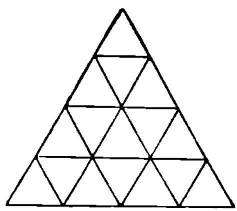
# II. NĚKTERÉ ZAJÍMAVÉ PŘÍKLADY Z GEOMETRIE

**A) Planimetrie.** a) Rozdělme všechny strany rovnostranného trojúhelníka na $n$ stejných dílů, tak obdržíme rovnostranné trojúhelníky různé velikosti. Kolik jest všech těchto trojúhelníků? Trojúhelníky jsou dvojího druhu, buď jsou vrcholem obráceny nahoru, počet jejich označme $\Delta_n$, nebo dolů, jejichž počet označme $\nabla_n$. (Obr. 14.)

Snadno ukážeme, značíme-li $s_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + k$, že jest $\Delta_n = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n$, což jest aritmetická řada druhého řádu o součtu $\Delta_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.



Obr. 14.

Budiž nyní $n$ sudé rovno $2\nu$ a značme $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1 + 2 + 3$, $\sigma_3 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$; pak jest $\nabla_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\nu$, což jest opět řada aritmetická druhého řádu a má součet

$$\nabla_n = \frac{\nu(\nu+1)(4\nu-1)}{6} = \frac{n(n+2)(2n-1)}{24}.$$

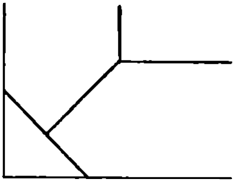
Jest tudíž úhrnem všech trojúhelníků

$$\Delta_n + \nabla_n = \frac{n(n+2)(2n+1)}{8}.$$

Ukažte podobným rozborem, že pro $n$ liché jest počet trojúhelníků dán vzorcem

$$\Delta_n + \nabla_n = \frac{(n+1)(2n^2+3n-1)}{8}.$$

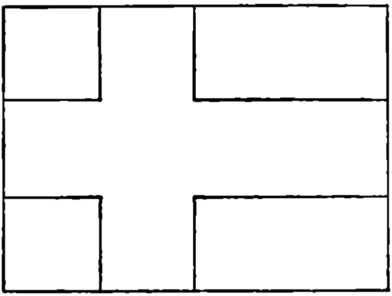
b) Čtvercová zahrada jest obehnána čtvercovým příkopem o šířce 2 m. Lze se do této zahrady dostati pomocí dvou prken o délce 2 m? Řešení ukazuje obr. 15. Střed prkna, pokládáme-li zevnější břehy příkopu za osy $x$ a $y$, má souřadnice ($\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$), vrchol zahrady pak (2; 2); vzdálenost těchto dvou míst jest $(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2})\sqrt{2} = 1{,}82$ m, zbývajících 18 cm užijeme k upevnění prken na březích. Proveďte tuto úvahu čistě planimetricky pro délku prken $d_1 \leqq d$, $d_2 \leqq d$, kdež $d$ jest šířka příkopu. Počítáme-li pro upevnění prkna na každé straně $\varepsilon$, musí býti, aby úloha byla řešitelna, (užijeme-li nejprve prkna $d_1$) $\frac{1}{2}d_1 + d_2 - 3\varepsilon \geqq d\sqrt{2}$; v našem případě jest $\varepsilon \leqq 6$ cm.



Obr. 15.

c) Dánská vlajka jest obdélník opatřený křížem o ploše rovné polovině obdélníka, stanovte šířku tohoto křížového pruhu! (Obr. 16.)

Úlohu řeší rovnice $ax + bx - x^2 = \frac{1}{2}ab$, kdež $x$ jest šířka pruhu, $a$, $b$ jsou rozměry vlajky; z kořenů jejích $x_{1,2} = \frac{(a+b) \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ má význam pouze kořen, v němž odmocninu bereme se záporným znaménkem.

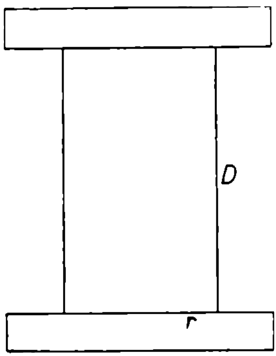


Obr. 16.

d) Gramofonová jehla pohybuje se po jisté spirále; stanovte délku této spirály, jejíž $N$ závitů jest v mezikruží omezeném kružnicemi o poloměrech $r < R$. Spirálu jest možno velmi přibližně pokládati za $N$ soustředných kruhů (předpokládáme, že i kružnicemi o poloměrech $r$, $R$

probíhá jehla). Poněvadž tyto kružnice jsou vesměs od sebe stejně vzdáleny, tvoří jejich obvody aritmetickou řadu, jejíž první člen jest $2\pi r$ a $N$-tý $2\pi R$; jest tudíž úhrnná délka $d = \pi(r + R)\,N$. Ve skutečnosti dráha jehly bude podstatně větší, jelikož nejedná se o geometricky dokonalé spirálové závity; na všech závitech při podrobnějším ohledání jest pozorovati veliké množství vlnek. Pro Smetanovu Bettinu polku (Esta č. 7855) jest $N = 239$, $R = 120$ mm, $r = 57$ mm, $d = 132{,}798$ m; pro třetí Slovanský tanec Dvořákův (Ultraphon č. 10526) $N = 258$, $R = 120$ mm, $r = 52$ mm, $d = 139{,}411$ m.

