporné), pak součty s_n mají podle vzorce (4) střídavá znaménka, ale jejich prosté hodnoty se stále zvětšují.

4. Je-li $q = -1$, má řada tento tvar:

$$a_1 + (-a_1) + a_1 + (-a_1) + \ldots$$

Součty s_n nabývají tedy střídavě hodnot a_1 a 0.

Řady, jejichž součty se chovají jako v případě 3., 4., t. j. ani nevzrůstají určitě buď k $+\infty$ nebo k $-\infty$, ani se neblíží nějaké hodnotě, se nazývají **neurčitě divergentní.**

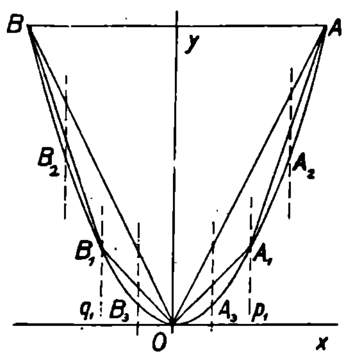
5. q leží mezi -1 a $+1$, t. j. $-1 < q < +1$ čili $|q| < 1$.

Tento případ je nejzajímavější. S rostoucím n totiž q^n se blíží k nule, t. j. zlomek ve vzorci (4) se blíží hodnotě $\frac{1}{1-q}$, s_n se blíží hodnotě $\frac{a_1}{1-q}$. Této hodnotě říkáme součet nekonečné geometrické řady, ač to ve skutečnosti žádný součet není. Řada s tímto chováním částečných součtů se nazývá **konvergentní** (sbíhavá).

Shrneme-li výsledky 1.—5., vyslovíme tuto větu:

(V. 1,3.) *Nekonečné geometrické řady jsou trojího druhu: je-li kvocient $q \geqq 1$, je řada určitě divergentní; je-li kvocient $q \leqq -1$, je řada neurčitě divergentní; je-li kvocient q takový, že $|q| < 1$, je řada konvergentní.*

Většině čtenářů je asi známo dosti příkladů použití konvergentních geometrických řad. Připomenu zde klasický příklad kvadratury paraboly*) t. zv. vyčerpávací metodou, protože pěkně ukazuje cestu, jak užívati konvergentních řad k určování obsahů ploch.



Obr. 1.

*) Kvadraturou nazýváme určení obsahu obrazce.

Budeme určovati obsah úseče paraboly $y = x^2$, omezené obloukem křivky a tětivou AB, rovnoběžnou s osou x (obr. 1).

K tětivám OA, OB vedeme sdružené průměry p_1, q_1 (t. j. rovnoběžky s osou paraboly, které tětivy půlí) a dostaneme průsečíky A_1, B_1 těchto průměrů s parabolou. Dále sestrojíme průměry, sdružené s tětivami BB_1, B_1O, OA_1, A_1A, dostaneme další průsečíky B_2, B_3, A_3, A_2 a tak pokračujeme dále. Provedeme-li dostatečný počet kroků, pak mnohoúhelník, složený z trojúhelníků

$$OAB + (OA_1A + OB_1B) + (OA_3A_1 + A_1A_2A + OB_3B_1 + \\ + B_1B_2B) + \dots \quad (5)$$

se libovolně málo liší od úseče (OAB). Obsah tohoto mnohoúhelníku, který je součtem obsahů jednotlivých trojúhelníků, se při rostoucím počtu kroků n blíží jistému číslu (jak bude z dalšího patrno) a toto číslo prohlašujeme za obsah parabolické úseče.

V učebnicích analytické geometrie se dokazuje z vlastností paraboly, že součet obsahů trojúhelníků, ke kterým dospějeme při n-tém kroku, je čtvrtina součtu obsahů příslušných trojúhelníků při $(n - 1)$-ním kroku. Jinými slovy: výraz (5) je geometrická řada s kvocientem $\frac{1}{4}$, jejíž první člen je $\triangle\, OAB = x_1y_1$.

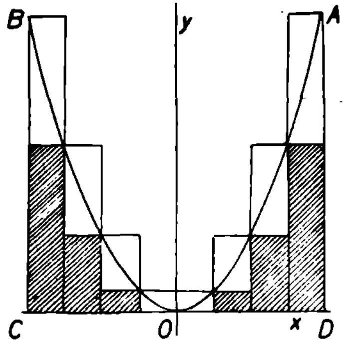
Taková geometrická řada je podle věty 1,3 konvergentní; její „součet", t. j. číslo, kterému se blíží částečné její součty, je

$$s = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{x_1y_1}{1 - \frac{1}{4}} = \tfrac{4}{3}x_1y_1. \quad (6)$$

Vracím se ještě k výroku, že toto číslo prohlašujeme za obsah úseče paraboly. To je vlastně definice, ke které jsme ovšem vedeni; ale její plnou oprávněnost vyložím na konci odst. 1,4, ve kterém probereme ještě jiný způsob kvadratury paraboly.

1,4. Jiný způsob kvadratury jako příklad konvergentní posloupnosti. Provedeme kvadraturu paraboly $y = x^2$ ještě jiným způsobem, který je vlastně metodou integrálního počtu.

Vypočteme obsah doplňkové části k úseči, t. j. obrazce ($AOBCODA$) (viz obr. 2). Tento obrazec je uzavřen mezi dva stupňovité obrazce, složené z obdélníků: menší je vyčárkovaný, větší silně ohraničený. Rozdělíme-li úsečky OC, OD na dostatečně velký počet n stejných dílů (na obr. 2 $n = 4$) a sestrojíme obdélníčky podle obrázku, budou se oba stupňovité obrazce libovolně málo lišiti od doplňkové části úseče. Vypočtěme obsahy obou stupňovitých obrazců.



Obr. 2.

Obsah P_n menšího z nich (vyčárkovaného) je patrně podle obrázku:

$$P_n = 2\left[\frac{x_1}{n} . 0 + \frac{x_1}{n}\left(\frac{x_1}{n}\right)^2 + \frac{x_1}{n}\left(\frac{2x_1}{n}\right)^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{x_1}{n} . \left(\frac{(n-1)x_1}{n}\right)^2\right],$$

t. j.

$$P_n = 2\frac{x_1{}^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] = 2\frac{x_1{}^3}{n^3}s_{n-1} =$$

$$= 2\frac{x_1 y_1}{n^3}s_{n-1},$$

kde s_{n-1} je součet $n - 1$ členů aritmetické řady $1^2 + 2^2 +$

$+ 3^2 + \ldots$ Podle cvičení 1,9 a) je $s_{n-1} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$,

t. j.

$$P_n = \frac{x_1 y_1}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

Podobně dostaneme pro obsah P'_n většího stupňovitého obrazce výsledek:

$$P'_n = 2\frac{x_1 y_1}{n^3} s_n,$$

kde $s_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Po dosazení za s_n vyjde:

$$P'_n = \frac{x_1 y_1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Posloupnost čísel P_n má tu vlastnost, že její členy s rostoucím indexem n se blíží neomezeně jisté hodnotě, totiž hodnotě $\frac{2}{3}x_1 y_1$. Posloupnosti této vlastnosti se říká *konvergentní* a číslu, kterému se blíží její členy — v našem případě $\frac{2}{3}x_1 y_1$ — se říká *limita* (mezní hodnota). Také posloupnost P'_n je konvergentní a má stejnou limitu $\frac{2}{3}x_1 y_1$.

Poněvadž doplňková část úseče je stále mezi oběma stupňovitými obrazci a jejich obsahy se blíží společné hodnotě $\frac{2}{3}x_1 y_1$, jsme názorem vedeni k tomu, prohlásiti tuto hodnotu za obsah doplňkové části. Podle názoru nyní očekáváme, že obsah úseče vypočtený ve vzorci (6) a obsah doplňkové části $\frac{2}{3}x_1 y_1$ dají dohromady obsah obdélníku $ABCD$. Skutečně tomu tak je, neboť

$$\frac{4}{3}x_1 y_1 + \frac{2}{3}x_1 y_1 = 2x_1 y_1.$$

Nyní ještě k vysvětlení definice obsahu n úseče resp. její doplňkové části. Při druhém způsobu kvadratury jsme ohraničili doplňkovou část jistými stupňovitými obrazci, které se postupně neomezeně blížily doplňkové části. Kdybychom zvolili k ohraničení jiné obrazce,*) dostali bychom jiné posloupnosti obsahů. Bude-li však splněna podmínka, že se obrazce neomezeně blíží doplňkové části, budou všechny tyto posloupnosti konvergentní — jak lze dokázat — a budou mít společnou limitu $\frac{2}{3}x_1y_1$. Proto jsme plně oprávněni prohlásiti tuto limitu za obsah doplňkové části úseče.

Podobně je tomu při prvním způsobu kvadratury. Úseč můžeme „skládati" i jinak než z trojúhelníků, jak jsme to učinili. Dostaneme jiné řady (třeba nikoli geometrické); ale je-li splněna podmínka, že se skládané obrazce blíží neomezeně úseči, mají všechny tyto řady stejný „součet" — t. j. obsah úseče.

Vzpomeňme ještě na příklad 1,7. Tam byl kruh vytvořen jako mezní obrazec k vepsaným pravidelným mnohoúhelníkům. Posloupnost jejich obsahů je — jak se dokazuje — konvergentní a její limita je obsah kruhu.

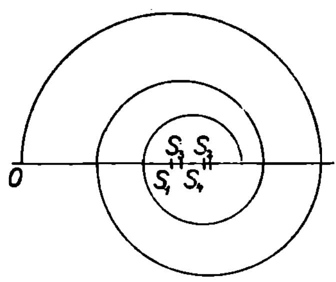
Na těchto malých ukázkách je vidět, jak důležité jsou — na př. v geometrii — konvergentní posloupnosti a řady. Proto musíme precisovati pojem konvergence a limity a odvoditi základní vlastnosti konvergentních řad; to bude obsahem dalších oddílů.

Cvičení 1,12. a) Určete délku spirály, složené z polokružnic, jejichž středy jsou na téže přímce, poloměr první z nich je roven 1 a poloměr každé následující jsou $\frac{3}{4}$ předcházejícího.

b) Jak je vzdálen od počátku O této spirály bod S, ke kterému spirála směřuje? (Obr. 3.)

Vyjde a)

$d = 4\pi$, b) $\overline{OS} = 1\frac{1}{7}$.



Obr. 3.

