AXIOMATICKÉ SOUSTAVY

Do značné míry nezávisle na obecných logických výzkumech, jež přinesly tolik nového do základních problémů matematiky, šlo vyšetřování axiomatické. O tomto vyšetřování možno obecně prohlásiti, že vyšetřování, omezené na předměty ryze matematické, mělo zase svůj zpětný odraz na methody logiky, jako širší podklad pro celý vědní obor.

V čem spočívá podstata axiomatického vyšetřování a jak se jeví s nynějšího stanoviska v nějakém oboru matematiky?

Základem soustavy je soubor výroků, které, jak již víme, musí splňovati podmínky bezespornosti, nezávislosti a úplnosti. Podmínka bezespornosti byla již objasněna při vyšetřování soustavy základních vět výrokového počtu, podmínka nezávislosti také. Podmínka úplnosti, jež se klade na soubor axiomů, se vyjadřuje obyčejně tak, že se žádá, aby všechny matematické věty onoho oboru byly z axiomatického základu odvoditelné prostředky tohoto systému. Tato poslední podmínka je obyčejně značně nejasná a zdá se zbytečným pleonasmem. Především předpokládá ještě jiné, neaxiomatické vědomosti z oboru, jenž má býti axiomaticky ustaven. Uvedení v axiomatickou soustavu pak by bylo jakousi formální, učesanou, závěrečnou redakcí. V matematické praxi tomu tak někdy vskutku je, prakticky má tedy podmínka úplnosti axiomů jistý význam. Není-li tomu tak, pak je tato podmínka zbytečná již proto, že z axiomů nelze víc získati, než bylo do nich vloženo, protože soustava je přísně deduktivní a po cestě (při odvození pouček) nemůže nic přirůsti.

Axiomy obsahují základní znaky logické a matematické, jež dále nedefinujeme a jež považujeme za primitivní (ve smyslu neredukovatelnosti). Všechny ostatní znaky se pak vyjadřují pomocí těchto primitivních znaků definicemi, a to tak, jak jsme již měli příležitost poznati při logickém počtu. Definice nového znaku není nic jiného, než úplné vyjádření všech jeho složek a struktury, jež tyto jeho složky váže.

V axiomech jsou vyjádřeny základní relace a operační možnosti mezi symboly předmětů. Tím je vymezena funkce těch předmětů v oboru, jenž je axiomatisován. Další, co musí býti připojeno k axiomatické soustavě, jsou podmínky, za kterých je možno ze soustavy činiti *důsledky*. Obvykle to bývají podmínky té formy, kterou již známe z výrokového počtu: jestliže A je formule (třeba axiom sám nebo skupina jich) a $A \rightarrow B$ je logicky odvoditelná formule, pak je také B formule, důsledek. B je v takovém případě poučkou axiomatisované soustavy.

Zajímavá na moderním pojetí axiomatiky je tato stránka: předměty, jež jsou ve hře axiomatické soustavy, jsou teprve jí samou stanoveny. Aby bylo dobře rozuměno: axiomy jsou namnoze implicitními definicemi předmětů, spoluurčují totiž jejich vlastnosti do té míry, že ze souhrnu těch vlastností vycházejí jisté předměty jedno-jednoznačně stanoveny jako jedině možné. Tak alespoň by to vždy býti mělo. Názorně bychom si mohli věc představiti na př. tak, že okruh předmětů, vymezený prvním axiomem v pořadí se druhým a každým dalším axiomem zúží postupně tak, že nezbude než jednoznačně stanovený druh předmětů, jež současně vyhovují všem axiomům. Kdyby tomu tak nebylo, připouštěla by axiomatická soustava více druhů předmětů, jež by jí vyhovovaly, a existovalo by více modelů, třeba velmi rozdílných. Je proto potřebí ukončiti axiomatickou soustavu jistou podmínkou, jež jednoznačnost předmětů, vyhovujících soustavě, zaručuje. O takové podmínce si promluvíme později. Jako příklad soustavy, jež takového doplnění potřebuje, si uvedeme soustavu elementární aritmetiky. Je vyjádřena těmito axiomy:

$$1. \qquad (x)(y)[R(x,y) \rightarrow (Ez)R(y,z)].$$

Tento axiom vyjadřuje, slovně opsán, že počet předmětů, vyhovujících relaci nebo funkci ‚R' není ukončen. Funkci ‚R' je možno chápati tak: předmět ‚y' následuje po předmětu ‚x', anebo předmět ‚x' předchází předmětu ‚y'.

