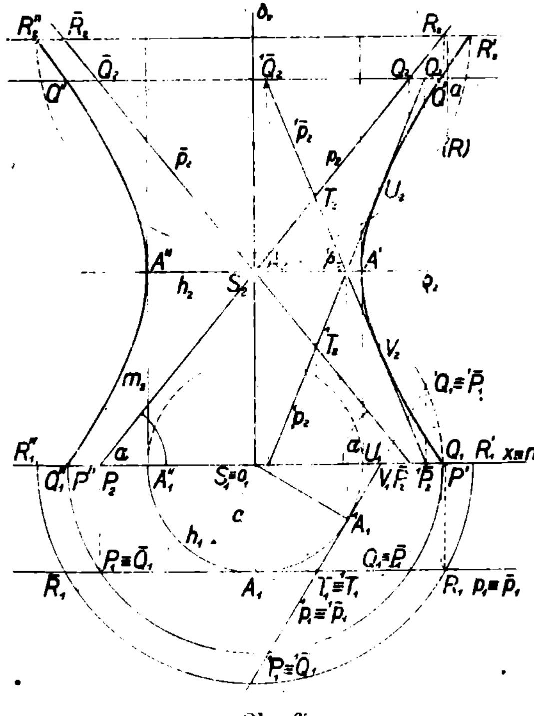
4. Rotační jednodílný hyperboloid. Zvolme tuto technicky důležitou plochu východiskem k úvahám o plochách zborcených.



Obr. 6.

Vzniká otáčením hyperboly kolem vedlejší osy. Vytvoříme ji nejdříve jako plochu přímkovou a ukážeme, že jejím poledníkem je hyperbola, jež má svou vedlejší osu v rotační ose plochy. Zvolíme osu o rotační plochy ve svislé poloze v druhé průmětně (obr. 6) a otáčíme kolem ní přímku p s osou o mimoběžnou, jež zvolena v poloze průčelné rovnoběžně s nárysnou. Pak nejkratší příčka $a \equiv SA$ mimoběžek o a p je v ordinále osy a jeví se ve skutečné velikosti v první průmětně, s níž je rovnoběžna. Bod A vytvořuje nejmenší kružnici rotační plochy o poloměru a, její hrdlo h. Otočením bodu do poloh A', A'' do druhé průmětny, v níž leží hlavní poledník plochy, obdržíme osu souměrnosti $A'A''$ tohoto poledníku, hlavní osu hyperboly m o středu S. V obr. vyznačeny ještě shodné rovnoběžky stopníku P a bodu Q otáčející se přímky, kde $\overline{AP} = \overline{AQ}$ a rovnoběžka libovolného bodu R v rovinách rovnoběžných s půdorysnou a vytčeny na nich opět body $P'P''$, $Q'Q''$ a $R'R''$ hlavního poledníku; rovina ϱ hrdlové rovnoběžky je rovinou souměrnosti plochy.

Jest patrno, že vytvořená plocha je přímková, daná soustavou tvořících přímek vzniklých otáčením přímky p; je zborcenou, protože při rotaci každé dvě polohy přímky se neprotínají.

Zvolíme-li ještě druhou přímku $\bar{p}$ souměrně sdruženou s přímkou p podle roviny poledníku kolmého k nárysně, $\bar{p}_1 \equiv p_1$, oba nárysy $\bar{p}_2$ a p_2 jsou souměrně sdružené podle osy o (obě přímky mají tutéž odchylku od půdorysny α, jež jeví se v nárysu), je patrno, že její rotací kolem osy o vzniká táž plocha rotační, která má tedy dvě soustavy povrchových přímek.

Konstrukce bodů R' a R'' ukazuje, že poledník plochy je vskutku hyperbola, která má přímky p_2 a $\bar{p}_2$ za asymptoty. Připojíme-li ještě půdorys rovnoběžky bodu R k jejímu nárysu i se sklopeným (R), je patrno, že $\overline{R_2R_2'} \cdot \overline{\bar{R}_2R_2''} = \overline{\bar{R}_2R_2'} \cdot \overline{R_2R_2''} = \overline{R_2(R)}^2 = a^2$ a podle věty, že na kolmicích k vedlejší ose hyperboly součin vzdáleností bodu hyperboly od průsečíků kolmice s oběma asymptotami je stálý a roven čtverci hlavní poloosy, je jasno, že meridiánem této rotační plochy je tedy hyperbola.

Vytkněme dvě libovolné přímky různých soustav p a ${}^1\overline{p}$, jedna prochází bodem A a druhá bodem ${}^1A$ hrdlové kružnice. Obě přímky majíce tutéž odchylku od půdorysny a za své půdorysy tečny půdorysu h_1 hrdlové rovnoběžky přikazují průsečíku T_1 svých půdorysů tutéž kótu z_T nad rovinou ϱ, přímky se protínají. Tedy:

Rotační jednodílný hyperboloid je zborcenou plochou o dvou soustavách povrchových přímek. Přímky téže soustavy jsou vzájemně mimoběžné, každé dvě přímky různých soustav se protínají.

Existence druhé soustavy povrchových přímek vyplývá též ze souměrnosti plochy podle roviny hrdlové rovnoběžky.

Že přímky p a ${}^1\overline{p}$ jsou různoběžny je patrno z okolnosti, že spojnice jejich průsečíků s dvěma vodorovnými rovinami jsou vzájemně rovnoběžny a tedy půdorysné hlavní přímky společné roviny, $A^1A \parallel Q^1\overline{Q}$. Patrně také přímky $\overline{p}$ a ${}^1p$ mají společný bod ${}^1T$, kde ${}^1T_1 \equiv T_1$.

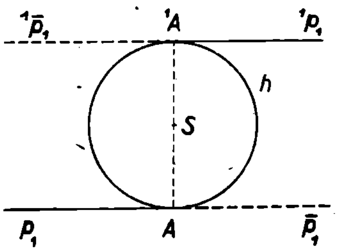
Protože každým bodem na ploše probíhají dvě povrchové přímky, je patrno:

Tečná rovina v libovolném bodě rotačního jednodílného hyperboloidu je určena oběma povrchovými přímkami různých soustav bodem procházejícími.

Mění-li se na určité povrchové přímce bod, mění se i jeho tečná rovina. *Tečné roviny v bodech povrchové přímky tvoří rovinový svazek.*

Každým bodem A, ${}^1A$, ... hrdla h procházejí dvě povrchové přímky různých soustav ležící v téže půdorysně promítací rovině, i jest h skutečným a h_1 zdánlivým obrysem plochy vzhledem k půdorysně. Hlavní poledník m je současně skutečným i zdánlivým obrysem vzhledem k nárysně a je obalen nárysy povrchových přímek plochy, na př. druhé stopníky U a V přímek ${}^1p$ a ${}^1\overline{p}$ jsou dotykové body jejich nárysů s hlavním poledníkem a leží ovšem v téže ordinále.

Dvě povrchové přímky různých soustav sestrojené ve dvou protějších bodech hrdla (soustava nečárkovaná a soustava čárkovaná vytčeny v obr. 7 půdorysem na rovině hrdla) jsou vzájemně rovnoběžny a určují tečnou rovinu v dotykovém bodě úběžném, A^1A jest její první stopa, úhel α je odchylkou roviny od půdorysny; tato rovina se zove *asymptotickou tečnou rovinou.*



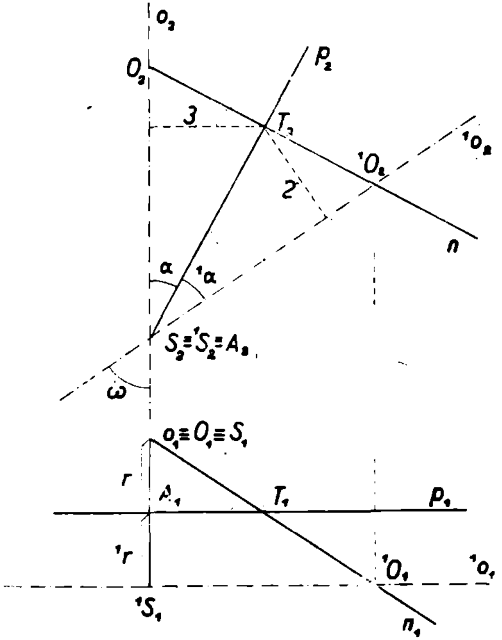
Obr. 7.

