VI. GEOMETRIE NA SCESTÍ

Proti matematice lze hřešiti dvojím způsobem; buď v ní hříšník vidí pouze jakési klikyháky, s nimiž si zarputilí blouznivci v prostorách úplně odloučených od potřeb tohoto světa pohrávají – pokud ovšem nezkoušejí – nebo se její význam nesmírně přeceňuje a projevuje se snaha užíti matematiky i tam, kde jí naprosto použíti nelze, na př. v psychologii (*Herbart* a jeho stoupenci). A tito nadšenci to byli, kteří svoji obdivovanou scientiam amabilem zavedli na scestí.

a) Nauka o *zlatém řezu* (sectio aurea, divina) jest odedávna uzavřená kapitola elementární geometrie. Jest to úloha rozděliti úsečku tak, aby menší část se měla k větší jako tato k celku; značí-li x menší část úsečky, má tedy býti $x : (a - x) = (a - x) : a$; jest tedy x určeno spojitou úměrou, proto se též zlatý řez nazývá někdy dělením spojitým. Z úměry plyne kvadratická rovnice $x^2 - 3ax + a^2 = 0$, jejíž kořeny jsou $\frac{1}{2}(3a \pm a\sqrt{5})$, úloze pak vyhovuje menší kořen $a\,\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$; větší část úsečky pak jest $a\,\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, takže $x : (a - x) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Tuto hodnotu lze vyjádřiti řetězovým zlomkem

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

postupnou úpravou obdržíme tyto přibližné hodnoty:

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21}.$$

(Všimněte si, že čitatelé i jmenovatelé tvoří řadu *Fibonacciových* čísel, viz Aritm. hry a zábavy str. 18). V praxi užívá se poměrů $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$. Konstrukce založená na větě o mocnosti bodu ke kružnici jest jednoduchá. Na jednom konci dané úsečky vztyčíme kolmici a naneseme polovinu této úsečky, s bodu tak vzniklého vedeme kružnici o poloměru rovném polovině dané úsečky, nyní druhý koncový bod spojen se středem kružnice vytíná na kružnici dva body; vzdálenost bližšího z nich druhému koncovému bodu přeneseme na danou úsečku, čímž jsme dosáhli dělení dle zlatého řezu. Zlatého řezu se užívá při některých konstrukcích, na př. strana pravidelného pětiúhelníka a desítiúhelníka jest větší část úhlopříčky pětiúhelníka resp. poloměru kružnice desítiúhelníku opsané; již *Eudoxos* (4. stol. př. Kr.) znal větu, značí-li a_6, a_5, a_{10}, strany šestiúhelníka, pětiúhelníka a desítiúhelníka témuž kruhu vepsaného, že platí $a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$. Rozdělíme-li obě části úsečky rozdělené opět zlatým řezem a značíme-li části menší úsečky $a_{11} < a_{12}$, druhé pak $a_{21} < a_{22}$, platí uměra $a_{11} : a_{12} = a_{21} : a_{22}$ a nad to jest $a_{12} = a_{21}$.

Pětiúhelník a jeho pět úhlopříček odedávna zajímal člověka; jest to jediný mnohoúhelník, jenž má týž počet úhlopříček jako stran, jest nejnižším mnohoúhelníkem, jehož strany i úhlopříčky lze vésti jediným tahem; již *Pythagorovi* bylo známo, že každá z úhlopříček pravidelného pětiúhelníka jest protínající ji další úhlopříčkou rozdělena dle zlatého řezu. O konstrukcích pětiúhelníka a z něho jednoduše odvozeného desítiúhelníka jsme se již zmínili. Obrazec určený pěti úhlopříčkami pětiúhelníka stává se a dlouho ještě zůstává podivuhodným, tajuplným i zázračným útvarem; u nás „muří noha“, v německé mytologii „Drudenfuss“ jest odznakem čarodějníků a čarodějnic, muří noha stává se odznakem různých společností atd.

Tak v Goetheově Faustu ve scéně, kdy se Faust po prvé setkává s Mefistofelem, čteme tuto rozpravu:

Mef.: Bych mohl ven, ti řeknu ve důvěře,
mně vadí cosi, hloupost jen,
ta můří noha na tvém prahu.