$$2. \qquad (x)(y)(z)[R(x,y) \,.\, R(x,z) \rightarrow y = z \,.\, R(x,y) \,.\, R(z,y) \rightarrow x = z].$$

Tento axiom vyjadřuje: dva předměty ‚y' a ‚z', jež následují po témž předmětu ‚x' jsou identické, dále, dva předměty ‚x' a ‚z', jež předcházejí témuž předmětu ‚y', jsou rovněž identické.

$$3. \qquad (Ev)(Ey)(\overline{Ex})[R(v,y) \,.\, R(x,v)].$$

Tento axiom vyjadřuje, že jest ‚v' takové, ke kterému neexistuje předchozí předmět (předchůdce).

Je patrno, myslíme-li si pod relací ‚R' vztah následnosti čísla přirozené řady číselné k následujícímu a pod elementy, jež jsou v relaci právě čísla přirozené řady číselné, že soustavě tato řada vyhovuje; je právě otázka, je-li to jen ona. Všimněme si, jak každý další axiom zúží možnosti vzhledem k předmětům, jež by mohly těm podmínkám vyhovovati.

První axiom poukazuje k tomu, že řada předmětů nemůže býti ukončena, že jich na příklad nemůže býti 8, protože ke *každému* ‚*x*' a ‚*y*', pak tedy ke každému ‚*y*' existuje ‚*z*', jež následuje po ‚*y*'.

Druhý axiom zabrání tomu, aby se řada předmětů nepočla někde *větviti*, což by mohlo nastati, když by byl větší počet různých předmětů, jež by po některém mohly následovati.

Třetí axiom poukazuje k tomu, že existuje jeden počáteční předmět, že tedy řada je na jednom konci uzavřena (na počátku).

Historicky je uvedená soustava zajímavá tím, že představuje zjednodušený systém pěti axiomů Peanových pro čísla přirozené řady číselné. Tento Peanův systém byl snad prvním formalisovaným axiomatickým systémem vůbec; formalisace ukázala svoji životnost a od poslední čtvrtiny minulého století se rozšířila na většinu matematických oborů. To bylo také původním programem italské formalistické školy z konce minulého století a z počátku nynějšího, jejíž hlavou právě Peano byl.

Ve formalisované soustavě, kterou jsme právě napsali, není zapotřebí uváděti zvláštní pravidla, jak ze soustavy odvozovati důsledky: tato pravidla jsou již obsažena v pravidlech formální logiky. V soustavách neformalisovaných je nutno některá pravidla, jak uvidíme na soustavě geometrie zanedlouho, zvláště vytknouti, ačkoliv jejich povaha je obecně logická. To je nutné v zájmu autonomie soustavy, v zájmu její soběstačnosti.

Jaký je vztah takového axiomatického systému, jenž byl právě uveden, k theorii celých čísel, o níž jsme mluvili dříve? Své doby jsme si objasnili, že dovedeme-li definovati celá čísla a přidáme-li ještě axiom nekonečna, že můžeme odvoditi aritmetiku z logiky a axiomu nekonečna. O soustavě, kterou jsme právě napsali, lze říci, že vykoná tutéž službu, jenže má větší počet axiomů. V tom právě se jeví výsledky logiky, že poučila matematiku, co je k její výstavbě naprosto nezbytné a bez čeho se lze obejíti. V tom směru je tedy dnešní názor na základní pojmy matematiky pokročilejší proti době prvních formalistů v axiomatice.