Souhrn asymptotických tečných rovin jednodílného rotačního hyperboloidu obaluje rotační kuželovou plochu asymptotickou, která vzniká rotací poledníkové asymptoty spolu s poledníkem; jest s hyperboloidem soustředná a jest jeho řídící kuželovou plochou, majíc povrchové přímky rovnoběžné s přímkami hyperboloidu.

5. Dotykové hyperboloidy. Dvou dotykových rotačních hyperboloidů jednodílných se užívá, aby se *rotace kolem určité osy převedla na rotaci kolem druhé osy, která je s první mimoběžnou.* Oba hyperboloidy dotýkají se postupně v bodech přiřaděných povrchových přímek. Úkol se řeší *ozubením prostorovým* čili *hyperboloidickým* ovšem úvahami kinematické geometrie; je možný, je-li poměr rychlostí rotačních pohybů stálý. Zde nám jde o řešení dotykového problému.

Je třeba sestrojiti nejkratší příčku obou vzájemně mimoběžných rotačních os o a ^1o. V obr. 8 zvolíme osu o v svislé poloze v nárysně a druhou osu ^1o v průčelné poloze skloněné k půdorysně, odchylka ω obou rotačních os se jeví v nárysně. Nejkratší příčka S^1S obou os je kolmá k nárysně a jeví se ve skutečné velikosti v půdorysně, $S_1{}^1S_1 \perp {}^1o_1$.

Přímka p, která vyhoví podmínce, že vytvoří oba rotační hyperboloidy tak, že se v jejích bodech oba hyperboloidy postupně vzájemně dotýkají, protíná kolmo nejkratší příčku obou rotačních os v bodě A a je rovnoběžna s nárysnou; její nárys p_2 prochází průsečíkem nárysů obou rotačních os a vyhovuje kinetické podmínce, že poměr $\sin \alpha : \sin {}^1\alpha$ úhlů, které svírá s nárysy obou os, je roven obrácenému poměru rychlostí obou rotací (na př. tento poměr je $2 : 3$).



Obr. 8.

Abychom sestrojili půdorys p_1 této povrchové přímky, zvolíme na přímce bod T a v něm sestrojíme společnou normálu n obou ploch; protože přímka p je rovnoběžna s nárysnou, jest $n_2 \perp p_2$; normála protíná osy v bodech O a ${}^1O$, z jejich nárysů odvodíme půdorys $n_1 \equiv O_1{}^1O_1$ a na něm půdorys T_1 ze zvoleného nárysu; $p_1 \parallel {}^1o_1$.

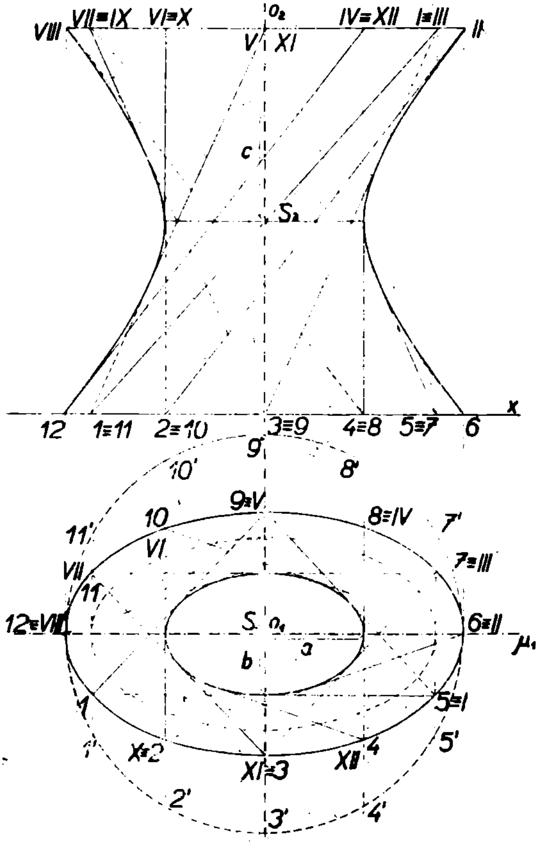
Bodem A procházejí hrdlové kružnice obou rotačních hyperboloidů, společná jejich tečná rovina v tomto bodě je rovnoběžna s nárysnou. Tečná rovina v bodě T je kolmá k normále n.

Poměr poloměrů r a ${}^1r$ hrdelních kružnic je $r : {}^1r = \overline{O_1T_1} : {}^1\overline{O_1T_1} = \overline{O_2T_2} : {}^1\overline{O_2T_2} = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} {}^1\alpha$.

Poměr 2 : 3 rychlostí obou rotací hyperboloidů určí poměr $\sin \alpha : \sin {}^1\alpha = 3 : 2$ a tím polohu a celou konstrukci hyperboloidů. Poměr 2 : 3 určuje, že dvěma otočkám hyperboloidu s osou o odpovídají tři otočky hyperboloidu s osou ${}^1o$; podle toho lze určiti povrchové přímky, jichž splynutí při pohybu nastane.

Při konstrukci hyperboloidického ozubení spojují se osy s pomocnými plochami zubními, jichž dotykovým záběrem nastává převod; jedna plocha se zvolí, druhá vznikne při kotálecím pohybu obou hyperboloidů.

6. Zborcený hyperboloid. Z jednodílného rotačního hyperboloidu dospíváme prostorovou afinitou k obecnější zborcené ploše. Zvolíme na př. rovinu μ (obr. 9) hlavního poledníku rotačního hyperboloidu s osou o kolmou k půdorysně za samodružnou rovinu afinní příbuznosti a redukujeme vzdálenosti bodů rotačního hyperboloidu od této roviny (souřadnice y nebo jejich rozdíly) podle jisté charakteristiky, na př. v poměru 3 : 2. Ve vodorovných rovinách obdržíme tímto afinním vztahem homotetické elipsy s týmž poměrem poloos, dvěma soustavám povrchových přímek (v obr. stejnoměrně rozděleným) jsou afinně přiřaděny opět dvě soustavy povrchových přímek. Vlastnosti obou soustav povrchových přímek i tečných rovin zůstávají v platnosti. Vzniklá plocha je *zborcený hyperboloid*. Je patrno, že má střed, tři osy tvořící ve středu pravoúhlý trojhran (a rovnoběžné při vytknuté poloze hyperboloidu a roviny samodružné s osami souřadnicovými) a tři roviny souměrnosti, určené těmito osami; je to rovina samodružná, rovina rovnoběžná se stranorysnou a rovina rovnoběžná s půdorysnou. První dvě roviny souměrnosti odpovídají vzájemně kolmým rovinám poledníků a protínají hyperboloid v hlavních hyperbolách o společné ve-



Obr. 9.

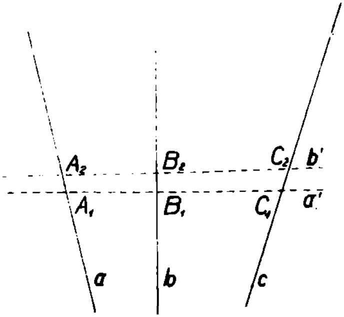
dlejší ose, třetí odpovídá rovině hrdlové rovnoběžky a protíná plochu v hlavní elipse, jejíž osy se rovnají hlavním osám obou hyperbol. Hlavní elipsa zove se také hrdlem a jest nejmenší ze všech řezů s ní rovnoběžných.

V průmětech vytčena jedna soustava povrchových přímek s příslušnou viditelností. Kdybychom vytkli obě soustavy, odpadlo by tečkování neviditelných částí.

Také řídící kuželová plocha daného rotačního hyperboloidu transformovala by se v kuželovou řídící plochu zborceného hyperboloidu s řídící elipsou v půdorysně, jež v obr. sestrojena jako homotetická elipsa k horizontálním řezům zborceného hyperboloidu. Jest to asymptotická kuželová plocha zborceného hyperboloidu, obalená jeho asymptotickými tečnými rovinami.