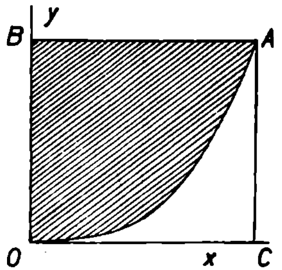
*) Na př. složené z lichoběžníků, jejichž jedna strana by byla tětiva, resp. tečna paraboly.

1,13. Proveďte kvadraturu kubické paraboly $y = x^3$, t. j. určete obsah úseče (OAB) pomocí doplňkové části (OAC), postupem, jakého bylo užito v odst. 1,4 pro kvadrickou parabolu. Použijte přitom výsledku cvičení 1,10 b)! (Obr. 4.)

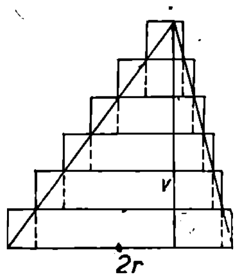
[Vyjde $\frac{3}{4}x_1y_1$].

1,14. Proveďte kubaturu*) kosého kužele kruhového, tím, že jej uzavřete mezi dvě tělesa, složená z rotačních válců, jak je naznačeno na obrázku. Objemy těchto těles tvoří posloupnosti o společné limitě, která je objemem kužele. (Obr. 5.)

[Vyjde $\frac{1}{3}\pi r^2 v$].



Obr. 4.



Obr. 5.

1,5. Pojem konvergence a limity. Konvergentní posloupnost a řadu jsme zhruba charakterisovali tím, že její členy, resp. částečné součty se blíží s rostoucím indexem n jisté hodnotě — t. zv. **limitě.** Protože částečné součty řady tvoří posloupnost, je vlastně konvergence posloupnosti a řady jedno a totéž: místo „konvergence řady“ můžeme říkat „konvergence posloupnosti jejích částečných součtů“, a obráceně.

Použijeme grafického znázornění třeba pro konvergentní geometrickou řadu z odst. 1,3, jejíž $a_1 = x_1y_1 = 3$, $q = \frac{1}{4}$. Její částečné součty jsou:

$$s_1 = 3,\ s_2 = 3\tfrac{3}{4},\ s_3 = 3\tfrac{15}{16},\ s_4 = 3\tfrac{63}{64},$$

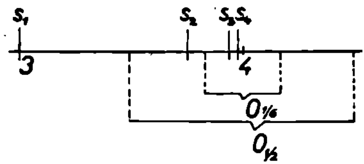
*) Kubatura tělesa je určení jeho objemu.

obecně

$$s_n = 3 + \frac{4^{n-1} - 1}{4^{n-1}}. \tag{7}$$

O této řadě víme, že má limitu $\frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4$; sestrojme si (obr. 6) úsečku se středem v bodě 4 a o délce $\frac{1}{3}$. Tato úsečka obsahuje uvnitř všechny body, odpovídající číslům x, která vyhovují nerovnostem:

$$4 - \tfrac{1}{6} < x < 4 + \tfrac{1}{6}.$$



Obr. 6.

Tuto úsečku' resp. souhrn těchto čísel, nazýváme *okolí bodu* 4*) a označujeme je $O_{\frac{1}{6}}$. Z obrázku je patrno, že v okolí $O_{\frac{1}{6}}$ leží všechny součty s_n s výjimkou s_1, s_2. Kdybychom si sestrojili libovolné jiné okolí bodu 4, třeba O_ε, kde ε je libovolně malé kladné číslo, budou ležeti v O_ε zase všechny body s_n s výjimkou konečného počtu počátečních. Na základě tohoto výkladu můžeme formulovati přesnou definici konvergentní posloupnosti či řady.

Pravíme, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k limitě a, jestliže v každém okolí bodu a leží všechny členy posloupnosti nejvýše s výjimkou konečného počtu členů.

Vyslovte sami obdobnou definici pro konvergentní řadu!

Definici formulujeme geometricky pro jednoduchost; ale zřejmě ji můžeme vyslovit ryze aritmeticky (pomocí nerovností):

Posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k limitě a, platí-li nerovnosti

---

*) Výrazů „číslo" nebo „bod", který je jeho obrazem, užívám střídavě.

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

pro všechny indexy n od určitého počínaje (jiné vyslovení „výjimky konečného počtu“).

Způsob psaní: u posloupností $\{a_n\}$ píšeme

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

nebo jinak

$$a_n \to a;$$

u řad nazýváme limitu posloupnosti $\{s_n\}$, t. j. limitu posloupnosti částečných součtů, **„součtem řady“** (pozor — není to skutečný součet!) a píšeme

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

což znamená

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

kde $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Příklady. 1,8. Posloupnost geometrická s kladným kvocientem $q < \frac{1}{10}$ konverguje k nule. Její obecný člen je totiž

$$a_n = q^n;$$

podle předpokladu je $q^n < 10^{-n}$; pravou stranu této nerovniny lze *při dostatečně velkém* n (t. j. od určitého n počínaje) učiniti menší než libovolné číslo ε; pak ovšem platí

$$-\varepsilon < q^n < +\varepsilon,$$

čili q^n leží v okolí O_ε bodu 0.*)

1,9. Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ konverguje k nule. Stačí zvoliti $n > \frac{1}{\varepsilon}$ a všecky členy a_n pak leží v okolí O_ε.

*) Podobný výsledek lze dokázat obecněji pro každé $q < 1$.

1,10. Posloupnost

$$\tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{7},\ \ldots$$

(jaký je zákon vytvoření?) konverguje také k nule. Odůvodněte podrobně!

1,11. Řada

$$\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

je konvergentní a má součet 1. Neboť její obecný člen lze rozložit:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

t. j.

$$s_n = (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \ldots + \\ + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Cvičení 1,15. Posloupnost $\{a_n\}$, kde

$$a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}.$$

konverguje k 1; dokažte a znázorněte graficky!

1,16. Zjistěte, které členy posloupnosti (7) neleží v okolí $O_{\frac{1}{140}}$ bodu 4. [Členy s_1, s_2, s_3, s_4, s_5.]

1,17. Od kterého indexu počínaje leží všechny součty geometrické řady alternující

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} - \ldots$$

v okolí $O_{\frac{1}{21}}$ jejího součtu? [Od $n = 4$.]

1,18. Tatáž otázka pro posloupnost:

$$1,\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{8},\ \ldots,$$

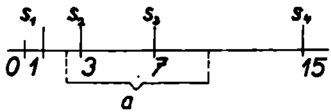
[Od $n = 6$.]

1,19. Dokažte konvergenci řady $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ a určete její součet!

[Návod: Rozložte $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$ a vyjádřete s_n. Vyjde $s = \frac{3}{4}$.]

1,20. Posloupnost z příkladu 1,6 konverguje k $\sqrt{2}$. Dokažte! Podobně se dokazuje, že každé reálné číslo je limitou posloupnosti racionálních čísel.

1,6. Posloupnosti a řady divergentní. Je třeba nyní se zmínit o posloupnostech a řadách, které nejsou konvergentní. Dotkli jsme se této otázky už při geometrických řadách.



Obr. 7.

Znázorněme si graficky (obr. 7) součty geometrické řady, kterou jsme nazvali určitě divergentní, na př. $a_1 = 1$, $q = 2$, t. j. $s_n = 2^n - 1$.

Zvolíme-li si libovolnou úsečku a na ose číselné, leží všechny součty s výjimkou nejvýše konečného počtu vně této úsečky, a to od určitého indexu počínaje vpravo.

Úsečky na ose číselné jakožto souhrn bodů nazýváme z početního hlediska **intervalem.** Interval (uzavřený) je tedy množina čísel, která vyhovují nerovnostem:

$$a \leqq x \leqq b,$$

kde a, b jsou čísla navzájem různá, $a < b$.

Určitě divergentní posloupnost, resp. řadu pak definujeme takto:

Posloupnost $\{a_n\}$ určitě diverguje, leží-li všechny její členy s výjimkou nejvýše konečného počtu vně libovolného intervalu; a to při divergenci k $(+\infty)$ vpravo tohoto intervalu a při divergenci k $(-\infty)$ vlevo tohoto intervalu.

Aritmeticky vyjádřeno:

Posloupnost $\{a_n\}$ diverguje k $(+\infty)$, jestliže pro každé (libovolně velké) číslo K platí nerovnost

$$a_n > K$$

od určitého indexu n počínaje.

Vyslovte obdobné definice pro řady (t. j. pro posloupnosti jejich částečných součtů)! Každá posloupnost nebo řada, která není ani konvergentní ani určitě divergentní, se nazývá *neurčitě divergentní*. Posloupnosti a řady určitě i neurčitě divergentní se nazývají souhrně divergentní.

Příklady. 1,12. Řada

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + - \dots$$

je neurčitě divergentní. Neboť členy posloupnosti jejích součtů

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

vzrůstají zároveň do $+\infty$ i do $-\infty$.

1,13. Řada

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{8} + \tfrac{3}{4} - \tfrac{13}{16} + \tfrac{7}{8} - + \dots$$

(jaký je zákon vytvoření?) je také neurčitě divergentní. Neboť členy posloupnosti jejích částečných součtů, totiž

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{7}{8}, \tfrac{1}{16}, \tfrac{15}{16}, \dots$$

se blíží s rostoucím indexem *dvěma* hodnotám: 0, 1.

1,14. V dosavadních příkladech neurčitě divergentních posloupností členy buď zároveň vzrůstaly do $+\infty$ i $-\infty$ (př. 1,12) nebo se blížily dvěma hodnotám (př. 1,13). Členy mohou také vzrůstati i blížiti se nějaké hodnotě, jako na př. u posloupnosti

$$2, \tfrac{1}{2}, 3, \tfrac{1}{3}, 4, \tfrac{1}{4}, \dots$$

Zajímavý je příklad neurčitě divergentní posloupnosti, jejíž členy se blíží libovolné kladné hodnotě. Je to posloupnost všech kladných racionálních čísel. Sestavme kladná racionální čísla $\frac{p}{q}$ do skupin tak, že do n-té skupiny dáme ta čísla, pro něž $p + q = n$. Dostaneme posloupnost

$$0 \mid 1 \mid \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}, \mid \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{2}, \tfrac{3}{1}, \mid \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{1}, \mid \ldots \qquad (8)$$

V této posloupnosti jsou zřejmě obsažena všechna kladná racionální čísla (některá se opakují). Zvolíme si libovolné kladné reálné číslo $N > 0$ a napíšeme je v desetinném vyjádření, na př.

$$N = 12{,}68541023\ldots$$

V posloupnosti (8) se vyskytují racionální čísla

$$12{,}0;\ 12{,}6;\ 12{,}68;\ 12{,}685;\ 12{,}6854;\ 12{,}68541;\ \ldots; \qquad (9)$$

která se neomezeně blíží číslu N.*)

1,7. Základní pravidla pro počítání řadami.