Na srovnání si tu uvedeme ještě neformalisovanou soustavu axiomů geometrie, jejíž výhoda je v tom, že formalisaci lze velmi snadno provésti, protože je to soustava neobyčejně přesně vyslovená. Jde o soustavu Hilbertovu, již uveřejnil ve své knize „Základy geometrie" v roce 1900. Uvádím ji proto, že je jednou z nejznámějších v matematickém světě a také proto, že s ní souviselo mnoho prací matematiků nejrůznějších škol a národů.*)

Celá soustava axiomů geometrie je rozdělena v pět skupin, jež jsou uvedeny vysvětlením:

Myslíme si tři různé soustavy předmětů; předměty první soustavy jmenujeme body a označíme $A, B, C, \ldots$ předměty druhé soustavy pojmenujeme přímkami a označujeme $a, b, c, \ldots$, předměty třetí soustavy pojmenujeme rovinami a označujeme $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; body se nazývají také prvky lineární geometrie, body a přímky prvky rovinné geometrie a body přímky a roviny se nazývají prvky prostorové geometrie.

Myslíme si body, přímky a roviny v určitých vzájemných vztazích a označujeme tyto vztahy slovy „ležeti",

*) Hilbertova soustava je předmětem zajímavé práce českého matematika K. Rösslera, „La géometrie mécanisée", vydané ve Spisech přírodovědecké fakulty Karlovy university. Práce užívá důsledně logistické techniky.

„mezi", „rovnoběžný", „shodný", „spojitý"; *přesný a pro matematické účely úplný popis těchto vztahů je proveden axiomy geometrie.* (Poslední část poslední věty podtržena mnou. — O. Z.)

Axiomy geometrie můžeme rozděliti na pět skupin; každá z nich vyjadřuje jisté společné základní skutečnosti našeho názoru. Pojmenujeme tyto skupiny axiomů takto:

I. 1 ÷ 8 axiomy projektivní (Hilbert volí pojmenování jiné, přidržel jsem se výstižného názvu Poincaréova, jenž takto pojmenoval Hilbertovu první skupinu ve své knize „Dernières pensées").
II. 1 ÷ 4 axiomy uspořádání.
III. 1 ÷ 5 axiomy shodnosti.
IV. axiom rovnoběžek.
V. 1 ÷ 2 axiomy spojitosti.

Potud Hilbertovo vysvětlení. Než přistoupíme k úplnému výčtu jednotlivých axiomů, který je pro další nezbytný, promluvíme si několik slov o tomto vysvětlení, jež je pro tehdejší jako pro nynější pojetí axiomatiky tak charakteristické. Na tomto vysvětlení je nové a své doby velmi původní pojetí soustavy axiomů. Již od antických dob byla povaha axiomů a jejich postavení pro theorii poznání předmětem hojných úvah. Starší pojetí chápalo axiomy jako názoru přístupné pravdy, jež dalšího důkazu nepotřebují. Podle tohoto pojetí nelze pravdy obsažené v axiomech redukovati na pravdy jednodušší — při tom axiomy obsahují nějaké podstatné vyjádření o skutečnostech na rozdíl od pouhých formálních pravidel logiky. V názvosloví, které již dobře známe, lze tedy říci, že axiomy podle tohoto pojetí mají býti pravdivými, ale netautologickými větami.

Jakým způsobem asi bylo možno se dostati až k axiomům? Vědní obor třeba rovinné geometrie euklidovské obsahuje celý souhrn pouček tohoto oboru. Poučky jsou výpověďmi o předmětech tam zkoumaných. Tyto poučky jsou jakýmisi uzly v celé vztahové síti pouček tohoto oboru — a někde ta síť počne, anebo alespoň má někde okraje, z kterých je možno vyjíti. Starší pojetí axiomatiky, abychom zůstali při obrazu sítě, vycházelo z takového stanoviska: síť se počne plésti z několika pevných uzlů (axiomů), jež jsou dány předem a celá další práce je věcí matematické techniky (tuto techniku nemíním nikterak znehodnocovati voleným pojmenováním, právě technika matematikova to je často, co je na objevu nejcennější a nejoriginelnější). Nové pojetí axiomatiky je proti tomuto „absolutistickému" (začne se od jakýchsi zjevených pravd, jež jsou vyjádřeny v axiomech) chápání možno nazvati relativistickým: nezáleží valně na tom, *odkud* se počne síť plésti, záleží na tom, aby se upletla celá. Proto moderní pojetí stírá rozdíl mezi větou odvozenou a větou základní, kteroukoli poučku je možno vzíti také za větu základní, má-li dostatečnou logickou nosnost, aby stačila na podepření základu. Práci na síti tedy možno také započíti odkudkoli z prostředka.