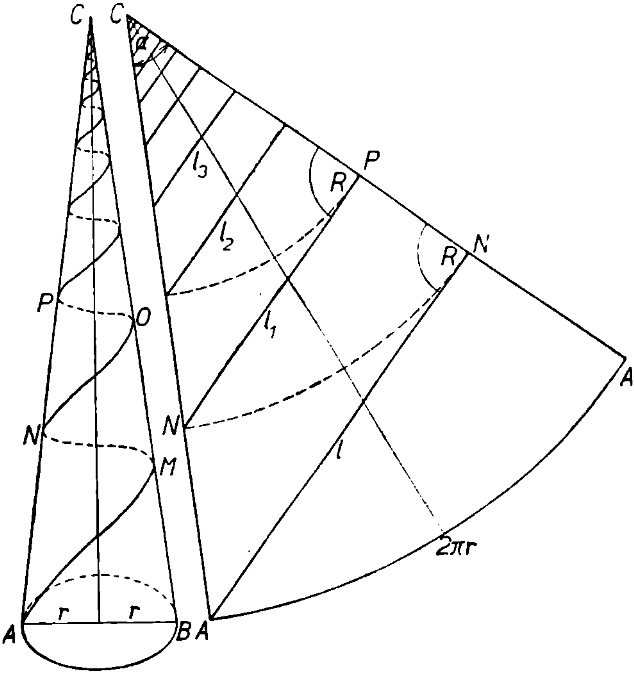
**B) Stereometrie.** a) Týmž zjednodušujícím předpokladem řešme tuto úlohu: Na cívce o průřezu naznačeném v obr. 17 jest navinuta nit. Jak jest dlouhá, je-li poloměr cívky $r = 25$ mm, délka $D = 250$ mm, $\delta = 0{,}25$ mm tloušťka nitě a $d = 50$ mm výška navinutých vrstev. Spirála určená nití má v každé vrstvě jistý počet závitů a lze je nahraditi kružnicemi a to v počtu $\frac{D}{\delta}$ a jejich poloměry od vrstvy k vrstvě stoupají o $\delta$. I jest úhrnná délka nitě $2\pi r \cdot \frac{D}{\delta} + 2\pi(r + \delta)\,\frac{D}{\delta} + \ldots + 2\pi\left[r + \left(\frac{d}{\delta} - 1\right)\delta\right] \times \frac{D}{\delta} = \frac{\pi D d}{\delta^2}\cdot(2r + d - \delta)$ a pro naše údaje $19950\pi$ m $= 62643$ m.



Obr. 17.

b) Na kuželovitých lasturách lze pozorovati spirálovitou čáru, jež vede od nejširší části lastury k jejímu vrcholu. (Obr. 18.)

Rozvineme-li plášť kuželové plochy, obdržíme kruhovou úseč; je-li $s$ strana kužele a $r$ poloměr podstavy, $\alpha$ středový úhel úseče, platí úměra $2\pi s : 2\pi r = 360 : \alpha$, odkud $\alpha = \frac{360r}{s}$.

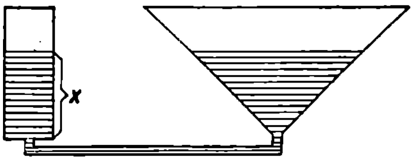



Obr. 18.

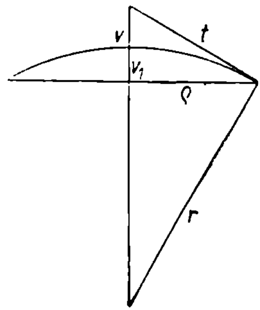
Máme stanoviti délku této čáry za předpokladu, že po rozvinutí jeví se závity jako kolmice na poloměr kruhové výseče; snadno odvodíme $d = s \sin \alpha + s \sin \alpha \cos \alpha + s \,.$
$. \sin \alpha \cos^2 \alpha + \ldots = \frac{s \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = s \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha = s \operatorname{cotg} \frac{180r}{s}$.

Na příklad při jistém druhu vinutky jest $s = 34$ mm, $r = 4{,}5$ mm, $d = 77$ mm; při jistém druhu kotoučovce bylo naměřeno $s = 100$ mm, $r = 4{,}3$ mm, $d = 736$ mm.

c) Pro zjištění reálného kořene rovnice $x^3 + x - a = 0$ lze užíti tohoto přístroje: Spojité nádoby jsou vytvořeny válcem o podstavě s poloměrem 1 cm a kuželem, o jehož výšce $x$ a poloměru $\varrho$ platí $\frac{\varrho}{x} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$, jeho objem




Obr. 19.




Obr. 20.

tedy jest $\frac{1}{3}\pi\, x^3 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha$. Volíme-li $\frac{1}{3}\pi \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha = 1$, t. j. $\alpha = 88^\circ\, 41'$, jest krychlový obsah kužele $x^3$. Zanedbejme vliv spojovací trubice; nalejeme-li nyní do kužele $a$ cm³ kapaliny, ustálí se výška vody ve výši $x$ cm, t. j. bude udávati přibližnou hodnotu reálného kořene dané rovnice.

d) Chlapec 150 cm vysoký stojí na loďce plující po rozsáhlém jezeře; oč uvidí z hladiny jezera více, stoupne-li si na špičky, t. j. zvýší-li se poloha jeho očí o 5 cm? (Obr. 20.)