Je-li dána nějaká posloupnost či řada, mají pro teorii i pro užití zásadní důležitost dvě otázky:

1. Konverguje předložená řada (posloupnost), či nikoli?
2. Konverguje-li, jaký je její součet (limita)?

Odpověď na první otázku si představujeme ve formě pravidla, které nám dovoluje z vlastností členů řady (posloupnosti) usuzovati na její konvergenci. (Připomeňte si na př. pravidlo, kdy je geometrická řada konvergentní!) Hledáme tedy podmínky, které *stačí* k tomu (proto se nazývají *podmínky postačující*), aby řada konvergovala; takto vysloveným pravidlům říkáme **kriteria konvergence.** *Obyčejně je dostáváme porovnáním dané řady s řadou, jejíž chování je již známé.*

Mimo postačující podmínky pro konvergenci si odvozujeme také *nutné podmínky*, t. j. takové, které jsou *nutně* splněny, konverguje-li posloupnost či řada, ale nestačí k zjištění konvergence. Jejich význam je negativní: nejsou-li splněny, řada diverguje.

---

*) N je vlastně limitou posloupnosti (9).

Podmínka, která je zároveň nutná i postačující, je *charakteristická vlastnost konvergence*. Tyto podmínky se většinou pro svou složitost nehodí pro praktické použití.

Odpověď na druhou otázku bývá často obtížnější než na prvou. Často se snažíme odvodit danou řadu z řad, jejichž součty již známe a tak určiti její součet.

Při obou úkolech (přirovnávání řad, odvozování jedné z druhé) potřebujeme znáti pravidla pro počítání řadami (posloupnostmi). Některých z nich jsme již vlastně užívali; nyní si základní pravidla vyslovíme.

(V. I,4.) *Konvergují-li posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ k limitám a resp. b, konverguje též posloupnost $\{a_n \pm b_n\}$ k limitě $a \pm b$. Vzorcem:*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Pravidlo lze snadno nahlédnouti geometricky (na ose číselné) i pomocí nerovností.

(V. I,5.) *Konverguje-li posloupnost $\{a_n\}$ k limitě a, a je-li K libovolný koeficient, pak posloupnost $\{Ka_n\}$ konverguje k limitě Ka. Vzorcem:*

$$\lim_{n\to\infty} Ka_n = K \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Obě pravidla se ihned zřejmě přenášejí na řady:

(V. I,6.) *Konvergují-li řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ k součtům a, b, konverguje též řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ k součtu $a \pm b$. Vzorcem:*

$$\Sigma(a_n \pm b_n) = \Sigma a_n \pm \Sigma b_n.\text{*)}$$

(V. I,7). *Konverguje-li řada Σa_n k součtu a, a je-li K libovolná konstanta, konverguje řada ΣKa_n k součtu Ka. Vzorcem:*

$$\Sigma Ka_n = K\Sigma a_n.$$

---

*) Sčítací index pro jednoduchost vynechávám.

Pravidla **(V. 1,6)** **(V. 1,7)** vyslovují něco, co je pro součet konečného počtu členů samozřejmé; pro součet nekonečné řady musí však být toto pravidlo zvlášť dokázáno, neboť tu nejde o žádný skutečný součet.

Při počítání řadami a posloupnostmi se velmi často používá věty

(V. 1,8.) *Jsou-li* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dvě konvergentní posloupnosti a platí-li pro jejich členy*

$$a_n \leqq b_n$$

od určitého indexu n *počínaje, pak platí pro jejich limity vztah:*

$$a \leqq b.$$

Důsledek:

Je-li $\{a_n\}$ *konvergentní posloupnost,* K *reálné číslo takové, že platí:*

$$a_n \leqq K$$

od určitého indexu n *počínaje, pak platí pro limitu posloupnosti vztah:*

$$a \leqq K.$$

K důkazu stačí vyvrátit nerovnost $a > b$. Dejme tomu, že tato nerovnost platí: pak v okolí $O_{\frac{a-b}{2}}$ bodu a leží všechny členy a_n od jistého indexu n_1 počínaje. Podobně všechny členy b_n od indexu n_2 počínaje leží v okolí $O'_{\frac{a-b}{2}}$ bodu b. Je-li n_3 větší z čísel n_1, n_2, pak pro všechny indexy $n > n_3$ platí $a_n > b_n$ proti předpokladu. — Znázorněte si okolí $O_{\frac{a-b}{2}}$, $O'_{\frac{a-b}{2}}$ geometricky! — Důsledek věty dostaneme, nahradíme-li posloupnost $\{b_n\}$ aritmetickou posloupností $\{K\}$ o nulové diferenci.

Cvičení. (Použití vět 1,4 až 1,7.)

1,21. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+2}{3}}$. [Návod: obecný člen rozložte:

$$\frac{1}{\binom{n+2}{3}} = \frac{6}{n(n+1)(n+2)} = \frac{6}{n+2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{6}{n(n+2)} - \frac{6}{(n+1)(n+2)};$$

Na pravé straně dostáváme členy řad již vyšetřovaných; a to v úloze 1,19 a v příkladě 1,11.]

1,22. Jest určiti součet řady utvořené z členů řady $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$, které stojí na lichých místech, t. j.

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{35} + \tfrac{1}{63} + \tfrac{1}{99} + \ldots$$

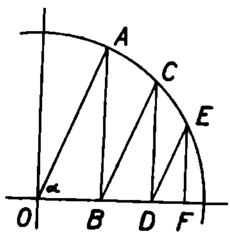
[Návod: Řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ je totožná s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. Určete součet členů, stojících na *sudých* místech, t. j. součet řady $\frac{1}{4} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$. Vyjde $\frac{1}{2}$.]

1,23. Do jednotkové kružnice je vepsána lomená čára, jak je naznačeno na obr. 8. Určete její délku. [Návod: Rozložte čáru v řady rovnoběžných úseků

$$\overline{OA} + \overline{BC} + \overline{DE} + \ldots$$

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \ldots$$

Vyjde $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Je podstatné, že křivka je kružnice?]



Obr. 8.

1,24. Najděte zákon vytvoření řady

$$\tfrac{3}{4} + \tfrac{7}{16} + \tfrac{15}{64} + \tfrac{31}{256} + \ldots$$

a určete její součet. [Návod: Řadu rozložte na dvě řady geometrické.] [Vyjde $s = \frac{5}{3}$.]

Na konci oddílu uvedu ještě jednu vlastnost konvergentních posloupností a řad, důležitou pro počítání s nimi:

(V. 1,9.) *Vynecháme-li nebo přidáme-li ke konvergentní posloupnosti libovolný konečný počet členů nebo změníme-li* *jakkoli libovolný konečný počet jejích členů, zůstane posloupnost konvergentní a její limita se nezmění.*

Jinými slovy: Chování posloupnosti nezáleží na jakémkoli počtu jejích počátečních členů, nýbrž jen na nekonečném „zbytku". Věta je zřejmá, uvědomíme-li si definice konvergence, třeba geometricky.

Pro nekonečné řady platí:

(V. 1,10.) *Vynecháme-li nebo přidáme-li ke konvergentní řadě libovolný konečný počet členů nebo změníme-li jakkoli libovolný konečný počet jejích členů, zůstane řada konvergentní, ale její součet se obecně změní.*

Větu snadno nahlédneme, uvědomíme-li si, že provedením změn se změní všecky částečné součty od neurčitého počínaje o jistou aditivní konstantu (číslo, které se přičítá nebo odečítá).

Cvičení 1,25. Jak se změní částečné součty a součet geometrické řady:

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} + - \ldots$$

jestliže: a) vynecháme první 3 členy;
b) znásobíme 2., 3. a 5. člen třemi;
c) změníme u prvých 6 členů znaménka.

1,8. Nejjednodušší kriterium konvergence. Členy posloupnosti, znázorněny graficky na číselné ose, dají obyčejně nekonečné množství bodů (ne vždy — vzpomeňte na aritmetickou posloupnost o diferenci 0). Existuje-li takový interval, že všechny tyto body v něm leží, pravíme, že *posloupnost je omezená.*

Cvičení 1,26. Zjistěte, které z posloupností v příkladech 1,1—1,7 a cvičeních 1,1—1,6 jsou omezené a které jsou neomezené.

Pomocí tohoto názvu vyslovíme nejjednodušší nutnou podmínku pro konvergenci posloupnosti:

(V. 1,11.) *Konvergentní posloupnost je omezená.*

Věta je takřka zřejmá. Je-li $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, leží všechny členy

a_n v okolí O_1 bodu a s výjimkou jistých členů $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_r}$. Nechť nejvzdálenější z těchto členů od bodu a má vzdálenost d. Pak všechny členy posloupnosti leží v intervalu $\langle a - d, a + d \rangle$.

Že podmínka **(V I,11)** není postačující, ukazuje jednoduchý protipříklad, totiž posloupnost ze cvičení 1,5. Připojíme-li však k omezenosti posloupnosti ještě jeden předpoklad, dostaneme podmínku postačující.

V minulých výkladech jsme se často setkali s posloupnostmi, jejichž členy buď stále vzrůstaly nebo klesaly, na př.:

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{5}{6}, \ldots \text{ nebo } 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots$$

Definujeme: posloupnost se nazývá **neklesající** platí-li pro všechny indexy n vztah:

$$a_n \leqq a_{n+1};$$

podobně: posloupnost se nazývá **nerostoucí**, platí-li pro všechny indexy n vztah:

$$a_n \geqq a_{n+1}.$$

Souhrnný název pro posloupnosti neklesající a nerostoucí je: **posloupnosti monotonní.**

Platí věta:

(V. I,12.) *Posloupnost omezená a monotonní je konvergentní; a to je-li posloupnost neklesající, platí*

$$a_n \leqq \lim_{n \to \infty} a_n \quad p.\ v.\ n,^{*})$$

je-li nerostoucí:

$$a_n \geqq \lim a_n \quad p.\ v.\ n.$$

Důkaz tohoto kriteria konvergence přesahuje rámec příručky; jeho obsah bude čtenáři přijatelnější, nahlédneme-li si geometricky, co znamenají předpoklady.