Zevšeobecněním rotačního hyperboloidu nabývají přímky téže soustavy obecné polohy, jedna neplyne z druhé rotací kolem osy. V obou případech jsou ovšem *přímky druhé soustavy dány jako příčky tří libovolných vzájemně mimoběžných přímek první soustavy.*

Buďtež dány tři přímky a, b a c (*řídicí přímky*) vzájemně mimoběžné jedné soustavy (nečárkované) a hledejme přímky a', b', c', ... druhé soustavy (čárkované) jako jejich transversály. Body jedné mimoběžky a sestrojujeme příčky druhých dvou b a c; stane se tak průsečnicemi dvou rovin položených zvoleným bodem a každou z druhých mimoběžek b a c.



Obr. 10.

Duální konstrukce: Mimoběžkou a položíme rovinový svazek a sestrojíme průsečíky každé roviny s mimoběžkami b a c; jejich spojnice jsou hledané příčky.

Obdržíme tak celou soustavu tvořících přímek, čili *zborcený svazek*, někdy nazývaný také *regulus*. Libovolné dvě přímky čárkované soustavy jsou vzájemně mimoběžny. Kdyby byly různoběžné, určovaly by rovinu, v níž by ležely i řídící přímky plochy, což odporuje její definici; tedy každé dvě přímky zborceného svazku jsou vzájemně mimoběžny (obr. 10).

Pomocné rovinové svazky o osách b a c jsou perspektivní s bodovou řadou na ose a jako její zory a jsou tedy vzájemně projektivní:

Plocha zborceného hyperboloidu (zborcený svazek [regulus] na ní) se vytvořuje průsečnicemi rovinových družin projektivních rovinových svazků.

Jejich osy zvolíme ve dvou daných řídících přímkách, družiny rovin procházejí body třetí řídicí přímky.

Duální konstrukcí jest rovinový svazek o ose a perspektivní s jeho řezy, bodovými řadami na b a c, které jsou vzájemně projektivní.

Plocha zborceného hyperboloidu (zborcený svazek [regulus] na ní) se vytvořuje spojnicemi bodových družin dvou projektivních bodových řad.

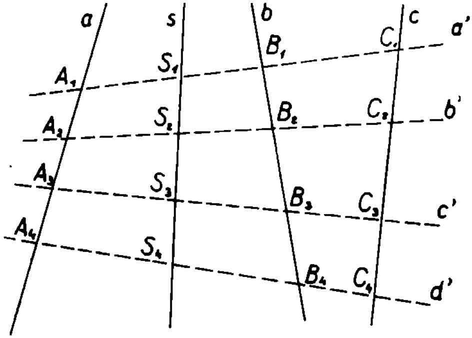
Osy obou řad zvolíme ve dvou daných řídicích přímkách, spojnice bodových družin protínají třetí řídicí přímku.

Jsou-li dány tři přímky a, b, c vzájemně mimoběžné a sestrojíme-li tři jejich příčky a', b', c' zborceného svazku, lze vytvořiti zborcený hyperboloid obráceně příčkami přímek a', b', c'; mezi ně patří i a, b, c (obr. 11). Oba hyperboloidy zborcených svazků mají šest povrchových přímek společných a splývají v jednu plochu, mající dvě soustavy povrchových přímek, tedy obsahující dva zborcené svazky. Přímky jedné soustavy protínají všechny přímky druhé soustavy a obráceně.

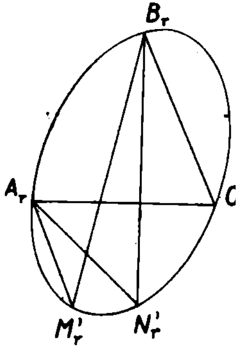
Ukážeme to projektivností: Na př. příčka s přímek a', b', c' protíná i $d', e', \ldots$ Neboť v soumístných a projektivních rovinových svazcích $s\,(A_1, A_2, A_3, \ldots) \barwedge s\,(B_1, B_2, B_3, \ldots)$ jsou tři družiny $(s, A_1) \equiv (s, B_1)$, $(s, A_2) \equiv (s, B_2)$, $(s, A_3) \equiv (s, B_3)$ samodružné a tedy všechny družiny, protože projektivnost jest určena jednoznačně třemi družinami; t. j. $(s, A_4) \doteq (s, B_4)$, s protíná A_4B_4, t. j. d' atd.

Patrně jest bodová řada na s projektivní s bodovými řadami na $a, b, c, \ldots$, protože je na př. řezem rovinového svazku $b\ (A_1, A_2, A_3, \ldots)$.

Platí tedy: *Jedna soustava povrchových přímek protíná druhou soustavu v projektivních řadách. Zorem jedné soustavy z přímek druhé soustavy jsou projektivní rovinové svazky.*



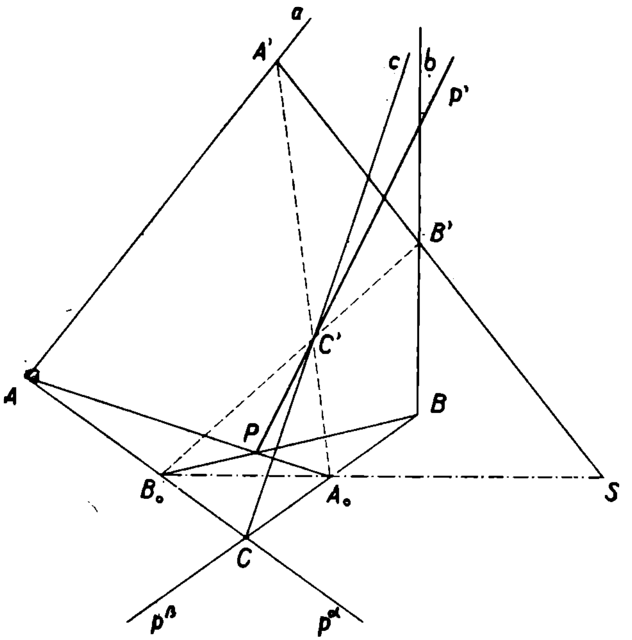
Obr. 11.



Obr. 12.

Rovinný průsek zborceného hyperboloidu jest kuželosečka. Myslíme-li si plochu vytvořenu dvěma vzájemně projektivními rovinovými svazky s osami a a b, protíná je libovolná rovina ϱ ve dvou vzájemně projektivních paprskových svazcích o vrcholech A_r a B_r na a a b, jež vytvořují průsečíky $M'_r, N'_r, O'_r, \ldots$ paprskových družin kuželosečku k, patrně rovinný řez plochy (obr. 12); body kuželosečky jsou průsečíky přímek $m', n', o', \ldots$ s rovinou ϱ. *Zborcený hyperboloid (a tedy i rotační hyperboloid jednodílný) je plochou druhého stupně, jelikož má s libovolnou rovinou průsečnou kuželosečku a tedy s libovolnou přímkou obecně dva průsečíky.*

Důkaz o rovinném průseku zborceného hyperboloidu lze provésti i bez projektivních rovinových svazků. Je-li zvolena plocha třemi mimoběžkami a, b, c a jejich průsečíky s libovolnou rovinou A, B, C (v obr. 13 vše libovolné), zvolme ještě průsečíky B' přímky b s rovinou $\alpha \equiv (A, c)$ a A' přímky a



Obr. 13.

s rovinou $\beta \equiv (B, c)$. Pokládáme-li rovinu řezu za půdorysnu, označíme $p^\alpha \equiv AC$ a $p^\beta \equiv BC$ jako stopy pomocných rovin.

Libovolným bodem C' na mimoběžce c sestrojme příčku mimoběžek a, b. Spojnice $B'C'$ má stopník B_0 na p^α, spojnice $A'C'$ má stopník A_0 na p^β. Pak roviny (C', a) a (C', b) mají stopy AA_0 a BB_0 a jejich průsečnice p' (hledaná přímka druhé soustavy) má stopník P v průsečíku těchto stop.