Druhá důležitá věc je tato: starší pojetí považovalo axiomy za výpovědi, bez nichž se *nelze* obejíti, bez nichž myšlení v tom určitém oboru matematiky musí selhati. Proto axiomy tolik zaměstnávaly filosofy, chtěli odkrýti, v čem spočívá tato domnělá nezbytnost pro matematické myšlení. Nové pojetí uvolnilo také tady značně tuhý názor na jakési výlučné a dominantní postavení několika myšlenkových zákonů, jež byly vyjádřeny v axiomech. Toto nové pojetí považuje spíše axiomy za podmínky, jimiž se teprve stanoví typ vědního oboru, o který jde.

Počátek k tomuto náhledu na axiomy byl učiněn zakladatelem neeuklidovské geometrie Lobačevským — ukázal, že lze náhradou za euklidovský axiom o existenci jediné rovnoběžky daným bodem k dané přímce voliti axiom jiný a vybudovati tak geometrii beze všech vnitřních sporů také. Tím padla zásadně nutnost takového axiomu a nezbytnost jeho pro geometrické myšlení. Cesta k uvolnění byla otevřena.

Toto relativistické stanovisko poznáme dobře v dalším na Hilbertově soustavě, až bude viděti, co všechno je možno z takového systému vytvořiti buď vynecháním axiomů anebo vynecháním a náhradou za jiné. Nepovažujeme tedy již axiomy za nevývratné pravdy — jakési vnucené abstrakce z názoru — nýbrž za výpovědi, jež můžeme nahraditi výpověďmi jinými a tak zbudovati soustavy jiné. Relativistický názor na axiomy by tedy podle toho měl na mysli vždy spíše cíl, ke kterému je soustava vytvořena, než pevný počátek, z něhož se odvozují důsledky. Prostředky k tomu cíli si pak najde axiomatická soustava ve vhodné volbě základních vět.

Vyjmenujeme teď podrobně jednotlivé skupiny Hilbertových axiomů a pak pojednáme o možnostech, jež z té soustavy plynou.

I. Axiomy projektivní.

I,1. Dva různé body A, B určují vždy jednu přímku a.

I,2. Dva různé body přímky tuto přímku určují.

I,3. Na přímce jsou vždy alespoň dva body, v rovině jsou vždy alespoň 3 body, jež neleží na přímce.

I,4. Tři body A, B, C, jež neleží na téže přímce, určují vždy jednu rovinu α.

I,5. Libovolné 3 body nějaké roviny, jež neleží na téže přímce, určují tuto rovinu.

I,6. Leží-li dva body A, B přímky a v rovině α, pak leží každý bod a v rovině α.

I,7. Mají-li dvě roviny α, β společný bod A, pak mají společný ještě nejméně jeden další bod D.

I,8. Existují nejméně 4 body, jež neleží v téže rovině.

II. Axiomy seřazení.

II,1. Jsou-li A, B, C body roviny, a leží-li B mezi A a C, pak leží B také mezi C a A.

II,2. Jsou-li A a C dva body přímky, pak existuje vždy nejméně jeden bod B, který leží mezi A a C, a nejméně jeden bod D takový, že C je mezi A a D.

II,3. Mezi třemi body přímky existuje vždy jeden a jen jeden, jenž leží mezi oběma druhými.

II,4. Buďtež A, B, C body, jež neleží v přímce, a budiž přímka v rovině ABC, jež neprochází žádným z bodů A, B, C. Prochází-li pak přímka a bodem úsečky AB, pak prochází jistě ještě buď bodem úsečky BC nebo úsečky AC.