Cvičení I,27. Vyhledejte z posloupností cvičení 1,25 posloupnosti omezené a monotonní a svěřte si pro ně větu 1,11.

---

*) Zkratka znamená: pro všecky indexy n.

Pro nekonečné řady vyslovíme dvě věty analogické větám 1,11 a 1,12. Místo věty 1,11 platí věta silnější:

(V. 1,13.) *Posloupnost členů konvergentní řady konverguje k nule.*

Důkaz: Budiž $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Platí

$$a_1 = s_1 - 0;\quad a_2 = s_2 - s_1;\quad a_3 = s_3 - s_2;\quad a_4 = s_4 - s_3;\quad \ldots$$

Posloupnosti $s_1, s_2, s_3, \ldots$; $0, s_1, s_2, \ldots$ konvergují podle věty 1,9 k téže limitě a a podle věty 1,4 je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = 0.$$

Věta 1,13 vyjadřuje podmínku nutnou, která není postačující pro konvergenci řady. Ukazuje to t. zv. *harmonická řada*

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots,$$

která je divergentní, ačkoli posloupnost jejích členů konverguje k nule. O této řadě bude podrobněji pojednáno v odst. 1,9.

Z kriteria 1,12 dostaneme kriterium konvergence pro nekonečné řady, zvolíme-li členy tak, aby posloupnost částečných součtů byla monotonní. To nastane na př., jsou-li všechny členy řady čísla kladná (nebo nuly), t. j.

$$a_n \geqq 0 \quad \text{p. v. n.}$$

Taková řada se nazývá „*řada s positivními členy*". Pak platí věta

(V. 1,14.) *Řada s positivními členy, jejíž posloupnost částečných součtů je omezená, je konvergentní a platí*

$$s_n \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad p.\ v.\ n.$$

Toto kriterium, které je přímý důsledek věty 1,12, je velmi významné, poněvadž řady s positivními členy tvoří — jak později uvidíme — důležitou skupinu řad.

Cvičení 1,28. Ověřte si kriterium 1,14 pro konvergentní geom. řady s kladným kvocientem a kladným prvním členem podle vzorců.

1,29. Dokažte konvergenci řady:

$$\frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \frac{\alpha_4}{10^4} + \ldots, \qquad (*)$$

kde α_n je některé z čísel 0, 1, 2, ..., 9. Návod: součet s_n nepřevyšuje hodnotu $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n}$, tedy všechna s_n jsou omezena (kterým číslem?).

Vzpomeňte na definici reálných čísel v úvodu. Uvážíme-li výsledek cvičení 1,29, uvidíme, že jsme definovali reálná čísla tím, že jsme jisté řady — druhu (*) — *prohlásili* za konvergentní.

1,30. Obrazec omezený uzavřenou křivkou skládáme metodou vyčerpávací. Co plyne podle věty 1,14 pro řadu obsahů, kterou dostaneme? Vzpomeňte na tento postup při parabole v odst. 1,3. — Užijte podobně kriteria 1,12 na posloupnost z příkladu 1,7.

Na konec odstavce zařazuji ještě jeden zajímavý příklad posloupnosti, konvergující k iracionální limitě.

Příklad 1,15. Úsečku délky 1 rozdělíme zlatým řezem; větší díl označíme a_1. Tuto úsečku rozdělíme opět zlatým řezem, větší díl označíme a_2 a tak pokračujeme dále. Dostaneme geometrickou posloupnost

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, \text{ v níž } a_n = q^n, \text{ kde } q = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Tato posloupnost konverguje k nule. Její členy lze vyjádřit také jinak. Podle vlastností zlatého řezu totiž platí:

$$a_2 = 1 - a_1,\ a_3 = a_1 - a_2 = 2a_1 - 1,$$
$$a_4 = a_2 - a_3 = 2 - 3a_1, \text{ atd.}$$

Obecný člen posloupnosti lze tedy psáti ve tvaru:

$$a_n = |p_n a_1 - q_n|, \quad n > 2,$$

kde p_n, q_n jsou 2 sousední členy posloupnosti

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

(Každý člen je součtem obou bezprostředně předcházejících.)

Dělíme-li rovnici pro a_n číslem p_n, vyjde:

$$\frac{a_n}{p_n} = \left|a_1 - \frac{q_n}{p_n}\right|$$

a přejdeme-li k limitě pro $n \to \infty$, dostaneme $\left|a_1 - \frac{q_n}{p_n}\right| \to 0$, t. j. $\frac{q_n}{p_n} \to a_1$.

Posloupnost $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \ldots$

konverguje k číslu $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Tato posloupnost je složená ze dvou posloupností: z klesající posloupnosti

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{13}{21}, \ldots$$

a z posloupnosti rostoucí

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, \frac{21}{34}, \ldots$$

1,9. Harmonická řada. V početní praxi se často vyskytují řady t. zv. *harmonické*; jsou to řady tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots, \tag{10}$$

kde α je libovolné reálné číslo ($\neq 0$). Lze dokázati — což učiníme později, že řada (10) konverguje, je-li $\alpha > 1$, diverguje, je-li $\alpha \leq 1$.

Názvem „harmonická řada" obyčejně rozumíme řadu pro $\alpha = 1$, t. j.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots .$$

Tato řada je divergentní (určitě divergentní).

Důkaz: platí:

$$s_{2^\nu} = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{\nu-1}+1} + \frac{1}{2^{\nu-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^\nu}\right).$$

Každý člen v 1. závorce je $\geqq \frac{1}{4}$, v druhé $\geqq \frac{1}{8}$, atd. až v poslední $\geqq \frac{1}{2^\nu}$. Je tedy součet v první závorce větší než $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, v druhé $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$, atd. až v poslední $\frac{2^\nu - 2^{\nu-1}}{2^\nu} =$ $= \frac{1}{2}$, t. j.

$$s_{2^\nu} \geqq 1 + \underbrace{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2}}_{\nu\text{-krát}} = 1 + \frac{\nu}{2}. \qquad (11)$$

Zvolíme-li si libovolné (libovolně velké) číslo K, pak lze zvolit ν tak, aby $1 + \frac{\nu}{2} > K$; je-li index $n > 2^\nu$, je pak podle (11)

$$s_n < s_{2^\nu} \geqq 1 + \frac{\nu}{2} > K, \quad p.\ v.\ n > 2^\nu.$$

To znamená podle definice divergence (odst. 1,6), že posloupnost (s_n) určitě diverguje k $+ \infty$.

Utvořme si řadu z členů harmonické řady, které stojí na *sudých* místech:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \ldots \qquad (12)$$

Také tato řada je divergentní. Neboť *kdyby* konvergovala, konvergovala by též řada, vznikající násobením dvěma, t. j. řada harmonická.

Také řada zbývajících členů:

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \ldots \qquad (13)$$

diverguje. Neboť platí:

$$1 > \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3} > \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5} > \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{7} > \tfrac{1}{8}, \ldots$$

t. j. částečné součty řady (13) jsou *větší* než částečné součty divergentní řady (12) a (13) tedy diverguje.

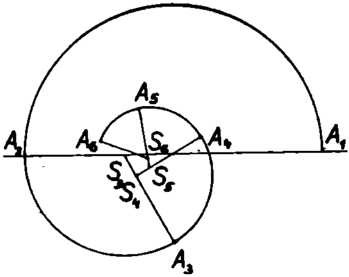
Řada, jejíž členy jsou jakkoli vybrány ze členů původní řady, ale tak, že pořadí zůstane zachováno (na př. řady

(12), (13)), se nazývá *částečná řada.* — Stejného názvu se užívá i pro posloupnosti.

Tak na př. řada převrácených hodnot prvočísel, t. j.

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \cdots,$$

je částečná řada řady harmonické. Také tato řada je — jak lze dokázati — divergentní. Mimo divergentní částečné řady obsahuje harmonická řada ovšem i konvergentní částečné řady, na př. geometrickou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.



Obr. 9.

Použijeme harmonické řady k sestrojení dvou spirál, z nichž jedna má konečnou, druhá nekonečnou délku. Obě spirály se skládají z kruhových oblouků, které v bodech styku $A_2, A_3, A_4, \ldots$ mají společné tečny. (Obr. 9.)

Středy oblouků jsou body $S_2, S_3, S_4, \ldots$ Části oblouků, kterých užíváme, se stále zmenšují a jsou dány středovými úhly:

$$\sphericalangle\, A_1S_2A_2 = 180^\circ = \frac{360^\circ}{2}$$

$$\sphericalangle\, A_2S_3A_3 = 120^\circ = \frac{360^\circ}{3}$$

$$\sphericalangle\, A_3S_4A_4 = 90^\circ = \frac{360^\circ}{4}$$

....

$$\sphericalangle\, A_{n-1}S_nA_n = \frac{360^\circ}{n}.$$

Poloměry se také zmenšují, a to při *první spirále* je:

$$\overline{A_1S_2} = \overline{A_2S_2} = \tfrac{1}{2}$$
$$\overline{A_2S_3} = \overline{A_3S_3} = \tfrac{1}{3}$$
$$\overline{A_3S_4} = \overline{A_4S_4} = \tfrac{1}{4}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\overline{A_{n-1}S_n} = \overline{A_nS_n} = \frac{1}{n}.$$

Délka spirály je pak:

$$\frac{2\pi \cdot \frac{1}{2}}{2} + \frac{2\pi \cdot \frac{1}{3}}{3} + \frac{2\pi \cdot \frac{1}{4}}{4} + \dots = 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Tato řada podle toho, co bylo řečeno na počátku odstavce je konvergentní.

Druhou spirálu dostaneme, položíme-li:

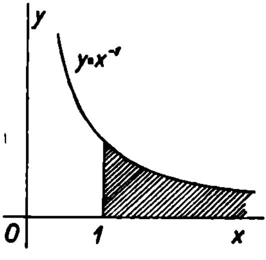
$$\overline{A_1S_2} = \overline{A_2S_2} = \frac{1}{\log 2}$$
$$\overline{A_2S_3} = \overline{A_3S_3} = \frac{1}{\log 3}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\overline{A_{n-1}S_n} = \overline{A_nS_n} = \frac{1}{\log n}.$$

Délka spirály je pak:

$$\frac{2\pi \dfrac{1}{\log 2}}{2} + \frac{2\pi \dfrac{1}{\log 3}}{2} + \frac{2\pi \dfrac{1}{\log 4}}{4} + \dots = 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}.$$

O řadě $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ lze ukázat, že diverguje.