Jde vlastně o obsah vrchlíku, který přehlédneme s výšky $v$, je-li tato velmi malá oproti poloměru koule. Dle věty Pythagorovy jest $(v + r)^2 = r^2 + t^2$, čili $v(v + 2r) = t^2$, poněvadž lze zanedbati $v$ oproti $r$, jest $2vr = t^2$. Porovnáním obsahu pravoúhlého trojúhelníka obdržíme $(v + r)\varrho = rt$, odsud podobně $\varrho = t$. Z věty o výšce pravoúhlého trojúhelníka plyne $(v + v_1)(r - v_1) = \varrho^2 = t^2 = 2rv$ a dále $v + v_1 = 2v$, takže $v = v_1$ a obsah vrchlíku $2\pi rv$, tedy pro zeměkouli 40 000$v$ km². Obhlédne tedy chlapec 150 cm vysoký plochu 40 000 . 0,0015 = 60 km², stojí-li na špičkách, obhlédne 40 000 . 0,00155 = 62 km², tedy o dva čtvereční kilometry více.

Podobnou úvahou lze řešiti i tuto úlohu: Piráti, aby unikli na svých bárkách čnějících $v_1 = 1$ m nad vodou, snažili se skrýti před pronásledujícími je koráby se strážními koši ve výšce $v_2 = 9$ m za vrchlík vytvořený hladinou moře, prchajíce nad to ještě ve směru kolmém na směr pronásledující je lodě. Kdy se mohli před ní cítiti v bezpečí? Spojnice koncových bodů úseček $r + v_1$, $r + v_2$ jdoucích středem země musí býti tečnou hlavní kružnice určené místy, kde se obě plavidla nalézají; o jejich vzdálenosti $d$ platí

$$d = \sqrt{(r + v_1)^2 - r^2} + \sqrt{(r + v_2)^2 - r^2} \doteq \sqrt{2r}\,(\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2}),$$

poněvadž $v_1$, $v_2$ vyjádřeno v metrech jest velmi malé proti $r$ danému kilometry. Jest tedy

$$d = \sqrt{2 \,.\, 6{,}370}\,(\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2}) = 3{,}57\,(\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2})\ \text{(km)}$$

a v našem případě:

$$d = 3{,}57\,(1 + 3) \doteq 14{,}3\ \text{(km)}.$$

e) Jest dána krychle o straně rovné 8 jednotkám délky. Kolik jest všech krychlí o straně rovné celistvému násobku délkové jednotky obsažených v základní krychli? Krychlí o straně 1 s podstavou v podstavě původní krychle jest $8^2$, o straně 2 pak $7^2$, o straně 3 pak $6^2$ a td., tedy všech krychlí s podstavou v podstavě krychle jest $8^2 + 7^2 + 6^2 + \ldots 1^2$. Ve vrstvě následující jest pak těchto krychlí $8^2 + 7^2 + 6^2 + \ldots + 2^2$ atd. Jest tedy všech krychlí

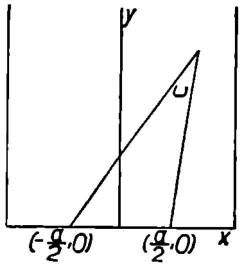
$$(8^2 + 7^2 + 6^2 + \ldots + 1^2) + (8^2 + 7^2 + 6^2 + \ldots 2^2) +$$
$$+ (8^2 + 7^2 + 6^2 + \ldots 3^2) + \ldots + 8^2 = 8^3 + 7^3 + 6^3 +$$
$$+ \ldots 1^3 = \left(\frac{8 \,.\, 9}{2}\right)^2 = 36^2 = 1296.$$

Opírajíce se o výsledek v Aritmetických hrách a zábavách odst. 12 (21. číslo této sbírky), ukažte, že všech rovnoběžnostěnů v této krychli jest

$$\left(\frac{8\,.\,9}{2}\right)^2 (8 + 7 + 6 + \ldots + 1) = \left(\frac{8\,.\,9}{2}\right)^3 = 36^3 = 46\,656.$$

Pro krychli o straně rovné $n$ jednotkám délky jest tudíž všech krychlí $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ a všech rovnoběžnostěnů $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$.

**C) Analytická geometrie.** Hráč běží po přímce rovnoběžné s delší stranou footballového hřiště, v kterém bodě své dráhy uvidí branku pod největším úhlem, takže — není-li jiných překážek — jest na místě, z něhož je možno nejlépe vstřeliti míč do branky? (Obr. 21.)



Obr. 21.

Brankou položme osu $x$ a branka nechť jest ohraničena body $(\pm \frac{1}{2}a, 0)$. Hráč ať se právě nalézá v bodě o souřadnicích $(x, y)$. Úhel $\omega$, pod nímž vidí branku, jest dán vztahem

$$\operatorname{tg}\omega = \left(\frac{y}{x - \frac{1}{2}a} - \frac{y}{x + \frac{1}{2}a}\right) : \left(1 + \frac{y^2}{x^2 - \frac{1}{4}a^2}\right) = \frac{ay}{x^2 + y^2 - \frac{1}{4}a^2};$$

i jest nalézti maximum tohoto úhlu při pevném $x$ a měnícím se $y$. Poslední rovnici přepišme do tvaru $y^2 - a \operatorname{cotg}\omega\, y + (x^2 - \frac{1}{4}a^2) = 0$; řešením dle $y$ obdržíme $y = \frac{1}{2}(a \operatorname{cotg}\omega \pm \sqrt{a^2 \operatorname{cotg}^2\omega - 4x^2 + a^2})$. Má-li nastati extrémní hodnota, musí diskriminant této rovnice býti roven nule $a^2 \operatorname{cotg}^2\omega - 4x^2 + a^2 = 0$, takže extrémní hodnota jest $\operatorname{tg}\omega = \frac{a}{\sqrt{4x^2 - a^2}}$; jak z úlohy jest patrno, jest to maximum.