(Tento axiom potřebuje doplniti definicí, co jest rozuměti výrazem „úsečka AB" a p. Definici neuvádím.)

III. Axiomy shodnosti.

III,1. Jsou-li A, B dva body na přímce a, dále A' bod na téže nebo na jiné přímce a', pak můžeme na dané straně a' k bodu A' nalézti jeden a jen jeden bod B' tak, že úsečka AB je shodná s úsečkou $A'B'$, což značíme:

$$AB \equiv A'B'.$$

Každá úsečka je shodná sama ssebou, tedy platí vždy $AB \equiv AB$ i $AB \equiv BA$.

III,2. Je-li úsečka AB shodná jak s úsečkou $A'B'$, tak s úsečkou $A''B''$, pak je také $A'B'$ shodná s $A''B''$, t. j., platí-li

$$AB \equiv A'B' \quad \text{a} \quad AB \equiv A''B'',$$

pak je také

$$A'B' \equiv A''B''.$$

III,3. Buďtež AB a BC dvě úsečky bez společných bodů na přímce a, dále $A'B'$ a $B'C'$ dvě úsečky na téže nebo na jiné přímce a', rovněž bez společných bodů; jestliže potom platí

$$AB \equiv A'B' \quad \text{a} \quad BC \equiv B'C',$$

pak platí také

$$AC \equiv A'C'.$$

Po krátkém objasnění, co bude rozuměti pod výrazem „úhel", uvádí Hilbert další axiom shodnosti.

III,4. Budiž úhel $\sphericalangle (h,k)$ v rovině α a přímka a' v rovině α', a budiž dále určena některá strana přímky a' v rovině. (Některou stranou přímky a' je zřejmě míněna jedna z obou půlrovin, v něž je rovina přímkou a' rozdělena; doplněno mnou. O. Z.) Budiž h' polopaprsek přímky a' vycházející z bodu O': pak existuje v rovině α' jeden a jen jeden polopaprsek k takový, že úhel $\sphericalangle (h,k)$ je shodný anebo rovný s úhlem $\sphericalangle (h'k')$ a současně všechny vnitřní body úhlu $\sphericalangle (h',k')$ leží na dané straně a', což značíme

$$\sphericalangle (h,k) \equiv \sphericalangle (h',k').$$

Každý úhel je shodný sám se sebou, t. j. platí vždy

$$\sphericalangle (h,k) \equiv \sphericalangle (h,k) \quad \text{a} \quad \sphericalangle (h,k) \equiv \sphericalangle (k,h).$$

III,5. (Po provedené definici trojúhelníka, kterou opět neuvádím.) Platí-li pro dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ kongruence

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C',$$

pak je také splněno

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{a} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'.$$

Než uvedeme další dvě skupiny axiomů, všimneme si zejména dvou axiomů této skupiny III., a to axiomu III,1. a III,4. Na těchto axiomech je dobře patrno, jak soustava, jež chce býti vybudována nezávisle na soustavě logické, musí výslovně uváděti i *zvláštní případ principu identity,* jenž je v logické soustavě dokázatelnou větou. Týká se to těch míst v axiomech, kde se mluví o shodnosti jistého předmětu ssebou samým. Tato poznámka by se dala rozšířiti i na další vztahy v axiomech této skupiny. Nedostatek úspornosti soustav zakládaných nezávisle na logice, je patrný již také proto, že tak jako tak musí při odvozování se uchýliti k logickým řetězům a nevystačí stejně sama ssebou, t. j., se svými prostředky.

IV. Axiom o rovnoběžkách.

IV,1. Budiž a přímka, A bod mimo tuto přímku: pak existuje v rovině, určené přímkou a jakož i bodem A nejvýše jedna přímka, procházející A a neprotínající a.