Cvičení 1,31. (Obr. 10.) Dokažte, že vyčárkovaná část roviny, omezená obloukem rovnoosé hyperboly, má neomezeně velký obsah. [Návod: vepište stupňovitý obrazec podobně jako při kvadratuře paraboly v oddíle N a dokažte, že jeho obsah je neomezeně velký.]



Obr. 10.

1,32. Dokažte, že částečná řada harmonické řady

$$1 + \frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{1+2\lambda} + \frac{1}{1+3\lambda} + \ldots$$

(λ celé kladné číslo)

diverguje. Proveďte na př. pro $\lambda = 4$. [Návod: dokažte nejprve divergenci řady

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{12} + \ldots;$$

porovnejte s ní řadu

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \ldots.$$

s ní opět řadu

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10} + \ldots$$

a s touto řadou porovnejte danou řadu.]

1,10. O jednoduchém chování řad s positivními členy. V odst. 1,8 jsem uvedl jednoduché kriterium konvergence pro řady s positivními členy (věta 1,14). Podle tohoto kriteria řada s positivními členy buď konverguje nebo, nejsou-li částečné součty omezeny, diverguje k $+\infty$ (viz příklad harmonické řady).

Také o částečných řadách *konvergentních* řad s positivními členy platí jednoduchá věta.

(V. 1,15.) *Částečná řada konvergentní řady s positivními členy je též konvergentní a její součet nepřevyšuje součet původní řady.*

Je totiž patrné, že ke každému částečnému součtu σ_ν částečné řady lze najít vhodný částečný součet s_n původní řady tak, že

$$s_n \geqq \sigma_\nu.$$

Je tedy posloupnost $\{\sigma_\nu\}$ také omezena a částečná řada konverguje podle kriteria 1,14. Nerovnost mezi součty obou řad vyplývá z věty 1,8.

Vybereme-li tedy na př. ze známé konvergentní řady (příklad 1,11)

$$\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \frac{1}{4\,.\,5} + \ldots = 1$$

částečnou řadu

$$\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{3\,.\,4} + \frac{1}{5\,.\,6} + \ldots, \tag{14}$$

je tato řada konvergentní a má součet s, $0 < s < 1$. (Později dokážeme, že s je přirozený logaritmus 2.)

Řadu (14) můžeme napsat také ve tvaru:

$$(1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}) + \ldots \tag{15}$$

Vynecháme-li závorky, dostaneme řadu:

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots \tag{16}$$

Označme s_ν částečné součty řady (15) [na př. $s_2 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})$], s'_n součty řady (16) [na př. $s'_2 = 1 - \frac{1}{2}$]. Pak platí:

$$s'_{2\nu} = s_\nu$$

$$s'_{2\nu-1} = s_\nu + \frac{1}{2\nu}.$$

Z těchto dvou rovnic je patrné, že součty s'_n konvergují k téže limitě jako součty s_ν, totiž k log2.

Řada (16), jež je jednou z nejdůležitějších řad vůbec, nám také ukazuje, že věta 1,15 neplatí pro řady s *libovolnými* členy. Neboť částečná řada řady (16), totiž

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \ldots$$

je — jak víme — divergentní.

Jednoduchost řad s positivními členy se však týká ještě jiných vlastností. Součet nekonečné řady je formálním rozšířením algebraického počtu na „nekonečný počet sčítanců“. Pro obyčejný součet platí známé dva zákony:

a) zákon *asociativní*, vyjádřený rovnicí:

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

b) zákon *komutativní*, vyjádřený rovnicí:

$$a + b = b + a.$$

Je nyní otázka, do jaké míry platí formálně tyto zákony pro nekonečné řady.

Pro řady s positivními členy platí oba zákony neomezeně. Členy takové řady můžeme libovolně seskupovati nebo závorky vynechávati, nebo členy řady přerovnávati*): tím se konvergence ani limita řady nemění. Tak na př. z geometrické řady

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \dots$$

můžeme utvořit přerovnáním řadu:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{1024} + \tfrac{1}{512} + \tfrac{1}{256} + \\ + \tfrac{1}{128} + \dots$$

(jaký je výtvarný zákon?) a seskupením členů po dvou:

$$\tfrac{5}{8} + \tfrac{17}{64} + \tfrac{3}{32} + \tfrac{3}{1024} + \dots$$

Tato poslední řada je konvergentní a má součet 1.

U řad s libovolnými členy jsou poměry složitější. *Zákon asociativní* platí potud, že smíme umisťovat závorky. Vypouštět závorky však můžeme jen tehdy, vznikne-li opět řada konvergentní (viz na př. řady (15) a (16)). Neoprávněným vypouštěním závorek se dospívá k absurdnostem. (Srovnejte s „paradoxem“ v historickém přehledu.)

Zákon komutativní pro řady s libovolnými členy obecně neplatí. Ukážeme si to na *příkladě* 1,16. Řadu (16)

---

*) Přerovnáváním řad se budeme podrobněji zabývati v odst. 1,12.

$$s = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots$$

přerovnáme po prvé tak, že nová řada bude konvergovati k součtu $\frac{s}{2}$, podruhé tak, že přerovnaná řada bude divergovati.

a) Utvořme si řadu:

$$1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{5} - \ldots \tag{17}$$

(vždy jeden člen kladný a dva záporné): je to řada přerovnaná z (16). Znásobme řadu (16) koeficientem $\frac{1}{2}$ a vložme vhodně nuly; dostaneme řadu

$$0 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + 0 + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \ldots \tag{18}$$

Tato řada konverguje podle vět 1,6, 1,7 k součtu $\frac{s}{2}$.

Sečteme-li řady (17), (18), dostaneme řadu (16). T. j. řada (17) konverguje a její součet je $\frac{s}{2}$.

b) Členy divergentní řady

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \ldots$$

seskupme ve skupiny:

$$(a_1 + \ldots + a_{a_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \\ + (a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3}) + \ldots$$

tak, aby součet v každé závorce byl > 2. Řadu (16) přerovnejme takto:

$$1 - a_1 - \ldots - a_{n_1} + \tfrac{1}{3} - a_{n_1+1} - \ldots - a_{n_2} + \\ + \tfrac{1}{5} - a_{n_2+1} - \ldots - a_{n_3} + \ldots$$

Tato řada patrně diverguje k $-\infty$.

Cvičení 1,33. Označíme s součet konvergentní

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

(její konvergence je dokázána dále v cvičení 1,34 b). Dokažte, že platí:

a) $\frac{s}{4} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$

b) $\frac{3s}{4} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

c) $\frac{s}{2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$

d) $\frac{2s}{3} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \dots$

1,34. Vyjádřiti číslo v dvojkové soustavě znamená, vyjádřiti je jako součet řady

$$N = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \dots, \quad \text{kde } \alpha_n = 0;\ 1. \qquad (19)$$

Číslice $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ jsou pak „decimály" a píšeme symbolicky

$$N = \alpha_0, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \dots$$

Ověřte si na základě věty 1,15 konvergenci řady (19) a dokažte, že platí:

$$(1,\overline{3})_{10} = (1,\overline{01})_2; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = (0,1011010100\dots)_2.$$

1,11. Cauchy-ova kriteria konvergence pro řady s positivními členy.

Vzhledem k důležitosti řad s positivními členy uvedu ještě některá další kriteria. Již v odst. 1,7. bylo řečeno, že kriteria dostáváme často přirovnáním dvou řad. Takové jednoduché přirovnání vyslovuje věta

(V. 1,16.) *Buďte Σa_n, Σc_n dvě řady s positivními členy, Σc_n budiž konvergentní a nechť platí nerovnost*

$$a_n \leqq c_n \quad p.\ v.\ n;$$

pak je též řada Σa_n konvergentní a pro součty obou řad platí:

$$a \leqq c.$$

Pro částečné součty obou řad totiž platí podle předpokladu:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leqq c_1 + c_2 + \dots + c_n,$$

t. j. částečné součty řady Σa_n jsou omezené a řada tedy podle věty 1,14 konverguje. Nerovnost pro součty plyne z věty 1,8.

Doplňkem této věty je věta

(V. 1,16a.) *Buďte Σa_n, Σd_n dvě řady s positivními členy. Σd_n budiž divergentní a nechť platí nerovnost*

$$a_n \geqq d_n \quad p. v. n;$$

pak je též řada Σa_n divergentní.

Věta se dokáže pomocí věty 1,16 nepřímo: kdyby Σa_n konvergovala, platilo by totéž o řadě Σd_n, což je proti předpokladu.

Poznámka: V kriteriu 1,16 (i v následujících kriteriích) stačí pro konvergenci, aby vztah $a_n \leqq c_n$ byl splněn jen od určitého indexu počínaje (uvědomte si větu 1,10); ovšem vztah mezi součty obou řad se pak *nezachovává.*

Protože členy řady Σc_n jsou stále větší než členy řady Σa_n, nazývá se řada Σc_n někdy **majorantou** řady Σa_n.

Cvičení 1,35. Dokažte konvergenci řad nalezením konvergentní majoranty a najděte meze pro součet!

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 16} + \ldots;$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots; \qquad \left(\text{její součet je } \frac{\pi^2}{6}\right)$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{9} + \tfrac{3}{32} + \ldots;$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots, \qquad \alpha > 2.$$

Konvergence harmonických řad pro α mezi 1 a 2 ($1 < \alpha < 2$) se dokáže podobným seskupováním členů, jako se dokazovala divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots$

Majoranty jsou: a) $\sum \frac{1}{2^n}$; b) $\sum \frac{1}{n^2-1}$; c) $\sum \frac{2}{n^2}$; d) e) $\sum \frac{1}{n^2}$.

1,36. Podle kriteria 16a dokažte divergenci řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots\,;\qquad \alpha < 1;$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n\lambda} = 1 + \frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{1+2\lambda} + \dots\,;\qquad \lambda$ celé kladné;

(srovnej se cvičením 1,32)

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} + \dots\,.$

Druhé základní srovnávací kriterium je:

(V. 1,17.) *Buďte Σa_n, Σc_n dvě řady s positivními členy. Σc_n budiž konvergentní a nechť platí nerovnost*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{c_{n+1}}{c_n} \qquad p.\ v.\ n.$$

Pak je též řada Σa_n konvergentní.