Dosadíme-li do základní rovnice, obdržíme

$$\frac{a}{\sqrt{4x^2 - a^2}} = \frac{ay}{x^2 + y^2 - \frac{1}{4}a^2},$$

a po dalších úpravách

$$(x^2 + y^2 - \tfrac{1}{4}a^2)^2 = (4x^2 - a^2)y^2; \quad (x^2 - y^2 - \tfrac{1}{4}a^2)^2 = 0$$

čili

$$x^2 - y^2 = \tfrac{1}{4}a^2,$$

což jest rovnoosá hyperbola, mající vrcholy v koncových bodech branky. Běží-li tedy hráč po přímce $x = c$, uvidí branku pod největším úhlem v průsečíku této přímky s vypočtenou rovnoosou hyperbolou. Proč úloha nemá smyslu, když $-\frac{1}{2}a \leqq x \leqq \frac{1}{2}a$?

**D) Sférická trigonometrie.** a) Uvažujeme dvě místa na zeměkouli, jejich zeměpisné šířky buďtež $\varphi_1, \varphi_2$ a délky $d_1, d_2$. Kdy vychází v obou těchto místech slunce současně? Polovina denního slunečního oblouku $\tau$ jest dána vzorcem:

$$\cos\tau = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta.$$

(*Vojtěch*, Geometrie pro VI. tř. šk. stř., IV. vyd., str. 134), kdež $\delta$ jest sluneční deklinace (viz Hvězdářskou ročenku), $\varphi$ zeměpisná šířka. Pro daná dvě místa jest

$$\cos\tau_1 = -\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\delta, \quad \cos\tau_2 = -\operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\delta;$$

slunce tedy vychází $\frac{1}{15}\tau_1$ resp. $\frac{1}{15}\tau_2$ hodin před polednem místního času. Nesmíme však zapomenouti na různost těchto místních časů, takže podmínka pro současný východ slunce jest

$$\tfrac{1}{15}(\tau_1 - \tau_2) = \tfrac{1}{15}(d_1 - d_2).$$

Dále jest

$$\cos(\tau_1 - \tau_2) = \cos\tau_1 \cos\tau_2 + \sin\tau_1 \sin\tau_2,$$

čili

$$\cos(d_1 - d_2) = \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}^2\delta + \\ + \sqrt{(1 - \operatorname{tg}^2\varphi_1 \operatorname{tg}^2\delta)(1 - \operatorname{tg}^2\varphi_2 \operatorname{tg}^2\delta)};$$

další úpravy dávají

$$\cos(d_1 - d_2) - \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}^2\delta =$$
$$= \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\delta(\operatorname{tg}^2\varphi_1 + \operatorname{tg}^2\varphi_2) + \operatorname{tg}^2\varphi_1 \operatorname{tg}^2\varphi_2 \operatorname{tg}^4\delta},$$

umocněním a dalším zjednodušením obdržíme

$$\sin^2(d_1 - d_2) = \operatorname{tg}^2\delta\,[\operatorname{tg}^2\varphi_1 - 2\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \cos(d_1 - d_2) +$$
$$+ \operatorname{tg}^2\varphi_2]$$

a odsud posléze

$$\operatorname{tg}\delta = \pm \frac{\sin(d_1 - d_2)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi_1 - 2\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \cos(d_1 - d_2) + \operatorname{tg}^2\varphi_2}}.$$

Bližší rozbor udává toto pravidlo pro volbu znaménka: Leží-li jižnější místo východněji (západněji) než severní, jest $\delta$ severní (jižní) a $\operatorname{tg}\delta$ jest kladné (záporné). Současný východ slunce nastane pak pro daná místa (nastane-li vůbec) dvakráte do roka.

Určete tyto dny pomocí Hvězdářské ročenky pro dvojice míst daných zeměpisnými souřadnicemi: Praha š. 50° 05′, v. d. 14° 25′, Řím 41° 54′, v. d. 13°, Madrid š. 40° 24′, z. d. 3° 41′.

Pišme stručněji $d_1 - d_2 = d$; tažme se, pro která místa řešení skutečně existuje. Vzorec pro $\operatorname{tg}\delta$ upravme na kvadratickou rovnici:

$$\operatorname{tg}^2\varphi_2 - 2\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \cos d + \operatorname{tg}^2\varphi_1 - \sin^2 d \operatorname{cotg}^2\delta = 0.$$

Jest nutno, aby měla reálná řešení a o jejím diskriminantě tedy musí platit

$$\operatorname{tg}^2\varphi_1 \cos^2 d - \operatorname{tg}^2\varphi_1 + \sin^2 d \operatorname{ctg}^2\delta = \sin^2 d\,(\operatorname{cotg}^2\delta -$$
$$- \operatorname{tg}^2\varphi_1) \geqq 0,$$

z týchž důvodů musí býti i

$$\operatorname{cotg}^2\delta - \operatorname{tg}^2\varphi_2 \geqq 0.$$

Omezme se na případ, kdy obě místa leží současně na severní nebo jižní polokouli, pak jest

$$\operatorname{cotg}^4\delta - \operatorname{tg}^2\varphi_1 \operatorname{tg}^2\varphi_2 \geqq 0$$

nebo též

$$(\operatorname{cotg}^2 \delta - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2)(\operatorname{cotg}^2 \delta + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2) \geqq 0$$

a poněvadž druhý z činitelů jest kladný:

$$\operatorname{cotg}^2 \delta - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 \geqq 0.$$