V. Axiomy spojitosti.

V,1. Archimedův axiom: Budiž A_1 libovolný bod na přímce mezi body $A, B,$ libovolně položenými; sestrojme pak body $A_2, A_3, A_4, \dots$ tak, že A_1 je mezi A a A_2, A_2 *mezi* A_1 a A_3, dále A_3 mezi A_2 a A_4 atd. a kromě toho úsečky $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots,$ jsou si rovny: pak existuje v řadě bodů $A_2, A_3, A_4, \dots,$ vždy takový bod A_n, že B je mezi A a A_n.

(Jednoduševji, ale méně přesně řečeno, vyjadřuje tento axiom skutečnost, známou z měření: úsečku libovolné délky je možno měřiti libovolně zvolenou jednotkou — po konečném počtu kroků musí kladené měřítko přesáhnouti druhý koncový bod úsečky. Axiom sám je znám nyní pod jménem Archimedovým, je však ve skutečnosti větou mnohem starší. Zcela jistě byl vědomě formulován již Eudoxem, vynikajícím řeckým matematikem (geometrem), jenž žil v letech 408—355 před Kristem.)

V,2. Axiom úplnosti: prvky geometrie (body, přímky, roviny) jsou soustavou předmětů, jež není již schopna rozšíření při zachování platnosti jmenovaných axiomů, t. j.: k soustavě bodů, přímek a rovin není možno připojiti jinou soustavu předmětů tak, aby v soustavě tímto připojením vzniklé byly všechny uvedené axiomy I.—V. splněny.

Tak zní Hilbertova soustava axiomů geometrie. Poslední axiom V,2., axiom úplnosti, v původním vydání Hilbertovy knihy chyběl. Ukázalo se potom při kritice soustavy, k níž podstatným způsobem přispěl na příklad Poincaré (velká stať je právě otištěna v citované knize „Derniéres pensées"), že to nejsou jen body, přímky a roviny v obvyklém slova smyslu, jež soustavě také vyhovovaly. Byly to také útvary jiné a bylo nutno axiomy tak doplniti, aby předměty, jež jsou soustavou stanoveny, byly také jednoznačně stanoveny. Toho bylo docíleno právě axiomem V,2., který má mezi všemi ostatními zcela zvláštní postavení. Je výrokem o všech ostatních výrocích skupin I.—V,1. a zaručuje tolik: nazíráme-li na všechny axiomy jako na soustavu *prázdných* forem, jakýchsi kadlubů, jež mají býti žádoucími předměty vyplněny (u nás body, přímky a roviny a nic jiného), pak V,2. způsobí, že tyto formy pojmou jen ony žádané předměty. Právě taková je situace pro uvedené axiomy elementární aritmetiky dříve uvedené, kterým nevyhovuje jen řada přirozených čísel, nýbrž i útvary jiné (t. zv. cykly, jichž bližší výklad by nás zavedl daleko, takže o nich jednati nebudeme). Bude tedy nejlépe, promluvíme-li si obecně o závěrových axiomech soustav. Axiomatické soustavě mohou vyhovovati různé modely a různé struktury. Co je model a co je struktura, právě objasníme.

V soustavě axiomů (na př. elementární aritmetiky), jež je formalisována, jsou určité proměnné, buď volné nebo vázané operátorovými znaky. Dosadíme-li za proměnné nějaké konstanty, v jmenovaném případě tedy na příklad čísla přirozené řady číselné, nebo členy posloupnosti, jež má elementy vesměs různé, dostáváme z implicitních definicí, jež stanoví operace s předměty výroky, a to tautologické výroky o celých číslech. Ta celá čísla jsou pak modelem oné axiomatické soustavy. Posloupnost o nekonečném počtu různých členů může býti také jejím modelem.

K objasnění pojmu struktury je nutno zavésti pojem isomorfie. Mějme dvě relace

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \quad \text{a} \quad B(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n).$$

Podaří-li se najíti novou relaci takovou, aby vždy ‚x_1' bylo touto relací přiřazeno ‚y_1', podobně ‚x_2' proměnné ‚y_2' atd., dále, je-li toto přiřazení jedno-jednoznačné a konečně, podaří-li se pomocí této relace dokázati ekvivalenci

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \backsim B(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n),$$

pak říkáme, že jsme korelací dosáhli isomorfie relací A

a *B*. Speciální relace, jež spíná příslušná ‚x_i‘ s ‚y_i‘, se nazývá korelátor.