Důkaz: Znásobíme nerovnosti (s členy vesměs kladnými):

$$\frac{a_2}{a_1} \leqq \frac{c_2}{c_1},\ \frac{a_3}{a_2} \leqq \frac{c_3}{c_2},\ \dots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqq \frac{c_n}{c_{n-1}}.$$

Vyjde:

$$\frac{a_n}{a_1} \leqq \frac{c_n}{c_1}.$$

Je tedy

$$a_n \leqq \frac{a_1}{c_1}\, c_n.$$

Poněvadž Σc_n podle předpokladu konverguje, konverguje též $\frac{a_1}{c_1}\, \Sigma c_n$ a podle kriteria 1,16 i Σa_n.

Doplňkem k této větě je podobná věta o divergentních řadách, jako byla věta 1,16a. — Z kriterií 1,16, 1,17 dostaneme specielní kriteria, nahradíme-li konvergentní řadu Σc_n jednoduchou konkrétní řadou: tak na př. můžeme užít řad harmonických nebo geometrických. Uvedu zde dvě formy kriteria, které dostaneme z věty 1,17, nahradíme-li řadu Σc_n řadou geometrickou.

(V. 1,18.) *Budiž Σa_n řada s positivními členy, $q < 1$ takové číslo, že platí od určitého indexu n počínaje:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq q.$$

Pak řada Σa_n konverguje.

Toto kriterium (t. zv. *podílové kriterium Cauchyho*) je bezprostřední důsledek věty 1,17. Jiná jeho užívanější forma zní:

(V. 1,18a.) *Budiž Σa_n řada s positivními členy. Je-li posloupnost $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ konvergentní a platí-li:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

pak řada Σa_n konverguje.

Je-li totiž $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \vartheta < 1$, pak v okolí $O_{\frac{1-\vartheta}{2}}$ bodu ϑ leží všechny členy posloupnosti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ od určitého indexu n počínaje, t. j. všechny tyto členy splňují nerovnost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1+\vartheta}{2} = q < 1$$

a řada Σa_n podle věty 1,18 konverguje. — Znázorněte si geometricky!

Cvičení 1,37. Podle kriteria 18a dokažte konvergenci řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots$

Součet této řady je transcendentní číslo e, které je základem Napierových (přirozených) logaritmů; $e = 2{,}7182818\ldots$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \ldots$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \ldots$

1,38. Z členů posloupnosti

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

(každý člen je součet dvou předcházejících) utvoříme řadu převrácených hodnot:

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{8} + \ldots$$

Dokažte, že tato řada konverguje. [Návod: vyjádřete:

$$a_n = \frac{1}{\alpha_n};\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1};$$

použijte kriteria 18a a výsledku z příkladu 1,15.]

1,12. O přerovnávání řad s positivními členy. Některé příklady přerovnávání řad s positivními členy poznal čtenář v odst. 1,11. Výrokem „přerovnati řadu" rozumělo se tam: sestaviti ze všech členů původní řady novou řadu. Je-li původní řada s positivními členy, pak přerovnaná řada konverguje k témuž součtu jako původní řada, čili stručně: *součet řady s positivními členy se přerovnáváním nemění.*

Tento výsledek zůstává v platnosti i tehdy, rozumíme-li pod přerovnáváním výkon mnohem obecnější než dosud.

(V. 1,19.) *Z konvergentní řady s positivními členy vybereme nekonečně mnoho částečných řad tak, abychom vyčerpali všechny její členy. Tyto částečné řady ovšem podle věty 1,15 konvergují. Platí pak, že řada jejich součtů konverguje k součtu řady původní.*

Příklad 1,17. V geometrické řadě konvergentní:

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

dosaďme $q = \frac{1}{2} + \alpha$ a rozveďme mocniny dvojčlenu $(\frac{1}{2} + \alpha)^n$ podle binomické věty. Dostaneme tak konvergentní řadu:

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha} = 1 + \tfrac{1}{2} + \alpha + \tfrac{1}{4} + \alpha + \alpha^2 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{4}\alpha + \tfrac{3}{2}\alpha^2 + \\ + \alpha^3 + \ldots,$$

kterou lze „uspořádati podle mocnin čísla α“:

$$\frac{2}{1 - 2\alpha} = (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots) + \alpha(1 + \tfrac{2}{2} + \\ + \tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{8} + \ldots) + \alpha^2(1 + \tfrac{3}{2} + \tfrac{6}{4} + \ldots) + \ldots$$

Výrazy v závorkách jsou konvergentní řady: na př. při α^0 dostáváme:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots = 2;$$

při α^1:

$$1 + \tfrac{2}{2} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{8} + \ldots = 1 + \tfrac{1}{2}\binom{2}{1} + \tfrac{1}{4}\binom{3}{1} + \tfrac{1}{8}\binom{4}{1} + \ldots = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \; (= 4) \text{ (srovnej s cvičením 1,37c).}$$

Zvláště důležitá je tato věta o přerovnávání řad:

(V. 1,20.) *Budiž dána soustava nekonečně mnoha konvergentních řad s positivními členy*

$$\begin{aligned} A_1 &= a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots \\ A_2 &= a_{21} + a_{22} + a_{23} + \ldots \\ A_3 &= a_{31} + a_{32} + a_{33} + \ldots \text{ *)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

taková, že řada jejich součtů také konverguje:

$$s = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$$

*) Dvojité indexování značí pořadí řady a členu.

Pak libovolná řada, utvořená ze všech členů a_{ik} soustavy konverguje také k součtu s. Zvláště pak, vzhledem k předchozí větě: Sečteme-li členy soustavy „po sloupcích", dostaneme opět konvergentní řady

$$\begin{aligned} B_1 &= a_{11} + a_{21} + a_{31} + \dots \\ B_2 &= a_{12} + a_{11} + a_{32} + \dots \\ B_3 &= a_{13} + a_{23} + a_{33} + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

řada jejich součtů konverguje také k hodnotě s

$$B_1 + B_2 + B_3 + \dots = A_1 + A_2 + A_3 + \dots = s.$$

Obě přerovnávací věty mají velmi názorný obsah; uvádím je bez důkazů, které vyžadují trochu více sběhlosti v práci s řadami.

Příklad 1,18. na 2. přerovnávací větu:
Soustava geometrických řad

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \\ &\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots \\ &\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

má tu vlastnost, že řada jejich součtů, t. j.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

konverguje k součtu 1 (viz př. 1,11). Podle věty 1,20 konvergují také řady v sloupcích; jsou to harmonické řady, jejichž konvergence byla již dříve ukázána (cvičení 1,35 d).

1,13. O čísle e. Toto důležité transcendentní číslo, základ přirozených logaritmů, bývá obyčejně definováno jako limita konvergentní posloupnosti takto:

Výraz

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

značí, vyjádřeno mluvou užité matematiky, částku, na kterou vzroste peněžní jednotka při úrokové míře 100% za jeden rok, připisují-li se úroky n-krát za rok.

Posloupnost $\{\alpha_n\}$ je rostoucí, jak snadno poznáme, rozvedeme-li α_n, α_{n+1} podle binomické věty:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \\ + \frac{n(n-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \\ + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$$\alpha_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + \frac{n+1}{1!} \cdot \frac{1}{n+1} +$$

$$+ \frac{(n+1)\,.\,n}{2!} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + \dots +$$

$$+ \frac{(n+1)\,.\,n\,.\,.\,.\,.\,.\,1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots$$

$$\cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Rozvoj α_{n+1} má o jeden člen více a každý jeho člen je větší nebo roven příslušnému členu rozvoje α_n. Dále platí:

$$\alpha_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Na pravé straně nerovniny je částečný součet řady, která byla poznána jako konvergentní (viz cvičení 1,37a). Jest tedy posloupnost $\{\alpha_n\}$ rostoucí a omezená, t. j. podle věty 1,12 konvergentní. Její limitu označil *Euler* písmenem e.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818\ldots$$

Číslo e značí s ohledem na to, co bylo řečeno o číslech α_n, částku, na kterou vzroste peněžní jednotka za rok při 100% *spojitém* úrokování. (T. j. úrokování v nekonečně malých intervalech.)

Ukáži nyní, jak použitím přerovnávací věty lze dokázati, že řada ze cvičení 1,37a

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$$

má součet e.

V rozvoji (20) pro α_n si označíme:

$$a_{n2} = \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right);\ a_{n3} = \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right);\ \ldots,$$

$$\ldots, a_{nn} = \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right);$$

platí tedy:

$$\alpha_n = 2 + a_{n2} + a_{n3} + \ldots + a_{nn}.$$

Utvoříme schema:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 2\\
\alpha_2 - \alpha_1 &= a_{22}\\
\alpha_3 - \alpha_2 &= (a_{32} - a_{22}) + a_{33}\\
\alpha_4 - \alpha_3 &= (a_{42} - a_{32}) + (a_{43} - a_{33}) + a_{44}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

V řádkách schematu jsou řady s positivními členy (můžeme je doplnit nulami na nekonečné), které konvergují k součtům α_1, $\alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_3 - \alpha_2$, ... Řada těchto součtů zřejmě konverguje k číslu e. Sečteme-li podle přerovnávací věty 1,20 schema „po sloupcích“, pak řada těchto součtů konverguje také k číslu e. Součet na př. druhého sloupce je:

$$a_{22} + (a_{32} - a_{22}) + (a_{42} - a_{32}) + \ldots,$$

t. j. limita

$$\lim_{n\to\infty} a_{n2} = \frac{1}{2!}.$$

Podobně součet k-tého sloupce je $\frac{1}{k!}$. Platí tedy:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots,$$

jak jsme chtěli dokázati.

Tento vztah nelze dokázati, jak se někdy chybně činí, tím, že se hledá limita obou stran rovnice (20) pro $n \to \infty$. Neboť na pravé straně se tam vyskytují součiny o neomezeně vzrůstajícím počtu činitelů.

1,14. O řadě součinové. Doposud jsme se zabývali rozšířením zákona asociativního a komutativního na nekonečné řady s positivními členy. Mimo tyto dva zákony platí pro slučování čísel ve spojení s násobením další zákon, t. zv. *distributivní*, vyjádřený pravidlem o násobení mnohočlenu mnohočlenem, na př.