Faust: Ten pětiroh tě trudí? Hleď
a pověz, synu z pekel svahů,
jaks přišel sem, když ten tě drží teď?

Mef.: Jen pohleď. Špatně nakreslena jesti,
ten zvenčí jeden nedotažen roh
a trochu otevřený zeje.
(Dle překladu *Jar. Vrchlického*).

A geometrická souvislost pětiúhelníka se zlatým řezem to byla, jež vnesla do nauky o zlatém řezu naprosto neodůvodněnou mystiku, jejíž nikoliv jedinou obětí stala se estetika. Zejména v renaisanci pěstuje se a udržuje se mínění, že nejkrásnější jsou ony útvary, v nichž lze vystopovati zlatý řez. Učitelé svým malířským učňům radí konstruovati lidské tělo dle zlatého řezu: obočí prý dělí tvář zlatým řezem, v článcích prstů se prý objevuje toto dělení; známý obraz *Leonardo da Vinci* Poslední večeře Páně proto prý jest tak působivý, že postavy na něm bílým ubrusem jsou rozděleny dle zlatého řezu. Později se šlo ještě dále: Malíři — aniž snad vědí o zlatém řezu — malují své obrazy na obdélníkových plátnech a vpravují je do obdélníkových rámů zachovávajíce rozměry určené zlatým řezem; šířka a výška jsou části úsečky rozdělené zlatým řezem, horizont obrazu dělí výšku dle zlatého řezu a pod. I proměřil německý lékař *Fechner* několik set obrazů asi ve dvaceti obrazárnách, avšak výsledky ani zdaleka nepotvrdily toto mystické učení o zlatém řezu; jediným kladným výsledkem měření *Fechnerových* bylo to, že byl tak dán podnět k vybudování experimentální estetiky. Jedním z nejhorlivějších stoupenců o estetickém významu zlatého řezu, jenž prý se uplatňuje i při stavbě houslí, byl *Zeising*; o jeho činnosti se vyslovuje *Otakar Hostinský* takto:

„Tento určitý matematický poměr prohlášen však byl *Zeisingem* nejen za absolutní prvek estetický, nýbrž i za jakýsi *kosmický zákon*, v němž *Zeising* ovšem daleko přestřelil. Ukazoval na to, že nejen na stavbách, antických sochách a jiných plastikách, ale i v dramatech, dále v přírodě na rostlinách i v chemii při složení součástek nalezneme zlatý sek, takže jest to zákon, na němž spočívá a jímž se řídí celý mikrokosmos.... Jisto jest, že *Zeising*, aby zákon zlatého seku všude našel, mnoho z jeho přísného znění slevoval a již jen pouze přibližný poměr za zlatý sek vydával, dále pak že dedukce konstruoval často i věcně chybně, takže dal si na př. sestrojiti dřevoryt *Apollona Belvederského*, který však pravé soše nijak neodpovídal. *Mir. Tyrš* zabýval se podrobně těmito výsledky *Zeisingovými* a dospěl k poznání, že všechno to, čeho se *Zeising* dovolával, jest nesprávno. Měřil sám za tím účelem mnoho antických soch, půdorysy staveb a pod. a shledal, že ani tehdy, když připustíme mnoho z licencí *Zeisingových*, nenalezneme zákon zlatého seku, takže snad jediná Sixtinská madonna *Rafaelova* by tomuto poměru odpovídala, ovšem bez úmyslu svého tvůrce.“ (Esthetika I., str. 292).

Jak patrno z tohoto citátu, hledali vyznavači zlatého řezu oporu pro své tvrzení i ve výtvarném umění, studujíce plány architektur všech dob i slohů. Ale zde se setkávali s konkurující ideí; jiní opět v plánech domnívali se poznávati vztahy odvozené z rovnostranného trojúhelníka, tedy odvozené z $\sqrt{3}$; jiní zase drželi se poměru čtverce a jeho úhlopříčky, tedy $\sqrt{2}$. O rovnostranném trojúhelníku viz na př. *Hejčl*, Bible česká (I. str. 930-31), kdež jistě nesprávně praví: „Tento klíč ($\frac{1}{2}\sqrt{3} : 1$) je vzat z rozměrů lidského těla stanovených samým stvořitelem“. Památný kostel na Zelené Hoře u Města Žďáru jest stavěn do pětiúhelníkového půdorysu a číslo pět jest tam mnohokráte zdůrazněno; pět bran, pět vchodů, pět oltářů, pět zvonů atd.; ale zde důvod jest jiný: tato stavba jest apoteosa pěticípé svatojánské hvězdy.