Dvě relace, jež je možno uvésti ve vztah isomorfie, mají stejnou strukturu. Tímto způsobem objasnila logika pojem, který hraje tak významnou roli v moderní vědě, a to nejen ve vědách exaktních, nýbrž v mnohých oborech duchovědných. Vzpomeňme jen, kolik vědeckých výzkumů bylo věnováno struktuře, ať již společnosti, ve studiích sociologických, anebo v psychologii a konečně i v estetice. Nechci tvrditi, že právě popsaný pojem struktury je vždy vhodný pro aplikaci mimo obor exaktních věd, je však nicméně velmi přesně vysloveným požadavkem, který musí struktura vždy splniti. Všimněme si ještě zajímavého rysu na pojmu struktury. Neřekli jsme vlastně vůbec, co to struktura je, řekli jsme pouze, *kdy* mají dvě relace stejnou strukturu. To stačí. Struktura je podle toho společný predikát, jejž mají všechny isomorfní relace určitého druhu. Tento společný predikát je pak jejich struktura. Upozorňuji tu na případ, který jsme již své doby uvedli: definici kardinálního čísla. Tam vlastně také nebylo řečeno přímo, co je kardinální číslo: stačilo říci, kdy mají dvě množiny stejné číslo kardinální. Způsob výměru obou pojmů je obdobný.

Protože modely, jak jsme se dozvěděli, vznikají dosazením konstant za proměnné do logických funkcí, přenáší se i na modely isomorfie, o níž jsme mluvili. Isomorfní není na příklad přirozená řada číselná a jakýkoli její konečný úsek. Tam nenajdeme totiž kolerátor, který by isomorfii přivodil. Jsou však isomorfní tyto dva modely: předměty na euklidovské kouli a předměty neeuklidovské geometrie, jež se dá interpretovati jako geometrie na euklidovské kouli. Oba tyto modely vyhovují soustavě axiomů, kde axiom o rovnoběžkách je nahrazen axiomem jiným. Aby nevzniklo nedorozumění, upozorňuji, že se stanoviska axiomatické soustavy jsou *oba* druhy předmětů, jež jsou vázány korelátorem, modely. V matematické literatuře se často pod modelem neeuklidovské geometrie jednoho druhu rozuměla právě geometrie na euklidovské kouli, jež byla tedy pro onu názoru nepřístupnou geometrii jakýmsi názorným modelem. V tomto smyslu slova model neužíváme. Isomorfní je dále na příklad soustava všech reálných čísel na jedné straně a soustava poměrů úseček tohoto tvaru $\overline{OX} : \overline{O1}$, značíme-li jako obvykle písmenou O počáteční bod reálné osy, 1 bod jednotkový a znakem X libovolný reálný bod na ose. Každému x v oboru čísel reálných odpovídá jeden a jen jeden poměr uvedeného tvaru v oboru předmětů rovinné euklidovské geometrie. Mimochodem řečeno, tato korelace a z ní vyplývající isomorfie je tak závažná, že se někteří matematikové nerozpakují tuto větu o isomorfii prohlásiti za axiom. V každém případě by to byl axiom zvláštní povahy, axiom, jenž by byl spojujícím členem mezi geometrií a aritmetikou.

Axiomatickou soustavu je pak možno vyplniti modely i strukturami, jež nemusí býti stejné, lépe řečeno: modely nemusí býti isomorfní a souhrny předmětů, jež vyhovují soustavě, nemusí míti stejnou strukturu.

Tím konečně jsme připraveni na typ konečných axiomů, jako je axiom úplnosti V,2. Takový závěrový axiom musí vybrati mezi všemi možnými modely nebo mezi všemi možnými strukturami takové, které již nelze rozšířiti, eventuelně, které již nelze zúžiti. To znamená, že vybírá, resp. vynutí vybrání jistých největších anebo nejmenších representantů pro soustavu.