Patrně jest spojnice A_0B_0 středovým průmětem pevné spojnice $A'B'$ na půdorysnu ze středu C' a prochází tedy stále jejím stopníkem S, když C' probíhá přímku c. Sestrojování stopníku P jest však známou konstrukcí kuželosečky dané tečnami SA a SB s dotykovými body A a B a dalším bodem C. Průsečíkem tečen sestrojí se libovolný paprsek a jeho průsečíky s tětivami AC a BC se obráceně spojí s body B a A, čímž obdržíme další bod kuželosečky. Vskutku platí konstrukce pro kružnici, jsou-li obě tečny vzájemně rovnoběžné a AB tedy průměrem; středovým průmětem přechází konstrukce na kuželosečku.

Ježto rovinný průsek zborceného hyperboloidu je kuželosečka, má rovina, která prochází jednou jeho přímkou, s ním ještě druhou přímku společnou, patrně přímku druhé soustavy. Taková rovina je tečnou rovinou pro průsečík obou přímek jako dotykový bod.

Tečná rovina v libovolném bodě zborceného hyperboloidu je určena oběma povrchovými přímkami bodem tím procházejícími.

Vskutku nemá jiná přímka, sestrojená dotykovým bodem T v tečné rovině (a, a') těchto dvou povrchových přímek, s plochou společný další bod $U \neq T$. Kdyby takový bod U na ploše existoval, tu by na př. povrchová přímka b jím procházející a protínající přímku a' ležela v tečné rovině a protínala by i přímku a téže soustavy, což je nemožné.

Tečné roviny v bodech povrchové přímky zborceného hyperboloidu tvoří rovinový svazek projektivní s řadou příslušných dotykových bodů.

Na př. svazek tečných rovin s osou a je perspektivní s řadou b $(B_1, B_2, B_3, \ldots)$, která je jeho řezem a ta je projektivní s bodovou řadou a $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ a jelikož každý její bod leží v příslušné rovině, je řada a dokonce perspektivní s rovinovým svazkem a.

Zorem zborceného hyperboloidu z libovolného bodu v prostoru je kuželová plocha druhé třídy.

Zorem dvou vzájemně projektivních řad na mimoběžných přímkách téže soustavy jsou totiž dva projektivní paprskové svazky o společném vrcholu a zor zborceného svazku spojujícího tyto dvě projektivní řady obaluje tedy kuželovou plochu druhé třídy (v řezu křivku druhé třídy).

Zborcený hyperboloid je plochou druhé třídy, jelikož libovolnou danou přímkou procházejí k hyperboloidu dvě tečné roviny. Tyto roviny sestrojují se pomocnou dotykovou kuželovou plochou, tedy zorem hyperboloidu z libovolného bodu na dané přímce.

Protože u hyperboloidu třída se rovná stupni, říkáme někdy, že *hyperboloid jest druhého řádu, nebo plochou kvadratickou čili kvadrikou.*

Opsaná dotyková kuželová (a speciálně válcová) plocha se dotýká zborceného hyperboloidu podél kuželosečky.

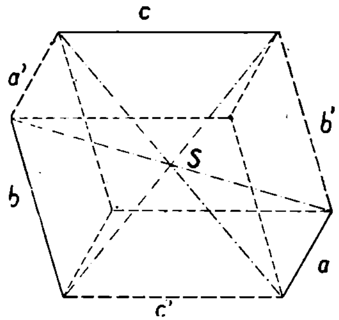
Mysleme si, že na třech tečných rovinách α, β, γ, procházejících bodem R, stanovíme jejich dotykové body A, B, C na přímkách hyperboloidu a, b, c. Pak rovina $\varrho \equiv (A, B, C)$ protíná roviny α, β, γ v tečnách t_A, t_B, t_C, jež jsou společné řezu roviny ϱ kuželovou i zborcenou plochou. Obě průsečné kuželosečky v rovině ϱ tedy splývají, čímž věta dokázána.

Posune-li se dotykový bod tečné roviny zborceného hyperboloidu na povrchové přímce do nekonečna, jsou přímky určující rovinu tečnou vzájemně rovnoběžné. Rovina tečná s úběžným dotykovým bodem se jmenuje *asymptotická rovina* plochy. Na zborceném hyperboloidu lze ku každé přímce jedné soustavy sestrojiti jedinou rovnoběžnou s ní přímku druhé soustavy; obě určují asymptotickou rovinu hyperboloidu.

Sestrojíme-li ke třem mimoběžkám a, b a c povrchové přímky soustavy čárkované, mající s nimi společné body úběžné, t. j. $a' \parallel a$ a protíná přímky b a c, $b' \parallel b$ a protíná přímky a a c a $c' \parallel c$ a protíná přímky a a b, určují všechny přímky šest rovin, jež omezují rovnoběžnostěn (obr. 14). Roviny asymptotické (a, a'), (b, b') a (c, c') protínají se v jeho středu a to jest střed S hyperboloidu, jak ukazuje již půlení tětiv plochy.

Obráceně *tečné roviny v bodech pevné kuželosečky zborceného hyperboloidu se protínají v určitém bodě*, jak ihned seznáme, zvolíme-li na ploše tři body A, B a C, $(A, B, C) \equiv \varrho$, jichž tečné roviny se protínají v bodě R.

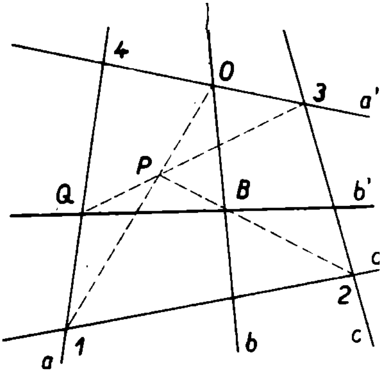
Bod R a rovina ϱ dotykové kuželosečky kuželové plochy opsané ploše z vrcholu R jsou *pól a sdružená jemu polární rovina*. Když rovina je úběžná a kuželosečka v ní nekonečně vzdálená kuželosečka na ploše, protínají se všechny tečné roviny sestrojené v bodech úběžné kuželosečky ve *středu* plochy S, pólu úběžné roviny σ. Náš rovnoběžnostěn v obr. 14 ukazuje, že *tři asymptotické roviny hyperboloidu a tedy všechny se protínají v jeho středu a obalují asymptotickou kuželovou plochu*, která se tedy dotýká hyperboloidu podél jeho úběžné kuželosečky. Obě plochy mají společné osy a hlavní roviny souměrnosti; i lze osy sestrojiti současně pro asymptotickou kuželovou plochu i pro hyperboloid.



Obr. 14.

Sestrojíme-li středem rovnoběžky k pěti přímkám hyperboloidu, určují asymptotickou kuželovou plochu a v řezu stanoví její řídící kuželosečku pěti body. Konstrukci os lze provésti úvahou, že každá rovina procházející osou kuželové plochy protíná ji ve dvou povrchových přímkách, jejichž úhel je osou půlen. Sestrojíme vrcholem kuželové plochy libovolnou přímku jako osu rovinového svazku, protneme jeho rovinami plochu a sestrojíme osy úhlů průsečných přímek; tyto osy poskytují pomocnou kuželovou plochu, na které leží i osy asymptotické plochy. Opakujeme konstrukci a obdržíme druhou pomocnou kuželovou plochu. Společné povrchové přímky obou jsou osami asymptotické kuželové plochy i hyperboloidu.

Projektivní geometrie poskytuje přesnější a přímé konstrukce os ploch druhého stupně, založené na jejich vlastnostech polárních, jež by však překročily rámec našich úvah o plochách zborcených, pro které ovšem vlastnosti zborceného hyperboloidu jsou zásadně důležitými, jak uvidíme.



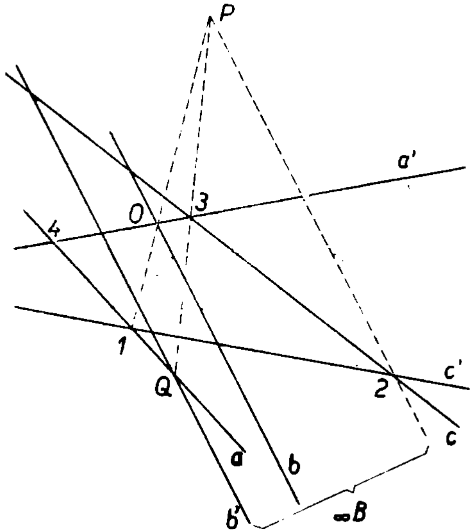
Obr. 15.