Do naší kvadratické rovnice zaveďme $\sin^2 d = 1 - \cos^2 d$; tak obdržíme kvadratickou rovnici pro $\cos d$:

$$\operatorname{cotg}^2 \delta \cos^2 d - 2 \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 \cos d + \operatorname{tg}^2 \varphi_1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2 - \\ - \operatorname{cotg}^2 \delta = 0.$$

Má-li i tato míti reálné kořeny, musí její diskriminant, jejž lze psáti ve tvaru $(\operatorname{tg}^2 \varphi_1 - \operatorname{cotg}^2 \delta)(\operatorname{tg}^2 \varphi_2 - \operatorname{cotg}^2 \delta)$ býti větší nebo roven nule. Tomu tak skutečně dle předchozích výkladů jest. Avšak to ještě nestačí, aby naše úloha měla řešení: podmínkou nutnou dále jest, aby poslední kvadratická rovnice měla aspoň jeden kořen absolutní hodnotou rovný nebo menší než jedna. Věta *Budan Fourierova* (viz autorovo *Numerické řešení rovnic*, této sbírky č. 27, odst. 4) pro kvadratické rovnice $ax^2 - 2bx + c = 0$, $a > 0$, $b > 0$ zní takto: Kvadratická rovnice má v intervalu 0,1 tolik kořenů, o kolik se zmenší počet měn v posloupnosti $a - 2b + c$, $a - b$, $a$ u srovnání se změnami v posloupnosti $c$, $-2b$, $a$. V našem případě jest

$$a - 2b + c = (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2)^2 > 0, \; a - b = \operatorname{cotg}^2 \delta - \\ - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 \geqq 0, \; a > 0,$$

není tedy žádné změny znamének, to znamená, že kvadratická rovnice pro $\cos d$ má za předpokladu $\operatorname{cotg}^2 \delta - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 > 0$ buď jeden nebo dva kořeny v intervalu (0; 1) dle toho, zda $\operatorname{tg}^2 \varphi_1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2 \lesseqgtr \operatorname{cotg}^2 \delta$.

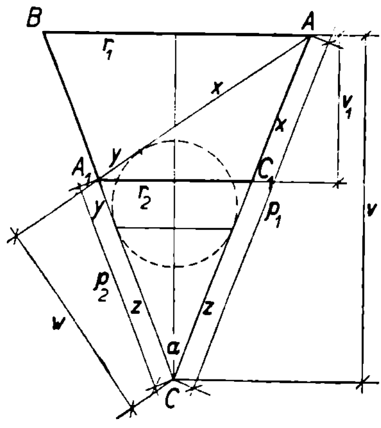
Ukažte, užívajíce obratů obvyklých při úpravě trigonometrických vzorců, že hranice stínu protíná rovník v délce $d_3$ dané vzorcem

$$\operatorname{tg}\left(\frac{d_1 + d_2}{2} - d_3\right) = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 + \varphi_1)} \operatorname{tg} \frac{d_1 - d_2}{2}.$$

Je-li $d_1 = d_2$, platí o $\tau_1, \tau_2$ vztah $\cos^2 \tau_1 + \cos^2 \tau_2 = 1$, t. j. buď $\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}\pi$ nebo $\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}3\pi$.

b) Velmi často k určení severojižního směru se udává tento pokyn: Menší ručičku hodin s dvanáctinným dělením otoč k slunci, symetrála úhlu určeného hodinovou ručičkou a dvanáctou hodinou určuje hledaný směr. Důkaz toho se neuvádívá, ač jest velmi jednoduchý. Uvažujme nejprve hodinky s ciferníkem o 24 hodinách. Zacílím-li o půlnoci obě rafie směrem severojižním, ukazují směr, kde se slunce právě nalézá. Poněvadž hodinová ručička obejde ciferník jednou za 24 hodiny a rovněž slunce svoji zdánlivou pouť kolem země vykoná za tutéž dobu, ukazuje na ciferníku 0-tá hodina, směřuje-li hodinová ručička k slunci, severojižní směr. Důkaz pro dělení ciferníku ve dvanáct dílů jest nyní nasnadě: hodinová ručička takovýchto hodin se pohybuje dvakráte rychleji.

**E) Deskriptivní geometrie.** a) Protíná-li rovina všechny povrchové přímky rotační kuželové plochy, vytíná na této ploše elipsu. Kuželová plocha se rozpadá tak ve dvě části; o koulích vepsaných (i v případech obecnějších) platí věta *Queteletova-Dandelinova*, pravící, že tyto koule se roviny této elipsy dotýkají v jejích ohniskách. (*Vojtěch*, Geometrie pro VII. tř., IV. vydání, str. 99; *Ingriš-Klíma*, Deskr. geometrie pro VI. a VII. tř. r. g., str. 118). Této věty užijeme k rozřešení úlohy: Číše má tvar komolého kužele obráceného menší podstavou ke stopce. Číši jsem dopil do té míry, že se právě začíná ukazovat dno. Jak jest




Obr. 22.

veliký zbytek v číši a ve které výšce se ustálí kapalina, postavím-li číši opět na stůl?