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Také tento zákon lze rozšířiti na řady s positivními členy.

Buďte dány dvě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; utvořte z nich novou řadu tak, že je formálně „znásobíme“ jako dva mnohočleny, t. j. „každý člen každým členem“. Součiny uspořádáme v řadu takto:

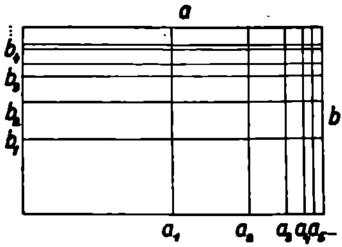
$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots$$

(součiny jsou uspořádány podle stoupajícího součtu indexů.) Takto utvořená řada se nazývá Cauchyova *součinová řada* obou původních.

Platí věta:

(V. 1,21.) *Součinová řada dvou konvergentních řad s positivními členy konverguje k součinu součtů obou daných řad. Přitom závorky mohou být vypuštěny a členy libovolně přerovnány.*

Větu uvádím bez důkazu, ale její geometrický význam je velmi názorný: sestrojme si obdélník, jehož strany jsou součty a, b obou daných řad (obr. 11).



Obr. 11.

Strany představme si rozloženy v „součet členů“, t. j.

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$
$$b = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots .$$

Obsah obdélníku je zřejmě mezní hodnota součtů malých obdélníků, jejichž obsahy jsou

$$a_k b_l,$$

kde čísla k, l nabývají hodnot $1, 2, 3, \ldots$. Tato mezní hodnota je zřejmě součet součinové řady.

Rozšíření algoritmu pro násobení desetinných čísel na desetinná čísla nekonečná (periodická nebo iracionální) je patrně také jen jiné vyslovení věty o součinové řadě.

Tato věta nám také dovoluje „umocnit řadu“, jak ukazuje *příklad* 1,19.

Potenční řadu

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots, \quad 0 < q < 1,$$

znásobíme samu sebou a součinovou řadu uspořádáme podle mocnin q; vyjde:

$$\frac{1}{(1-q)^2} = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \ldots.$$

Proveďte podrobně! S dalšími příklady součinové řady se setkáte u potenčních řad.

Cvičení 1,39. Vyjádřete součinovou řadou:

$$\frac{1}{(1-q)^3} = \frac{1}{(1-q)^2} \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Uspořádejte řadu podle mocnin čísla q.

1,40. Dokažte, že platí:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!}.$$

[Návod: Umocněte tuto řadu dvěma (jak dokážete její konvergenci?) a dostanete řadu ze cvičení 1,37a. Při umocňování používejte vztahů toho druhu, jako je na př.

$$\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!\,1!} + \frac{1}{2!\,2!} + \frac{1}{1!\,3!} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{4!}\left[\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}\right] = \frac{2^4}{4!}.]$$

1,15. Řady absolutně a relativně konvergentní. V předcházejících oddílech byly stručně naznačeny jednoduché vlastnosti řad s positivními členy. Chování řad s libovolnými členy je mnohem složitější: existuje však jeden druh těchto řad, které se jednoduchostí blíží řadám s positivními členy. Jsou to řady, které mají tu vlastnost, že řady absolutních hodnot jejích členů konvergují. Takové řady se nazývají **absolutně konvergentní.**

Tak na př. řada

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} - \ldots$$

t. j. geometrická řada s kvocientem $-\frac{1}{2}$ *je* absolutně konvergentní, neboť řada absolutních hodnot jejích členů, t. j.

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \dots$$

je také konvergentní. Naproti tomu konvergentní řada

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \dots$$

je jen **relativně konvergentní,** neboť řada absolutních hodnot jejích členů je divergentní řada harmonická.

Je-li dána nějaká řada, je výhodné, zkoumati nejdříve konvergenci řady absolutních hodnot jejích členů. Platí totiž věta:

(V. 1,22.) *Konverguje-li řada absolutních hodnot členů dané řady, pak tato řada konverguje, a to absolutně.*

Obsah věty lze učiniti zřejmějším geometricky:

Členy řady znázorníme si úsečkami, které nanášíme za sebou na osu číselnou jako vektory; a to směrem kladné osy, má-li člen znaménko +, směrem záporné osy, má-li znaménko —. Při tomto znázornění značí součet řady vzdálenost, kterou má od počátku bod, k němuž se blíží koncový bod vektoru (geometrické znázornění částečného součtu s_n).

Konverguje-li řada absolutních hodnot členů k jistému součtu a, pak bod, který znázorňuje částečný součet s_n *dané* řady, zůstává stále uvnitř úsečky $-a$, $+a$; daná řada má tedy konečný součet.

Cvičení 1,41. Proveďte podrobně pro geometrickou řadu:

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \dots .$$

Z konvergentní řady s positivními členy můžeme ihned odvoditi neomezený počet absolutně konvergentních řad tím, že u členů libovolně měníme znaménka.

Nejdůležitější vlastností absolutně konvergentních řad je, že *věty o přerovnávání řad* (1,19, 1,20) *i o součinové řadě* (1,21) *platí pro tyto řady právě tak jako pro řady s positivními členy.*

Na př. z řady cvičení 1,36a

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

utvoříme absolutně konvergentní řadu

$$s = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots$$

Cvičení 1,42. Dokažte, že součet této řady je $s = \frac{1}{e}$.

.Návod: Použijte věty 1,21 o součinové řadě a dokažte podobně jako ve cvičení 1,40, že $e \,.\, s = 1$.

Věta o přerovnávání neplatí pro řady s libovolnými členy, jak ukazuje příklad 1,16 z odst. 1,10. Ukáži, že také věta 1,21 o součinové řadě neplatí pro řady relativně konvergentní.

Příklad 1,20. Řada

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konverguje, jak bude ukázáno v dalším odstavci (cvičení 1,45a). Řada jejích absolutních hodnot však diverguje (viz cvičení 1,35). Utvoříme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, kde

$$b_1 = a_1^2,\ b_2 = 2a_1a_2,\ b_3 = 2a_1a_3 + a_2^2, \dots$$

(součet indexů činitelů u každého b_n je $n + 1$). Pak platí:

$$b_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1}\,.\,\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-2}} + \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{n}\,.\,\sqrt{1}}\right),$$

t. j.

$$|b_n| > \left(\frac{1}{\sqrt{n}\,.\,\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}\,.\,\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\,.\,\sqrt{n}}\right) =$$
$$= \frac{n}{\sqrt{n}\,.\,\sqrt{n}} = 1.$$

Podle věty 1,13 tedy řada Σb_n není konvergentní; tím spíše to platí i o součinové řadě, která z řady Σb_n vznikne vypuštěním závorek.

Cvičení 1,43. Dokažte,

a) že řady

$$a = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - \ldots,$$

$$b = \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots$$

konvergují absolutně;

b) že platí pro jejich součty:

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Návod: Ze součinových řad spojte vhodné členy, jako na př.

$$\left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) - \left(\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{1!}\right) =$$

$$= \frac{1}{4!}\left[\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4}\right] = \frac{1}{4!}(1-1)^4 = 0.$$

1,44. Znásobte geometrické řady se součty $\frac{1}{1+q}$, $\frac{1}{1-q}$ a ověřte si, že součinová řada má součet $\frac{1}{1-q^2}$.

1,45. Dokažte, že řady relativně konvergentní mají tyto vlastnosti: (*věta Riemannova*).

a) Řada relativně konvergentní obsahuje nekonečně mnoho členů kladných a nekonečně mnoho záporných.

b) Kladné (záporné) členy řady tvoří určitě divergentní částečnou řadu.

c) Relativně konvergentní řadu lze přerovnati tak, že konverguje k libovolně předem zvolenému součtu, nebo je určitě či neurčitě divergentní.

[Návod: Vlastnosti a), b) se dokazují nepřímo; vlastnost c) je rozšířením výsledku příkladu 1,16 z odst. 1,10 a dokazuje se podobně.]

1,46. Utvořte Cauchy-ovu součinovou řadu

$$(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots)^2$$

a ukažte, že ji lze napsati ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1 + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right).$$

Závorky nesmějí být vynechány. O této řadě lze dokázati, že je konvergentní.

Návod: Použijte vztahu:

$$\frac{1}{(2k+1)(2n+1-2k)} = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2n-2k+1}\right).$$

1,16. O řadách alternujících. Z řad, které nemají positivní členy, se nejčastěji setkáváme s těmi, jejichž členy střídají znaménka a nazývají se **alternující.** (Na př. geometrické řady se záporným kvocientem.)

O konvergenci alternujících řad nejčastěji rozhodujeme podle *kriteria Leibnizova.*

(V. 1,23). *Alternující řada konverguje, jestliže absolutní hodnoty jejích členů tvoří klesající posloupnost, která konverguje k nule.*

Takovou řadou je na př. řada

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots, \tag{21}$$

jejíž konvergenci jsme dokázali jinak.

Leibnizovo kriterium lze nahlédnouti geometricky podobně jako větu 1,22: znázorníme-li si na ose číselné „body s_n“ podobně jako v odst. 1,15, pak tyto body budou tvořiti sled intervalů, zařazených do sebe, jejichž délka se stále zmenšuje. Blíží se tedy krajní body těchto intervalů (viz větu 1,12) jistému bodu — geometrickému obrazu součtu dané řady. Sledujte podrobně pro řadu (21).

Cvičení 1,47. Podle kriteria 1,23 dokažte konvergenci řad:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ (viz příklad 1,20),

b) $1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots;$

Tato řada se nazývá Leibnizova a její součet je $\frac{1}{4}\pi$.

c) $\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \frac{1}{\log 5} + \dots$

d) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{3}{48} + \dots + (-1)^n \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,\dots\,.\,(2n-3)}{2^n\,.\,n!} + \dots$

Tato řada je specielní případ řady t. zv. *binomické* a konverguje k $\sqrt{2}$.
Které z uvedených řad konvergují absolutně?

Příklad 1,21. Řada

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4\,.\,5} + \frac{1}{5\,.\,6\,.\,7} + \dots \qquad (22)$$

konverguje, neboť je lze přetvořit v alternující řadu

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\,.\,2} - \frac{1}{2\,.\,3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\,.\,4} - \frac{1}{4\,.\,5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5\,.\,6} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{6\,.\,7}\right) + \dots,$$

která konverguje absolutně (viz příklad 1,11).