Úlohu sestrojiti tečnou rovinu v bodě B na povrchové přímce b hyperboloidu určeného mimoběžkami a, b, c, jsou-li *sestrojeny dvě přímky a′ a c′ druhé soustavy,* řešíme *prostorovým (zborceným) čtyrúhelníkem 1234* (obr. 15). Je-li $O \equiv (a', b)$, má rovina $(2, b)$ na rovině $(1, 3, 4)$ stopu $1O$, přímka $2B$ na ní stopník P; spojnice $3P$ je stopou roviny (B, c) na rovině $(1, 3, 4)$ a určí na a bod Q, $BQ \equiv b'$ jest přímka čárkované soustavy, jež určuje žádanou tečnou rovinu (b, b').

Obdobně řešena úloha *sestrojiti asymptotickou rovinu zborceného hyperboloidu* procházející přímkou b za téhož označení v obr. 16; $2\infty B \parallel b \parallel b'$.

Úlohu *sestrojiti transversálu čtyř mimoběžek abcd* řešíme zborceným hyperboloidem daným třemi z těch mimoběžek na př. *abc* a jeho řezem k libovolnou rovinou, jež prochází mimoběžkou d. Průsečíky přímky d a průsečné kuželosečky k procházejí obě transversály žádané jako povrchové přímky druhé soustavy na hyperboloidu *abc*.

Průmět zborceného hyperboloidu je dán průmětem soustavy povrchových přímek (tvořících). Mysleme si plochu vytvořenu dvěma vzájemně projektivními řadami. Jejich středové nebo rovnoběžné průměty jsou opět vzájemně projektivní bodové řady a tedy spojnice družin, *průměty přímek zborceného svazku* (*regulu*) *na ploše — obalují kuželosečku.* Kdyby střed promítání byl speciálně na hyperboloidu, pak povrchové přímky jím procházející promítají se jako body a obě



Obr. 16.

soustavy povrchových přímek se promítají do paprskových svazků, jež mají vrcholy v těchto bodech; body představují degenerovanou kuželosečku, již obalují průměty povrchových přímek.

Zborcený hyperboloid lze ovšem přímo určiti délkami jeho tří poloos, reálných a, b, jež určí hrdlovou elipsu (hlavní řez) a imaginární c; druhé dvojice stanoví obě hlavní hyperboly podle obr. 9. Rovnocenné je určení plochy dvěma shodnými rovnoběžnými elipsami v rovinách rovnoběžných s hlavní rovinou (osa k nim kolmá) a povrchovou přímkou spojující bod jedné elipsy (v obr. 9 v půdorysně) s bodem druhé elipsy (v rovině rovnoběžné s půdorysnou). Na obou elipsách obdržíme projektivně přiřazené bodové řady rovinovým svazkem, který má za osu danou povrchovou přímku nebo dvěma rovnoběžnými paprskovými svazky, jež mají vrcholy v průsečících dané povrchové přímky s elipsami. Aby rozdělení bylo stejnoměrné, zvolíme projektivní řady dělením na stejný počet dílů kružnice afinní s elipsou, opsanou nad její velkou osou. Aby pro hořejší elipsu nebylo dělení jiné, zvolíme půdorys horního bodu dané povrchové přímky v jednom z dělících bodů na elipse v půdorysně $I_1 \equiv 5$; pak $1I$, $2I$, ... je zborcený svazek. V obrazci sestrojena jedna soustava povrchových přímek, záměnou obdrželi bychom druhou soustavu, vždy dvě přímky různých soustav v jedné promítací rovině. Hrdlová elipsa půlí úseky povrchových přímek mezi oběma řídícími elipsami. Sestrojíme-li středem S rovnoběžky k průčelným povrchovým přímkám, obdržíme v nárysu asymptoty obrysu a v půdorysu stopu asymptotického kužele, homotetickou s danou elipsou. Z půdorysu libovolného bodu na ploše odvodí se nárys pomocí obou povrchových přímek, jejichž půdorysy jsou tečnami hrdlové elipsy. Tečné roviny v těch bodech sestrojí se povrchovými přímkami druhé soustavy.

Důležité *vlastnosti polární*, o které se opírají konstrukce na plochách druhého stupně, plynou ze skutečnosti, že *pól a sdružená polární rovina oddělují na všech sečnách, jež procházejí pólem, plochu harmonicky*; *v rovinách, jež procházejí pólem, platí harmonické dělení pro pól a sdruženou poláru řezu, která zapadá do polární roviny.* Z toho hned plyne, že polární rovina úběžného bodu je *rovina středová* (*diametrální*) a půlí všechny rovnoběžné tětivy procházející sdruženým úběžným pólem, mezi nimi je i průměr plochy; polární rovina úběžného bodu obsahuje též dotykové body všech tečen plochy, rovnoběžných ve směru tětiv (opsaná válcová plocha). Dvě přímky zovou se *sdružené* (*harmonické*) *poláry* plochy druhého stupně, když jedna je osou rovinového svazku, jehož póly vzhledem ku ploše jsou na druhé přímce. Rovnoběžné roviny protínají plochu v kuželosečkách, jejichž středy jsou póly společné úběžné přímky $_{\infty}p$ těch rovin vzhledem k řezům a leží na průměru, jenž je sdruženou (harmonickou) polárou úběžné přímky; průměr obsahuje ovšem póly všech rovnoběžných rovin a prochází též dotykovými body tečných rovin, které procházejí úběžnou přímkou $_{\infty}p$. *Střed plochy je pólem úběžné roviny*; obdržíme jej jako střed diametrálního řezu nebo jako půlící bod průměru.

Průměr a diametrální rovina jsou sdruženy, když rovina půlí tětivy rovnoběžné s průměrem nebo když průměr spojuje středy všech řezů rovnoběžných s diametrální rovinou.

Dva průměry jsou sdruženy, je-li jeden v diametrální rovině druhého.

Tři sdružené průměry jsou průměr p a dvojice sdružených průměrů řezu, který leží v diametrální rovině sdružené k průměru p. V trojhranu sdružených průměrů je každá stěna sdružena s protější hranou.

Rovnoběžné řezy plochy mají tuto vlastnost. Ke každé družině sdružených průměrů jednoho řezu existuje družina rovnoběžná. Rovnoběžné řezy plochy jsou podobné a podobně ležící čili homotetické. Vrcholy dotykových kuželových ploch podél rovnoběžných řezů jsou na sdruženém průměru.

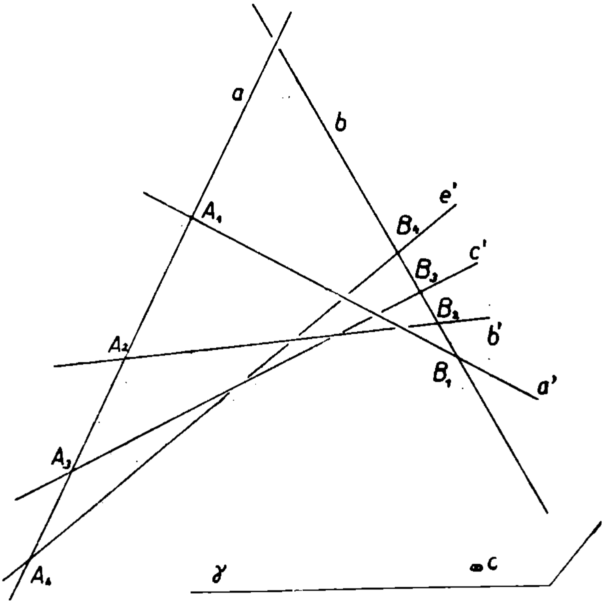
Hlavní rovinou se zove rovina (diametrální) půlící tětivy k ní kolmé.

Osou se zove průměr kolmý na roviny rovnoběžných řezů, jichž středy spojuje.

Homotetičnost řezů zborceného hyperboloidu týká se spolu i asymptotické kuželové plochy, dotýkající se hyperboloidu v úběžné kuželosečce. Rovnoběžné hyperbolické řezy obou ploch mají rovnoběžné asymptoty, libovolná rovina protíná obě plochy v kuželosečkách soustředných o společných asymptotách. Asymptoty všech hyperbol na ploše, jejichž roviny jsou diametrální, leží na asymptotické kuželové ploše a jsou asymptotami hyperboloidu.