Budiž $\overline{AA_1} = 2a$ velká osa elipsy, největší a nejmenší površka budiž $p_1$ a $p_2$; dle označení v obrázku jest $x + y = 2a$, $y + z = p_2$, $z + x = p_1$; známým obratem vypočteme z těchto rovnic $x = a + \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$, a poněvadž též dle věty *Queteletovy-Dandelinovy* jest $x - a = e$, kdež $e$ jest výstřednost elipsy, jest $e = \frac{1}{2}(p_1 - p_2) = \sqrt{a^2 - b^2}$. Tuto rovnici pišme ve tvaru $4(a^2 - b^2) = (p_1 - p_2)^2$ a uvažme, že platí dle věty *Carnotovy* (kosinové) $4a^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos\alpha$. Z těchto rovnic plyne

$$4b^2 = 2p_1p_2(1 - \cos\alpha) = 4p_1p_2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = 4p_1p_2 \frac{r_1^2}{p_1^2} =$$

$$= 4r_1 \frac{p_2r_1}{p_1} = 4r_1 r_2,$$

takže $b^2 = r_1r_2$; a dále $4a^2 = (r_1 + r_2)^2 + v_1^2$. Vypočteme nyní krychlový obsah $K_1$ kužele, jehož osový řez jest $AA_1C$; i jest

$$K_1 = \tfrac{1}{3}\pi\, abw = \frac{\pi baw}{3} = \frac{\pi bp_1p_2 \sin\alpha}{6} =$$

$$= \frac{\pi bp_1p_2 \,.\, 2\sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha}{6} = \frac{\pi bp_1p_2}{3} \cdot \frac{r_1}{p_1} \cdot \frac{v}{p_1} = \tfrac{1}{3}b\pi \cdot \frac{p_2r_1}{p_1} \,.$$

$$.\, v = \frac{\pi br_2v}{3} = \tfrac{1}{3}\pi br_2 \cdot \frac{v_1r_1}{r_1 - r_2} = \tfrac{1}{3}\pi \frac{\sqrt{r_1r_2}\, r_1r_2v_1}{r_1 - r_2} = \frac{\pi v_1}{3} \frac{(r_1r_2)^{\frac{3}{2}}}{r_1 - r_2};$$

při tom jsme $v$ nahradili veličinou $v_1$ dle vztahu

$$v : (v - v_1) = r_1 : r_2.$$

Část kužele o osovém řezu $ABA_1$ má krychlový obsah

$$K_2 = \tfrac{1}{3}\pi r_1^2 v - \tfrac{1}{3}\pi v_1 \frac{(r_1r_2)^{\frac{3}{2}}}{r_1 - r_2} = \frac{\pi v_1}{3}\left(\frac{r_1^3}{r_1 - r_2} - \frac{(r_1r_2)^{\frac{3}{2}}}{r_1 - r_2}\right) =$$

$$= \frac{\pi v_1 r_1^{\frac{3}{2}} (r_1^{\frac{3}{2}} - r_2^{\frac{3}{2}})}{3(r_1 - r_2)};$$

část kužele o osovém řezu $AA_1C_1$ má krychlový obsah

$$K_3 = \frac{\pi v_1}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) - K_2 = \frac{\pi v_1}{3}\left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1 - r_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{r_1^3}{r_1 - r_2} + \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{r_1 - r_2}\right) = \frac{\pi v_1 r_2^{\frac{3}{2}} (r_1^{\frac{3}{2}} - r_2^{\frac{3}{2}})}{3(r_1 - r_2)}.$$

Elipsa tedy dělí komolý kužel v poměru $K_2 : K_3 = r_1^{\frac{3}{2}} : r_2^{\frac{3}{2}}$. Naleji-li nyní množství $K_3$ do číšky, vytvoří komolý kužel o podstavách s poloměry $r_2$, $r_3 > r_2$ a o výšce $v_3$; i jest

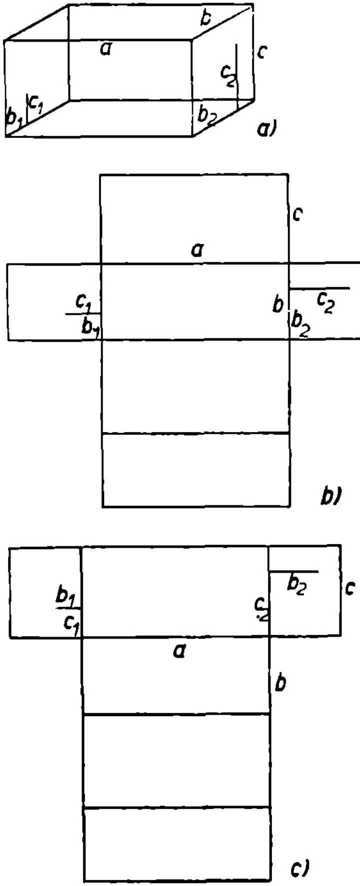
$$\frac{\pi v_1 ((r_1 r_2)^{\frac{3}{2}} - r_2^3)}{3(r_1 - r_2)} = \frac{\pi v_3 (r_3^3 - r_2^3)}{3(r_3 - r_2)}.$$

Osový řez komolým kuželem jest rovnoramenný lichoběžník; snadno z jeho vlastností odvodíme $v_1 : (r_1 - r_2) = v_3 : (r_3 - r_2)$, takže $(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}} = r_3^3$ čili $r_3 = \sqrt{r_1 r_2}$, což jest délka vedlejší poloosy oné elipsy; posléze jest

$$v_3 = \frac{r_3 - r_2}{r_1 - r_2} \cdot v_1 = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} \cdot v_1.$$

b) Síť šesti obdélníků, z nichž lze složiti kvádr, jest čtenáři jistě známá; jest více takových sítí? Zvolme si libovolnou stěnu za podstavu; tu a protější stěnu lze k rozvinutému plášti připojiti celkem 4kráte čtyřmi, t. j. 16 způsoby; existuje tedy celkem $16 \cdot 6 = 96$ sítí, ovšem, že některé se mezi sebou nepodstatně liší. Řešme tuto úlohu: Jakou nejkratší cestou se dostane pavouk k mouše lezoucí po protější straně místnosti, jsou-li příslušné údaje dány obrazcem 23?