Největší památník zlatého řezu někteří badatelé vidí v *Cheopsově* pyramidě. Tento kamenný masiv tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu o základně mající stranu 115,17 m o tělesné výšce 146,71 m jest až na nepatrné úchylky 2′ — 3′ přesně orientován dle světových stran; dodnes není známo, jakému účelu měl vlastně sloužiti. Měla to býti hrobka královská? Ale proč potom v těchto více než $2\frac{1}{2}$

milionech kubických metrů zdiva jsou tři prostory nad sebou místo jedné a od počátku prázdné? Jsou domněnky, že to měla býti vodní nádrž pro Memfis nebo ochrana proti písečným bouřím, měl to prý býti chrám zasvěcený božstvu Slunce nebo Měsíce, snad to byla pokladnice faraonova nebo sýpka pro celý Egypt — houževnatě však se udržuje výklad, že to byl monumentální pomník matematických vědomostí starých Egypťanů, kteří prý do tohoto zdiva uložili své vědomosti o čísle π nebo o zlatém řezu nebo své vědomosti hvězdářské. Podíl $4a : h$ udává velmi přibližně číslo *Ludolfovo*, přátelé theorie o zlatém řezu uvádějí, že podstava této pyramidy má se k jejímu plášti jako plášť k jejímu celému povrchu. Je-li c výška boční stěny, jest dle *Pythagorovy* věty $c^2 = a^2 + h^2$ a dle onoho tvrzení je $4a^2 : 4ac = 4ac : (4a^2 + 4ac)$ čili $c^2 = a^2 + ac$, $h^2 = ac$, $a : h = h : c$. Ve skutečnosti jest $a : h = 0,\ 785$, $h : c = 0,\ 786$, což jest shoda skutečně nápadná, ale její předpoklady jsou příliš umělé a jistě neodpovídají citu tehdejšího obyvatelstva a stavu tehdejší geometrie.

α) Líbí se vám obdélník sestrojený dle návodu ve Sbírce příkladů geometrických od *A. Macha* více než jiný? Jde o obdélník, jehož půl šířky jest menší úsek výšky rozdělené zlatým řezem.

β) Je-li r poloměr podstavy, s strana, v výška rotačního kužele a platí-li $r : v = v : s$, dělí plášť povrch kužele dle zlatého řezu.

γ) Normalisovaný formát jest dán obdélníkem, jenž přehnut rovnoběžně s kratší stranou dává obdélník původnímu podobný; jest tedy $a : b = b : \frac{1}{2}a$, odkuž $b = a\,\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Sestavte serii normalisovaných formátů vycházejíce z $a = 1000$ mm.

Geometrie však přece jen hluboko zasáhla do vývoje výtvarného umění a to jednou z kapitol projektivní geometrie, totiž perspektivou. Viz o tom tři monografie prof. *F. Kadeřávka*: Perspektiva, 1922; Relief, 1925; Geometrie a umění v dobách minulých 1935; též *G. Wolff*: Mathematik und Malerei; *Lietzmann*: Mathematik und bildende Kunst. Dle zásad perspektivy byly proměřeny různé slavné obrazy a byly objeveny četné chyby proti správným konstrukcím, které necvičené oko pravidelně nepostřehne. Proslulý svou krásou a již zde zmíněný obraz *Leonardo da Vinci* Poslední večeře Páně znázorňuje na př. místnost, jež by se ve skutečnosti divákovi velmi málo líbila; nepříliš hluboká, zato nadměrně dlouhá, spíše chodba než důstojná prostora. Staří mistři prováděli okna v různých poschodích tak, aby s jistého místa se okna jevila stejně vysoká, jak to asi činili? Zorné úhly úseček jevících se stejně velké jsou si rovny.