Cvičení 1,48. Určete součet řady (22) podobným postupem jako v příkladě 1,11.

Často bývá třeba, znásobiti dvě alterniující řady, které nejsou absolutně konvergentní. V takovém případě používáme *věty Abelovy* pro relativně konvergentní řady.

(V. 1,24.) *Konvergují-li řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *a jejich součinová řada* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_n + a_c b_{n-1} + \dots + a_n b_1)$*), *pak součet součinové řady je součinem součtů obou daných řad.*

Tak na př. Leibnizovu řadu pro $\frac{\pi}{4}$ lze umocniti dvěma, neboť součinová řada

*) Závorky nesmějí být vypuštěny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1 + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right)$$

(viz cvičení 1,46) konverguje, a to podle věty 1,24 k hodnotě $\frac{\pi^2}{16}$. Tohoto postupu použil *Nicolaus Bernoulli*, aby odvodil elementární cestou součet řady

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots,$$

který je $\frac{\pi^2}{6}$. (Viz cvičení 1,35 b.)

1,17. O rychlosti konvergence a sčítání řad. Součty konvergentních řad mají v matematice různý význam: jsou to na př. obsahy obrazců, délky křivek, logaritmy, odmocniny, důležité konstanty (čísla π, e) a p. Proto potřebujeme znáti jejich numerickou hodnotu, t. j. — jak krátce říkáme — řadu sečísti. Poněvadž součty řad bývají často čísla iracionální, připomeňme si, jak s těmito čísly počítáme.

Iracionální číslo, na př. π, vyjadřujeme — jak bylo řečeno v úvodě — v desetinném tvaru s nekonečně mnoha „decimálami";

$$\pi = 3{,}141592\ldots,$$

t. j. vlastně jako součet řady

$$\pi = 31 \,.\, 10^{-1} + 4 \,.\, 10^{-2} + 1 \,.\, 10^{-3} + \ldots \qquad (23)$$

(srovnej cvičení 1,29). Při počítání s tímto číslem se omezujeme „na určitý počet desetinných míst", t. j. iracionální číslo π, které je součet nekonečné řady, nahrazujeme racionálním číslem, částečným součtem této řady. Na př.

$$\pi \doteq s_5 = 3{,}14159.$$

Počet decimál — t. j. index částečného součtu — se řídí přesností, jakou při výpočtu požadujeme.

Podobně tedy při numerických výpočtech můžeme nahradit součet každé konvergentní řady jejím částečným součtem. Jde o to, kolik členů máme sečísti, abychom se přiblížili součtu řady s požadovanou přesností. Po této stránce je zřejmě mezi konvergentními řadami velký rozdíl. Vyjádříme-li číslo π na př. Leibnizovou řadou:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \dots \tag{24}$$

bude třeba několika desítek členů, abychom „dostali π na 4 desetinná místa" (t. j. s chybou $< 10^{-4}$), kdežto při řadě (23) stačily k tomu 4 členy. Tento rozdíl vyjadřujeme výrokem:

Řada (23) *konverguje k součtu* π *rychleji než řada* (24).

Přesnou definici rychlejší resp. pomalejší konvergence řad neuvádím. Čtenář ji najde na př. v knize Knoppově.

Snažíme se pochopitelně dostat vždycky rychlé konvergující řadu, t. j. takovou, kde málo členů dává součet s velkou přesností. Přesnost měříme *chybou*, t. j. velikostí rozdílu mezi skutečným součtem a částečným součtem.

Platí vztah

$$s = s_n + r_n,$$

kde r_n je součet řady

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots \text{(in inf.)},$$

která podle věty 1,10 konverguje. Číslo r_n — *t. zv. zbytek po n-tém členu* — udává chybu. Protože skutečný součet s zpravidla neznáme, odhadujeme chybu

$$r_n = s - s_n,$$

t. j. určujeme pro ni meze.

Jako příklad uvádím bez důkazu jedno z četných pravidel pro odhad chyby.

(V. 1,25.) *Platí-li pro členy a_n absolutně konvergentní řady od určitého indexu $n = k$ vztah:*

$$|a_n| \leqq |a_k|\, a^{n-k},$$

kde a je kladné číslo, < 1, pak chyba r_n je omezena odhadem:

$$|r_n| \leqq |a_k| \cdot \frac{a}{1-a}.$$

Příklad 1,22. Pro řadu:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \tag{25}$$

plyne na základě vztahu

$$\frac{1}{n!} \leqq \frac{1}{12!}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-12} \qquad \text{pro } n > 12$$

odhad chyby:

$$|r_{12}| \leqq \frac{1}{12!} \cdot \frac{1}{11} \leqq 10^{-9};$$

t. j. sečtením 13 členů dané řady dostaneme číslo e přesně na 9 desetinných míst. Řada (25) pro číslo e tedy konverguje velmi uspokojivě.

Mezi pomalu konvergující řady patří zpravidla řady alternující, klesají-li absolutní hodnoty jejich členů pomalu k nule, jako je tomu na př. u řady Leibnizovy.

Konvergence těchto řad se urychluje různými úpravami — *t. zv. transformacemi řad.*

Cvičení 1,49. Kolik členů řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^n} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots$$

je třeba sečísti, abychom dostali součet s přesností na 3 desetinná místa? Proveďte! — Vyjde $1{,}29126 \pm 8.10^{-5}$ jako součet 5 členů.

1,50. Vypočtěte $\sqrt{e}$ (cvičení 1,39) na 3 desetinná místa! Kolik členů je třeba sečíst? — Vyjde $1{,}64843 \pm 4.10^{-5}$ jako součet 5 členů (pro $n = 0$ až $n = 4$).

1,18. O počítání s iracionálními čísly. Provésti nějaký početní výkon se zvláštními čísly znamená určiti číslo, které je jeho výsledkem. Reálné číslo „známe" — vzpomeňte na to, co bylo řečeno v úvodě — dovedeme-li vypočísti libovolnou jeho decimálu. Ukáži postup tohoto výpočtu na příkladě násobení dvou iracionálních čísel.

Příklad 1,23. Jest určiti první 3 decimály součinu $e\pi$. Praktický počtář by se vyjádřil takto: kolikamístnými racionálními čísly máme nahraditi oba činitele, aby součin byl určen přesně na 3 desetinná místa?

Položme:

$$e = E_n + r_n; \qquad \pi = \Pi_n + \varrho_n,$$

kde E_n, Π_n znamenají částečné součty až po n-tou decimálu (včetně), r_n, ϱ_n zbytky po n-tém členu; platí tedy:

$$r_n < 10^{-n}; \quad \varrho_n < 10^{-n}.$$

Součin upravíme:

$$e\pi = E_n\Pi_n + (E_n\varrho_n + \Pi_n r_n + r_n\varrho_n) < \\ < 10^{-n}(E_n + \Pi_n + 10^{-n}). \qquad (26)$$

Ježto je

$$e = 2{,}7182818\ldots; \qquad \pi = 3{,}1415926\ldots,$$

platí nerovniny:

$$E_n < e < 2{,}8; \qquad \Pi_n < \pi < 3{,}2,$$

t. j. (26) lze upraviti:

$$e\pi < 10^{-n}(6 + 10^{-n}) < 10^{-n} \, . \, 10 = 10^{-n+1}.$$

Má-li být tedy zajištěna 3. decimála, musí být chyba menší než 10^{-4} vzhledem k možnosti opravy; t. j. $n = 5$ (čísla e, π nutno nahraditi 5místnými racionálními čísly:

$$E_5 = 2{,}71828; \qquad \Pi_5 = 3{,}14159.$$

Výsledek je pak

$$e\pi = 8{,}539(7)\ldots$$

Cvičení 1,51. Určete podobně první dvě decimály součinu $e\sqrt{2}$; $\sqrt{2} \doteq 1{,}4142135\ldots$.

Příklad 1,24. Podobně postupujeme při dělení. Chceme-li na př. vypočísti

$$\frac{1}{\log_{10} 2}$$

na 3 desetinná místa, klademe

$$\log_{10} 2 = L_n + r_n; \qquad r_n < 10^{-n};$$

a provedeme odhad chyby

$$\frac{1}{L_n} - \frac{1}{\log_{10} 2} = \frac{1}{L_n} - \frac{1}{L_n + r_n} = \frac{r_n}{L_n(L_n + r_n)} < \frac{r_n}{L_n^2}. \tag{27}$$

Ježto je

$$\log_{10} 2 = 0{,}3010300\ldots,$$

platí

$$L_n \geqq 0{,}3,$$

t. j. z nerovniny (27) plyne:

$$\frac{1}{L_n} - \frac{1}{\log_{10} 2} < \frac{r_n}{0{,}3^2} < \frac{10^{-n+2}}{9} < 10^{-n+2}.$$

Dopočtěte! Vyjde $\dfrac{1}{\log_{10} 2} = 3{,}321(9)\ldots$

Podobně můžeme počítati mocniny a odmocniny z iracionálních čísel.

Cvičení 1,52. a) Kolikamístným racionálním číslem musíme nahraditi číslo e, abychom určili $\sqrt{e}$ na 3 desetinná místa?

[Návod: Použijte nerovnosti:

$$\sqrt{e} = \sqrt{E_n + r_n} < \sqrt{E_n} + \sqrt{r_n}.]$$

b) Vypočtěte e se stejnou přesností s použitím řady ze cvičení 1,49. Co je výhodnější?

Některé výpočty s iracionálními čísly jsou však těmito elementárními cestami neproveditelné. Na př. najíti $\sqrt{\pi}$ nebo umocniti $3{,}25^e$; zde je jediná cesta logaritmická; ale ta nevyhovuje, potřebujeme-li výsledek s větším počtem desetinných míst a nemáme-li po ruce tabulky s logaritmy o dostatečném počtu míst. Ostatně logaritmy samotné nelze počítati primitivním způsobem z definice (jako exponenty); podobně je tomu s hodnotami goniometrických funkcí.

K řešení všech těchto úloh potřebujeme dobře konvergující řady, které by nám daly výsledek s dostatečnou přesností jako součet malého počtu členů. Takovéto řady pro počítání odmocnin, logaritmů, hodnot goniometrických funkcí a p. existují a odvozují se z řad, které vyjadřují různé elementární funkce. S principem věci a s některými jednoduchými příklady se seznámí čtenář v 2. části této příručky.