Předepišme cestu buď po podlaze nebo po stropu a rozviňme plášť rovnoběžnostěnu tak, že stěny, na nichž se pavouk a moucha nalézá, přiléhají k podlaze (23b.) Cesta pak jest dána přímkou spojující oba body a přímou zůstane, i když ze sítě složíme znovu rovnoběžnostěn. Délka této přímé cesty vykonané přes podlahu jest $d_1^2 = (a + c_1 + c_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$, cesty pak vykonané přes strop $(a + c - c_1 + c - c_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$. Když jest $c_1 + c_2 \lesseqgtr c$, jest i $d_1 \lesseqgtr d_2$.



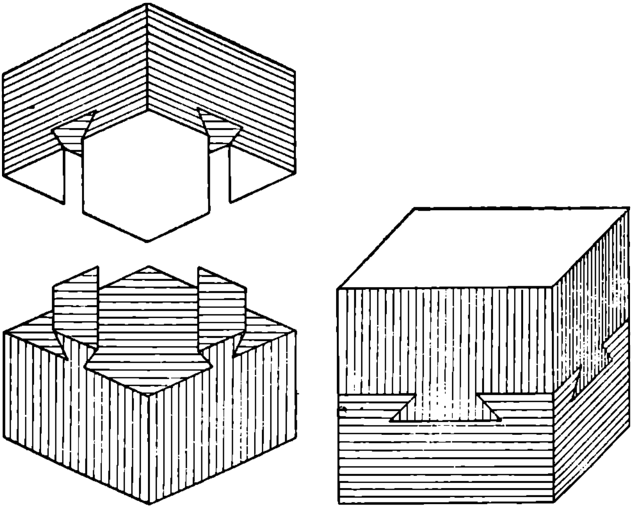

Obr. 23.

Nelze však říci, že by to byla cesta nejkratší, poněvadž, jak jsme ukázali, lze rovnoběžnostěn do sítě rozvinouti i jinými způsoby. A jsou-li údaje dány obecně, nelze obecně nejkratší cestu stanoviti, to se nám podaří jen pro údaje v číslech zvláštních. Rozvineme-li na př. rovnoběžnostěn, že stěny s pavoukem a mouchou připojíme k přední stěně (myšleno s hlediska divákova), viz obr. 23c, jest délka přímé cesty $d_3^2 = (a + b_1 + b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2$, resp. $d_4^2 = (a + b - b_1 + b - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2$ a opět jest $d_3 \lesseqgtr d_4$ dle toho, zda $b_1 + b_2 \lesseqgtr b$.

Zabývejte se podrobněji případem, kdy moucha a pavouk jsou v koncových bodech tělesné úhlopříčky!

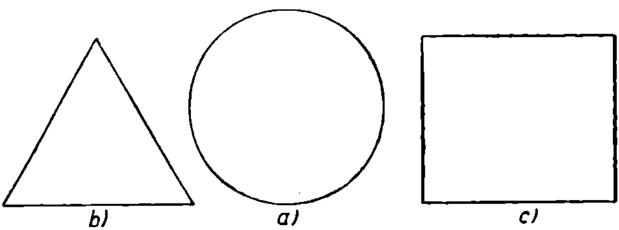
c) Jest možno krychli protnouti rovinou tak, aby vznikl řezem pravidelný šestiúhelník? Ano, jest to rovina určená středem krychle a půlícími body dvou sousedních hran, jejichž spojnice jest tedy strana tohoto šestiúhelníka.

d) Dle obr. 24 sestrojte si krychlovou krabici; nesnadno otevře ji ten, jenž jest zvyklý otvírati krabice tohoto tvaru pohybem rovnoběžným s hranami krychle.



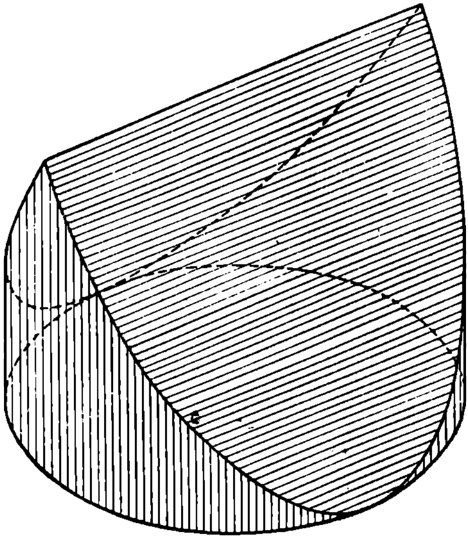
Obr. 24.

e) Existuje těleso, jež by bylo možno přesně prostrčiti všemi třemi otvory naznačenými v obr. 25? Ano, pokládejte obrysy otvorů za půdorys, nárys a bokorys tohoto tělesa, jež jest vyznačeno v obr. 25d.