K této stručné stati o geometrii v umění budiž dovoleno připojiti zmínku o některých náhrobcích s geometrickým obsahem. Na náhrobku *Archimedově* byl prý narýsován osový řez rovnostranným válcem, kuželem o téže základně a výšce a řez koule vepsané do válce na památku *Archimedova* objevu, že o krychlovém obsahu těchto těl s platí:

$$\tfrac{1}{3}\pi r^2 \,.\, 2r : \tfrac{4}{3}\pi r^3 : \pi r^2 \,.\, 2r = 1 : 2 : 3.$$

Na náhrobku jednoho člena z rodiny *Bernouillů* byla narýsována spirála, jež byla předmětem jeho četných studií; pomník *C. F. Gausse* v Göttinkách stojí na základně vytvořené pravidelným sedmnáctiúhelníkem; tato konstrukce opírající se o číselně theoretické úvahy o binomické rovnici $x^{17} - 1 = 0$ jest totiž jedním z nejkrásnějších *Gaussových* objevů. Na náhrobku *Diofantově* prý byl vyryt životopis tohoto matematika ve formě slovní rovnice: Šestinu svého věku byl chlapcem, za další dvanáctinu vyrostl mu vous, za další sedminu se oženil; syn, který se mu narodil o pět let později, zemřel, když dosáhl právě poloviny celého otcova věku; jak byl stár tento řecký matematik, zemřel-li čtyři léta po svém synovi?

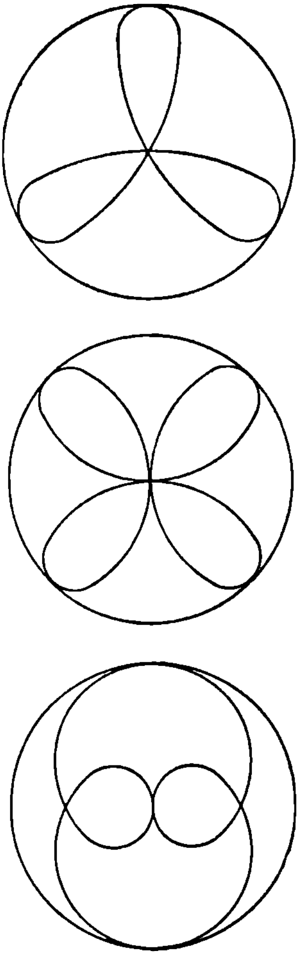
$$\tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{12}x + \tfrac{1}{7}x + 5 + \tfrac{1}{2}x + 4 = x, \; x = 84.$$

Pomník *Miloslava Pelíška*, profesora čes. vysoké školy technické (narozen 19. XI. 1855 v Krouné, zemř. v Brně

6. XI. 1940) v urnovém háji brněnského hřbitova jest vytvořen parabolickou úsečí o základně 148 cm a výšce 122 cm; jaký jest parametr této paraboly? ($2p = 44{,}88$).

b) Listy i květy rostlin bývají symetricky vyvinuty, zejména pak květy bývají uspořádány do kruhu. I objevila se velmi záhy myšlenka — již za dob *Leibnizových* — nebyloli by lze kontury listů a květů vyjádřiti jako křivky pomocí rovnice. V obr. 54 jsou nakresleny t. zv. růžice, jejich rovnice postupně jsou v polárních souřadnicích:

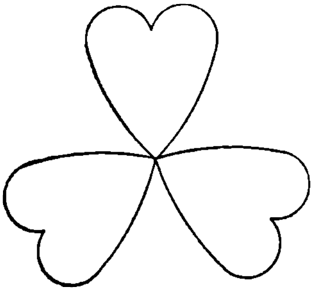
$$\varrho = R \sin 3\varphi,$$
$$\varrho = R \sin 2\varphi,$$
$$\varrho = R \sin \tfrac{1}{2}\varphi.$$

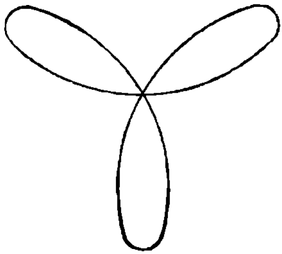


Obr. 54.