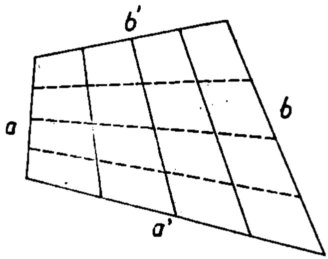
Kruhové řezy zborceného hyperboloidu v rovinách kolmých k hlavní rovině sestrojíme pomocí kulové plochy, jež je opsána nad větší reálnou osou jako průměrem. Touto osou a průsečíky kulové plochy s druhým hyperbolickým hlavním řezem, jehož osou je menší osa reálná, jsou určeny polohy obou soustav rovin kruhových řezů.

7. **Hyperbolický paraboloid** je zvláštním případem zborceného hyperboloidu. Je dán *dvěma řídícími přímkami a, b*



Obr. 17.

vzájemně mimoběžnými a *řídící rovinou* γ, jejíž úběžná přímka c jest třetí řídící přímkou plochy. Tvořící přímky a', b', c', d', ... (soustavy čárkované) jsou rovnoběžné s řídící rovinou γ a určují na přímkách soustavy $a, b, \ldots$ (nečárkované) podobné řady. Protože přímka ${}_\infty c$ přiřaďuje na přímkách čárkovaných jejich úběžné body, jsou i řady určené na přímkách čárkované soustavy soustavou nečárkovanou vzájemně podobné. I jest též soustava $a, b, \ldots$ povrchových přímek nečárkovaných rovnoběžna s jistou rovinou γ' a protíná její nekonečně vzdálenou přímku ${}_\infty c'$; rovina γ' je *druhou řídící rovinou.*



Obr. 18.

Hyperbolický paraboloid je také dán třemi řídícími přímkami rovnoběžnými s touž rovinou. Úběžná přímka této roviny protíná všechny řídící přímky a patří druhé soustavě, která na nich vytíná podobné řady.

Hyperbolický paraboloid je rovněž *určen dvěma podobnými řadami na mimoběžných osách a, b* (obr. 17). A jelikož podobné řady na mimoběžných osách jsou určeny dvěma družinami bodů, jest hyperbolický paraboloid určen *prostorovým* čili *zborceným čtyrúhelníkem* (obr. 18). Obě řídící roviny jsou určeny dvojinami protějších jeho stran ab, $a'b'$, s nimiž jsou rovnoběžny.

Jelikož rovnoběžným promítáním se neruší podobnost obou řad, *jest rovnoběžným průmětem plochy parabola jako obalová křivka průmětů jeho povrchových přímek.*

Dělením protějších stran čtyrúhelníka na týž počet stejných dílů a spojením bodů, které si odpovídají, obdržíme obě osnovy povrchových přímek.

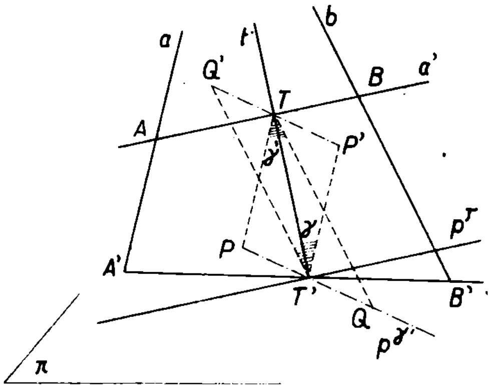
Hyperbolický paraboloid má dvě úběžné přímky různých soustav, t. j. dotýká se úběžné roviny.

Řez hyperbolického paraboloidu libovolnou rovinou je hyperbola, ježto má obecně dva úběžné body.

Průsečnice řídících rovin jsou *průměry*; každým bodem v prostoru prochází jeden průměr. *Rovina rovnoběžná s průměrem seče plochu v parabole.* Odtud název plochy.

Rovina tečná rovnoběžná s danou rovinou ϱ se určí povrchovými přímkami rovnoběžnými s průsečnicemi (ϱ, γ) a (ϱ, γ') roviny s oběma řídícími rovinami; lze je sestrojiti v průmětech jako obrysové tečny daného směru.

Vrchol je dotykový bod tečné roviny (vrcholové) kolmé na směr průměrů, povrchové přímky procházející vrcholem jsou *hlavní přímky*, průměr jdoucí vrcholem je *osou* plochy. Osové roviny půlící úhly hlavních přímek určují *hlavní paraboly*.



Obr. 19.

Rovnoosý hyperbolický paraboloid má řídící roviny vzájemně kolmé, jeho hlavní paraboly jsou shodny, roviny kolmé na osu protínají jej v rovnoosých hyperbolách.

Tečné roviny hyperbolického paraboloidu sestrojujeme zase dvěma povrchovými přímkami různých soustav; konstruktivně využije se ovšem okolnosti, že povrchová přímka leží v příslušné řídící rovině.

Buď *dán hyperbolický paraboloid zborceným čtyrúhelníkem* $ABA'B'$, kde povrchová přímka $A'B'$ leží na př. v průmětně π (obr. 19) rovnoběžného promítání; jest *sestrojiti tečnou rovinu τ v bodě T povrchové přímky $a' \equiv AB$*. Sestrojíme bodem T řídící rovinu γ', $\overline{TP} \# \overline{AA'}$, $\overline{TQ} \# \overline{BB'}$, stopa $p^{\gamma'} \equiv PQ$ protíná již b' v bodě T' a $t \equiv TT'$ je druhou přímkou tečné roviny $\tau \equiv (a', t)$, $p^{\tau} \parallel a'$.

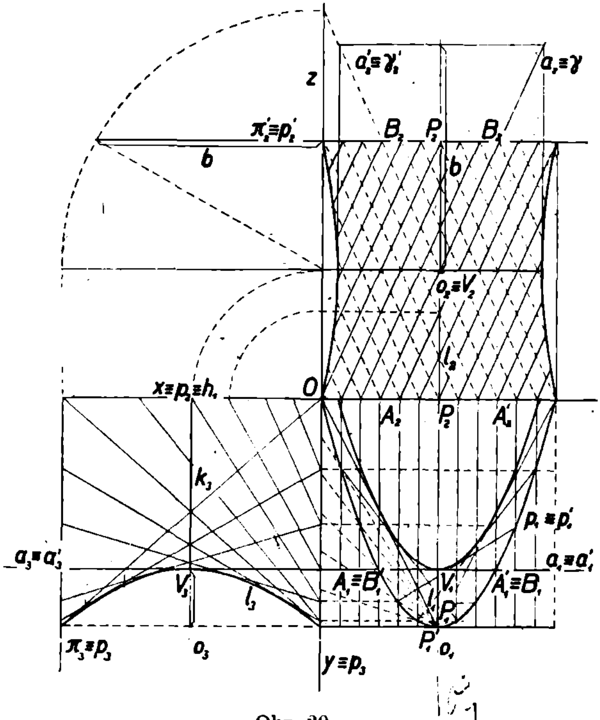
Je-li obráceně zvolena povrchovou přímkou a' rovina τ stopou $p^{\tau} \parallel a'$, určíme její dotykový bod T na a'. Průsečíkem $T' \equiv (A'B', p^{\tau})$ sestrojíme $\overline{T'P'} \# \overline{AA'}$, $\overline{T'Q'} \# \overline{BB'}$, $P'Q'$ je půdorysná hlavní přímka řídící roviny γ' v úrovni povrchové přímky a', kterou protíná v hledaném dotykovém bodě T. Podobné řady na přímkách čárkovaných jsou dány vztahem $\overline{AT} : \overline{BT} = \overline{A'T'} : \overline{B'T'}$, můžeme podle toho sestrojiti dotykový bod T (nebo dříve stopník T') planimetricky. Tečnu t lze též sestrojiti jako pátou tečnu obrysové paraboly Brianchonovou větou.

Pravoúhlé průměty hyperbolického paraboloidu, je-li jeho osa o kolmá k nárysně a jsou-li hlavní roviny s hlavními parabolami rovnoběžny s půdorysnou a stranorysnou (obr. 20). Dány dvě shodné paraboly p a p' v půdorysně π a v rovině $\pi' \parallel \pi$, osa $o \perp \nu$ půlí jejich vzdálenost. Půdorysy parabol se stotožňují, jejich osy jsou rovnoběžny se základnicí y.