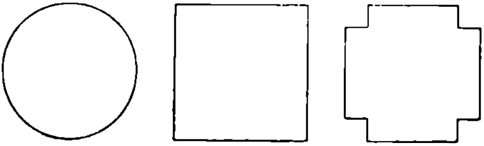

Obr. 25.

Pokuste se určiti těleso, jež může projíti třemi otvory naznačenými v obr. 26 nebo 27.



Obr. 25d.

f) Avšak ani geometrické rýsování, tento věrný a nerozlučný druh deskriptivní geometrie, nepřijde v tomto odstavci zkrátka. Jest vyplniti celou rovinu pravidelnými mnohoúhelníky jednoho, dvou, tří i více druhů. Vnitřní úhel pravidelného $n$-úhelníka jest $\frac{n-2}{n} \cdot 2R$. Máme-li tedy rovinu zaplniti jedním a týmž mnohoúhelníkem, musí býti plný úhel čili $4R$ dělitelen $\frac{n-2}{n} \cdot 2R$, t. j. musí býti $\frac{2n}{n-2}$ číslo celistvé. To jest však možno jen pro $n = 3, 4, 6$. Tedy rovinu lze vyplniti (též se říká parketovati, pokrýti mosaikou) rovnostrannými trojúhelníky, jichž v každém vrcholu se stýká šest, nebo čtverci v počtu po čtyřech, nebo posléze šestiúhelníky a to po třech. Grafické provedení této mosaiky jest snadné a tvoří pěkné cvičení geometrického rýsování.



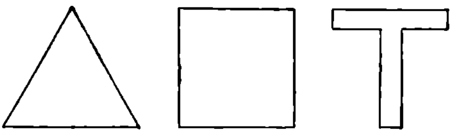
Obr. 26.

Jest možno, aby se vždy ve vrcholu stýkalo $x$ trojúhelníků, $y$ čtverců a $z$ šestiúhelníků? Pak musí platiti

$$60x + 90y + 120z = 360,$$

čili

$$2x + 3y + 4z = 12.$$



Obr. 27.

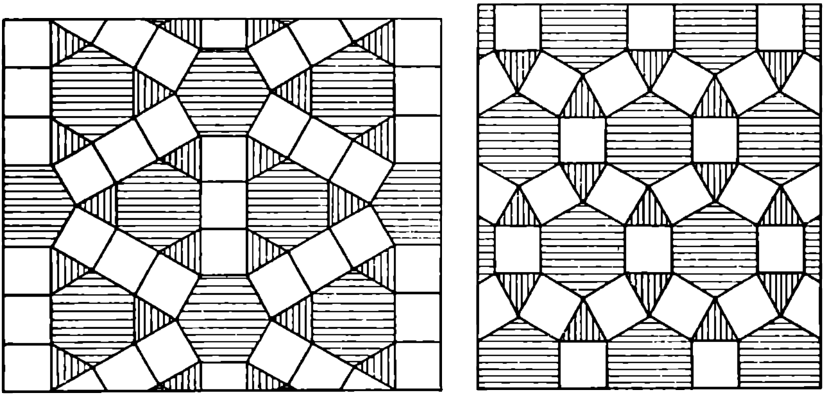
To jest rovnice neurčitá a její celistvá kladná řešení jsou:

$x=0,\ y=0,\ z=3;\quad x=0,\ y=4,\ z=0;\quad x=1,\ y=2,\ z=1;$
$x=2,\ y=0,\ z=2;\quad x=3,\ y=2,\ z=0;\quad x=4,\ y=0,\ z=1;$
$x=6,\ y=0,\ z=0.$

Jak patrno, jsou v této tabulce obsaženy všechny mosaiky, jež lze z trojúhelníků, čtverců a šestiúhelníků sestaviti. Nejsložitější případ jest $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$, t. j. kombinace trojúhelníka, dvou čtverců a šestiúhelníka; ve dvou různých provedeních jest vyznačena v obr. 28.

Uvažovali jsme dosud nejjednodušší mnohoúhelníky, zkusme, je-li možno mosaiku sestaviti z mnohoúhelníků o počtu stran $n_1$, $n_2$, $n_3$, jichž vnitřní úhly jsou

$$\frac{n_1-2}{n_1}2R,\quad \frac{n_2-2}{n_2}2R,\quad \frac{n_3-2}{n_3}2R.$$



Obr. 28.

Musí pak býti

$$\frac{n_1-2}{n_1}\,.\,2R+\frac{n_2-2}{n_2}\,.\,2R+\frac{n_3-2}{n_3}\,.\,2R=4R,$$

čili

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\tfrac{1}{2}.$$

To jest rovnice neurčitá, jedno z jejích řešení nalezneme takto: Poněvadž jest $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, jest $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$; hoví tedy naší rovnici $n_1=4$, $n_2=6$, $n_3=12$, t. j. mosaiku lze vytvořiti i ze čtverce, šesti- a dvanáctiúhelníka. Jsou však i jiná řešení, na př. $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $n_3 = 20$.

K řešení této úlohy lze užíti i mnohoúhelníků polopravidelných, tak na př. obdélníky dávají vznik obrazcům kladeným z parket na podlahu, obrazcům z cihel ve zdi; lze užíti i deltoidů i některých prvků odvozených z kruhu.

O souvislosti os symetrie bohatě členěných ornamentů (zejména orientálních) s grupami geometrických transformací viz Speiser: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (1. vyd. 1927), str. 77-96.