Asi před padesáti lety *Bodo Habenicht* pokusil se odvoditi polární rovnice listových okrajů pomocí trigonometrických polynomů; myšlenka to byla v zásadě velmi správná, povážlivější však byly některé důsledky z toho činěné; v obr. 55 znázorněn jest list komonice rostoucí na slunci a list šťavele kyselého, vyhledávajícího lesní stín a chlad. Rovnice první křivky jest $r = 4(1 + \cos^3 \varphi) + 4 \sin^3 \varphi$, křivky druhé $r = 4(1 + \cos^3 \varphi) - 4 \sin^3 \varphi$. Jsou tedy až na znaménko téhož tvaru, i domnívá se *Habenicht*, že různost toho znaménka souvisí s množstvím zachyceného slunečního záření.

I nauku o zlatém řezu chtěli někteří botanikové aplikovati na umístění listů na lodyze; zajímavé poznámky

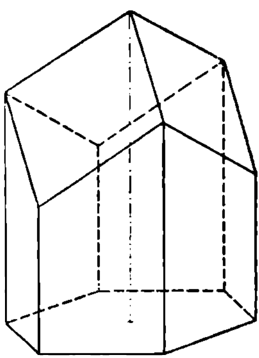




a) Obr. 55. *b)*

o souměrnosti listů, o spirálovitém seřazení slunečnicových jader viz: *Lietzmann*: Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Figuren, str. 290 a n.

c) Velikou pozornost — a ne právě zaslouženou — vzbudilo pozorování některých biologů a matematiků o práci hmyzu, jež se jevila pozorovatelům jako projev matematických znalostí na př. včel.



Obr. 56.

Stavba včelích buněk jest problém opředený přímo vzrušujícími dobrodružstvími, v nichž jest nesnadno rozeznati pravdu od básně; podrobněji viz o tom *Dr. Pospíšil*: Filosofie podle sv. Tomáše Akvinského, (str. 1025). Matematický obsah této úlohy jest takový: Včely své buňky staví do pravidelných šestibokých hranolů, které jsou třemi rovinami protínajícími se v témž bodě na ose tohoto hranolu zkoseny. Tak vzniká těleso o jistém krychlovém obsahu *K*. Jest otázka, pod jakými úhly nutno zkosit tento hranol, aby jeho povrch (s nímž souvisí spotřeba vosku ke stavbě buňky) byl při daném *K* minimální. Úloha vede tedy ke stanovení minima a jest řešena na př. v *Dorrie*: Triumph der Mathematik, str. 371. Řešení pak jest toto (viz obr. 56): Hranol nutno zkositi třemi kosočtverci, jejichž úhly jsou velmi přibližně 110° a 70°; tento početní výsledek velmi dobře souhlasí s měřením na skutečných buňkách. Problém včelích buněk k sobě přivábil z hvězdářů *Keplera* a *Maraldiho*, z matematiků *S. Königa* a *Mac Laurina*, z fysiků *Réaumura*; rovněž přírodopisci jsou zastoupeni skvělými jmény *G. de Buffon*, *Charles R. Darwin*; rovněž filosofové (*Voltaire*) projevili zájem o toto řešení, bádajíce o účelnosti v přírodě, jevící se i ve zvířecím pudu.

Ve skutečnosti jest problém buněk komplikovanější: *Darwin* zjistil, že to nejsou jednoduchá geometrická tělesa, dno mají silnější, stěny jsou vlasově tenké a jejich vnější okraj je ovrouben silnějším rámcem a hrany jsou vyztuženy sloupky; jest to jakási konstrukce z pevnějšího materiálu, vyztužená tenkým zdivem.

Jak vysvětlíme tuto zajímavou práci a včel? Jest to zjemnělý a vlivem sta a tisíce generací vypěstovaný pud, jenž velí bobrům stavěti vodní tvrze tak a ne jinak; týž učí zavěšovati pavouky pavučiny na týchž principech jako my stavíme řetězové mosty a týž nutí ptáky jak ke stavbě hnízd, namnoze velmi dokonalých a podivuhodných, tak ke stěhovavým letům ve směrech po staletí a tisíciletí zachovaných. Formulovati tyto zjevy tak, že včely řeší úlohy stereometrické jest totéž, jako se domnívati, že foxterier Dášenka k nabízenému pamlsku proto běží po přímce, jelikož jest jí znám axiom, dle něhož jest úsečka nejkratší spojnicí dvou bodů.