Roviny řídící γ a γ' procházejíce osou hyp. paraboloidu jsou nárysně promítací, nárysy povrchových přímek jedné soustavy jsou rovnoběžny s γ_2, druhé soustavy s γ_2'. V obraze byly půdorysy přímek paraboloidu sestrojeny užitím nárysu. (Lze je ovšem získati také vhodným rozdělením oblouku paraboly p_1 a vhodným spojením dělicích bodů.)

Povrchovou přímku $a \equiv AB$ zvolíme rovnoběžnou s nárysnou, tolikéž přímku $a' \equiv A'B'$ druhé soustavy, $a_1 \equiv a'_1$, obě přímky se protínají ve vrcholu V plochy a určují její tečnou rovinu kolmou k ose o.

Půdorysy a stranorysy povrchových přímek obalují průměty hlavních parabol $k \parallel \pi$ a $l \parallel \sigma$ v hlavních rovinách jako zdánlivé obrysy pro kolmé promítání. Dotykové body se odvodí na nich vlastnostmi subtangent, jež poskytnou ovšem průsečíky s hlavními rovinami.

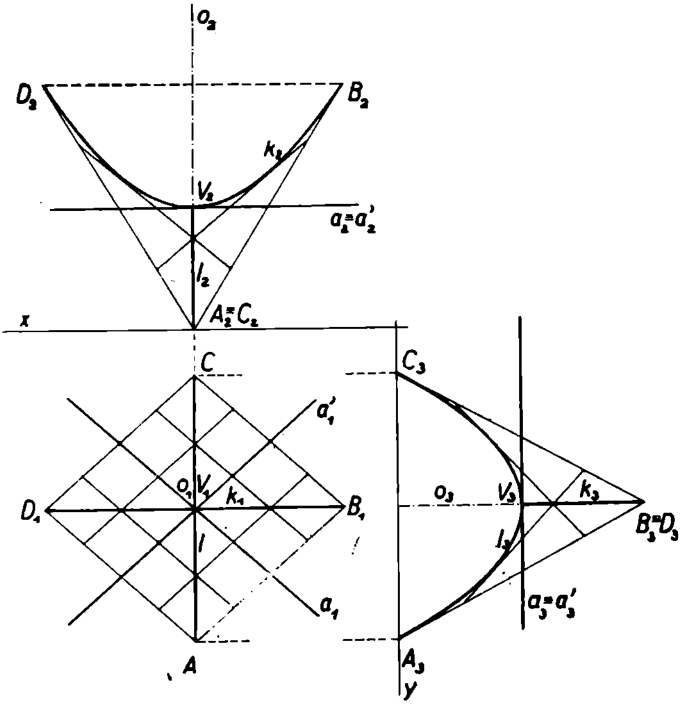


Obr. 20.

Řez nárysnou je hyperbola h; má asymptoty A_2B_2, $A'_2B'_2$ a je určena ještě počátkem souřadnic O, konstrukce její vedlejší poloosy je v nárysu vyznačena.

Má-li prostorový čtyrúhelník, kterým je hyperbolický paraboloid určen, strany vzájemně rovné, je *zborceným koso-*

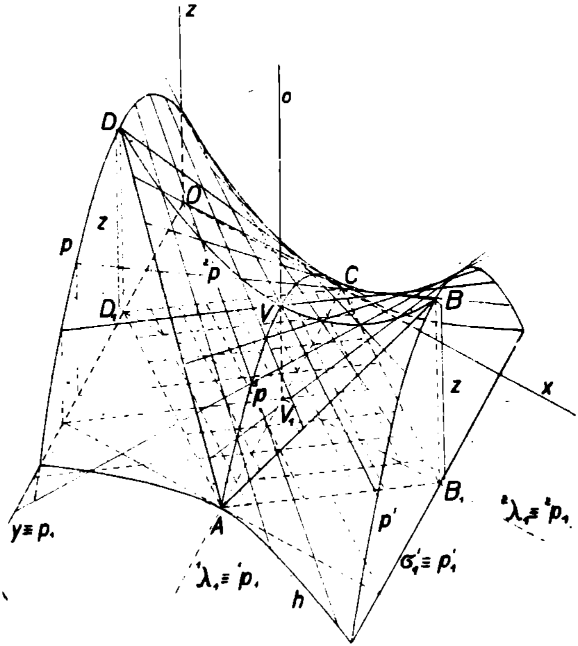
čtvercem, který se promítá ve směru osy plochy kolmo do kosočtverce, obě soustavy povrchových přímek se promítají v tom směru do osnov rovnoběžek se stranami kosočtverce.



Obr. 21.

V obr. 21 jest tento jednoduchý případ znázorněn půdorysem, nárysem a stranorysem s osou *o* plochy kolmou k půdorysně a oběma hlavními rovinami rovnoběžnými s nárysnou a se stranorysnou, takže kosočtverec má zvláštní polohu k průmětnám, jak z obrazu patrno. Obě povrchové přímky

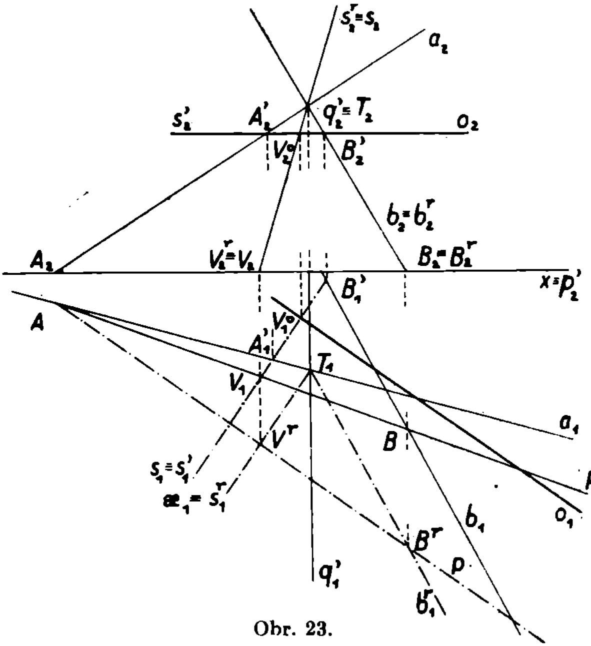
a a a' ve vrcholu V jsou vodorovné a určují vodorovnou vrcholovou tečnou rovinu, které se dotýká hlavní parabola k, rovnoběžná s nárysnou, nad rovinou a druhá hlavní parabola l pod rovinou tečnou. Půdorys je sestrojen v rámci koso-



Obr. 22.

čtverce, takže odpadá hyperbolický řez první průmětnou, který by měl asymptoty a_1, a'_1 a vrchol A.

I z pravoúhlých průmětů vyniká tvar plochy hyperbolického paraboloidu, jenž je vystižen názvem *sedlovitá plocha*, který se jí přikazuje. Ještě názorněji jeví se plocha v průmětu axonometrickém. V obr. 22 sestrojen její *kosoúhlý průmět* *isometrický na půdorysnu*, osa $o \parallel z$ se promítá do směru kolmého na směr od levé ruky k pravé. Vrcholy A, C kosočtverce leží v půdorysně, vrcholy B, D mají stejnou souřadnici z, která se v průmětu zachová. Průmět plochy je omezen hyperbolou h v půdorysně, parabolou p v stranorysně a rovnoběžnou parabolou shodnou p' v rovině σ'. V průmětu vytčena



Obr. 23.

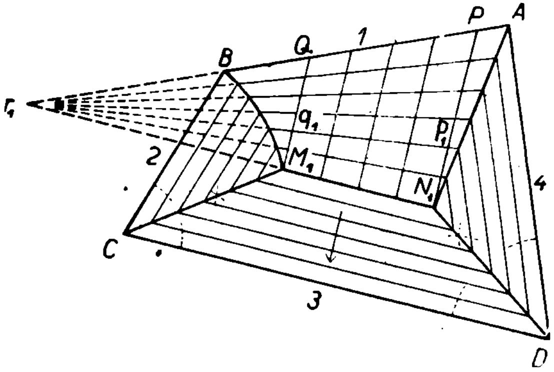
obalová parabola obrysová a hlavní paraboly ${}^1p$ a ${}^2p$ na ploše v jejích hlavních rovinách souměrnosti ${}^1\lambda$ a ${}^2\lambda$. Průmět popsán jako útvar v prostoru.

Je-li *hyperbolický paraboloid určen dvěma mimoběžkami a řídicí rovinou, lze sestrojiti jeho vrchol, osu a vrcholové hlavní přímky i hlavní roviny* zcela jednoduše. V obr. 23 zvolena plocha dvěma mimoběžkami a, b a půdorysnou jako řídící rovinou v pravoúhlých průmětech. Čárkovaná soustava je rovnoběžna s půdorysnou a vytíná na přímkách a a b podobné řady, obrysem půdorysu je parabola. Nárysy této soustavy jsou osnovou rovnoběžek se základnicí x; v obr. vyznačena přímka p' v půdorysně a q' kolmá k nárysně, $q'_2 \equiv (a_2, b_2)$. Odtud hned patrno, že nečárkovaná soustava přímek $a, b, \ldots$ se promítá do nárysny jako paprskový svazek o vrcholu q'_2, takže obrysová parabola degeneruje v složenou křivku druhé třídy.

Ke konstrukci potřebujeme průměr. Zvolíme na přímce a bod T, $T_2 \equiv q'_2$, a tím sestrojíme $b^r \parallel b$; spojnice stopníků $AB^r \equiv p$ je půdorysnou stopou druhé řídící roviny a tedy průměrem. Sestrojíme dále bodem T půdorysně promítací rovinu $\varkappa$ kolmo na průměr, $\varkappa_1 \perp p$, k průsečnici $s^r \equiv TV^r$ roviny $\varkappa$ a druhé roviny řídící odvodíme nárys a pak na ploše přímku $s \parallel s^r$, $s_2 \equiv s^r_2$; s je již hlavní tečnou ve vrcholu. Druhá hlavní tečna s' je rovnoběžna s půdorysnou, $s'_1 \equiv s_1$, (s a s' určují vrcholovou tečnou rovinu kolmou na průměr), s'_2 se odvodí body A' a B' na daných povrchových přímkách. Vrchol plochy je $V^0 \equiv (s, s')$, jím prochází osa o ve směru průměru, $o_2 \equiv s'_2$. Hlavní roviny procházejíce osou půlí úhly sevřené hlavními tečnami ve vrcholu a protínají plochu v hlavních parabolách.

8. Hyperbolický paraboloid při řešení střech. V stavitelství se ho užívá, máme-li spojiti střešní plochou dvě přímky vzájemně mimoběžné; bývá to *hrana římsová* (totožná theoreticky s pozednicí i okapní hranou v půdorysně) a *hřeben* jako horizontální omezující hrana sousední střešní roviny. Použití nachází při různoběžníkovém půdoryse.

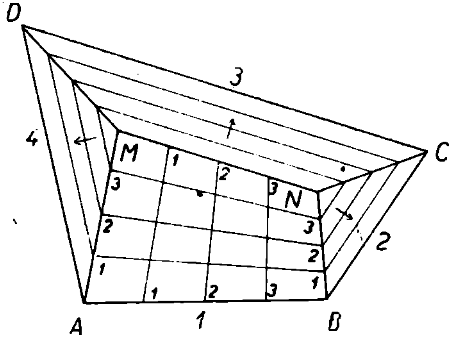
V obr. 24 dán různoběžníkový půdorys budovy $ABCD$. Okapními hranami BC, CD a DA položíme střešní roviny stejného spádu, takže půdorysy nároží CM rovin *2* a *3* a DN rovin *3* a *4* jsou osami úhlů půdorysných stop střešních rovin. Dále zvolíme hřeben $MN \parallel CD$, který omezuje přední část střechy. Čtvrtou střešní plochou, jež má stopu $l = AB$, bude hyperbolický paraboloid. Sestrojíme $M_1Q \perp M_1N_1$ a $N_1P \perp M_1N_1$, P a Q jsou na AB a náš hyperbolický paraboloid je zborcený čtyrúhelník $MNPQ$. Jeho řídící roviny jsou půdorysna a rovina rovnoběžná s promítací rovinou přímky $p \equiv NP$ nebo $q \equiv MQ$. Měřítka téhož počtu rovných dílů na M_1Q a N_1P (v obr. 6 dílů) jsou homotetická a mají společný zor z bodu r_1, což znamená, že soustava hori-



Obr. 24.

zontálních povrchových přímek, jež spojují obě měřítka na p a q, protíná přímku r kolmou k půdorysně. Jest tedy naše plocha určena také přímkami p, q a r rovnoběžnými s toutéž promítací rovinou. Tím je řešena otázka horizontálních *latí*, ovšem vzájemně mimoběžných. *Krokve* tvoří druhou soustavu povrchových přímek, která protíná soustavu latí; spojují podobně ležící měřítka na MN a PQ (v obr. jsou 4 díly). Střechy $CDNM$, ADN a BCM jsou děleny týmž počtem latí, ovšem vzájemně rovnoběžných. Latě obou trojúhelníkových rovin protínají latě paraboloidu stejné výšky v bodech, které spojeny dávají průseky paraboloidu uvedenými rovinami; jsou to oblouky hyperbol, jež tvoří křivá nároží na zborcené části střešní. Kdyby roviny střešní byly rovnoběžny s průměrem hyperbolického paraboloidu, t. j. s přímkami $M_1Q \parallel N_1P$, byla by nároží parabolická. Praxe žádá, aby tato nároží byla jen málo zakřivena.

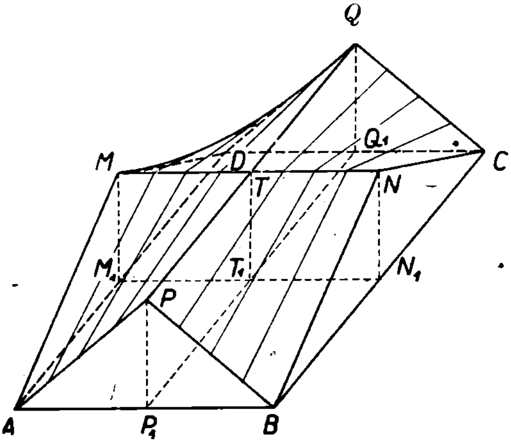
V obr. 25 jest provedeno řešení střechy téhož tvaru a použito zborceného čtyrúhelníka $ABNM$. Zde jsou přímá nároží AM a BN předem zvolena jako povrchové přímky sou-



Obr. 25.

stavy krokví. Dělení stran zborceného čtyrúhelníku je úplně obdobné. Druhá řídící rovina není ovšem kolmá k půdorysně, t. j. soustava krokví nemá půdorysy vzájemně rovnoběžné.

V obr. 26 provedeno *v kosoúhlé isometrii řešení střech nad čtvercovým půdorysem* $ABCD$, nad jehož obrysem se zvedají čtyři vertikální štíty ABP, BCN, CDQ a DAM o téže výšce. Spojnice MN a PQ se protínají v horizontální rovině v bodě T. Tím je střecha rozčleněna na *čtyři zborcené čtyrúhelníky* (jaksi deltoidy s osami souměrnosti $\overline{AT} = \overline{BT} = \overline{CT} = \overline{DT}$), které vyplníme střešními hyperbolickými paraboloidy. Úžlabí jsou tu nahrazena sedlovitým tvarem plochy, odpad vody nutno provésti sběrnými body A, B, C a D. Jak patrno z konstrukce, jsou použité plochy ortogonálními hyperbolickými paraboloidy, ježto mají řídicí roviny vzájemně kolmé; jsou to svislé roviny štítů. Společnou osou ploch je vertikála



Obr. 26.

společného vrcholu T s vodorovnou vrcholovou tečnou rovinou, v níž $MN \perp PQ$ jsou hlavními tečnami.

* * *

Uvažované zborcené plochy druhého stupně mají důležitý úkol v theorii zborcených ploch vyšších stupňů; některé konstrukce o nich se převádějí totiž na zborcené plochy 2. stupně.