Formalisujeme-li podmínky pro strukturu a podmínky pro model, dostaneme dvě, resp. čtyři definiční rovnice pro závěrovou podmínku. Uvedeme tu jen obě minimální podmínky, maximální jsou zcela obdobné. Rovnice zní

$$Min_s\,(F;M) \equiv_{Df} (\overline{EN})\,[N \subset M\,.\,\overline{Ism}\,(M,N)\,.\,F(N)].$$

$$Min_{mod}(F;M) \equiv_{Df} (\overline{EN})\,[N \subset M\,.\,N \neq M\,.\,F(N)].$$

Pod funkčním znakem ‚*F*' rozumíme znak, jenž je ekvivalentní (definicí) s funkcí, již bychom obdrželi konjunkcí všech axiomů. Mysleme si na levé straně definiční rovnice konjunkci všech axiomů, v těch přicházejí různé funkce rozličných proměných oboru, o který jde. Tyto všechny funkce můžeme definitoricky vyjádřiti jedinou funkcí *F*, jejíž proměnné musí býti ty, které přicházejí ve zvláštních funkcích jednotlivých axiomů. Výrazy ‚*N*' a ‚*M*' jsou zkratky za řady proměných, jež se ve funkci *F* vyskytují. Není to tedy jedna proměnná. Nový vztah ‚$\subset$', jehož je užito mezi znaky ‚*M*' a ‚*N*', vyjadřuje, stručně řečeno, že v našem případě je ‚*N*' obsaženo v ‚*M*', je to podobný vztah, jako je vztah podmnožiny k množině. První rovnice vyjadřuje svojí pravou stranou, že neexistuje takové ‚*N*', jež by bylo obsaženo v ‚*M*', při tom ‚*N*' a ‚*M*' by nebylo isomorfní a platilo by ‚*F(N)*'; t. j. neexistuje struktura, jež by splňovala konjunkci všech axiomů, při tom by nebyla isomorfní s ‚*M*' a obsažena v ‚*M*'. Druhá definiční rovnice vyjadřuje podobnou podmínku pro model axiomatické soustavy. Protože jde o model a ne o strukturu, stačí, když podmínka ‚$\overline{Ism}(M,N)$' je nahražena podmínkou ‚$N \neq M$'. Pro struktury je typická podmínka isomorfie, kdežto pro modely stačí podmínka různosti. Podmínky pro modely resp. struktury maximální jsou zcela obdobné, změna proti uvedeným dvěma podmínkám se týká, jak patrno, pouze prvního členu v závorce levé strany. Formalisace podmínek, jež jsme uvedli, pochází od Carnapa (Erkenntnis, roč. VI., str. 166 a násl.), problémy s ní spojené nejsou ještě úplně vyjasněny, ale i tu, v tak obtížné otázce, pomohla logika alespoň k zřetelnému poznání stavu věcí. Je to příspěvek k stanovení matematického předmětu, jednoznačné stanovení jeho není, jak patrno, vždy věc snadná.

Možná, že čtenáře napadá, proč taková závěrová podmínka nebyla uvedena u soustavy základních vět výrokového počtu, nebo u funkčního počtu. Nesmíme zapomenouti, že logické věty, jež tam byly formalisovány, jsou základem pro celý logický mechanismus, to nejsou axiomy. Tam se nestaráme o náplň nějakými jednoznačně stanovenými předměty, jež by měly význam pro matematiku. To jsou tautologické transformační podmínky pro výrazy vůbec. Axiomatická soustava se naproti tomu zabývá stanovením, a to co možno nejpřesnějším stanovením jistých předmětů ryze matematických, jde o to, aby do ní nevnikaly předměty, jež tam míti nechce.

Jakým způsobem se v axiomatické soustavě zaručí bezespornost axiomů? Před nedávnem jsme si vyjmenovali soustavu axiomů geometrie,bude nejlépe, promluvíme-li si, jak je to provedeno tam. V soustavě geometrie to učinil Hilbert tak, že opřel geometrii o analysu, chceme-li, o aritmetiku. Zobrazil synthetickou geometrii prostě na geometrii analytickou. Analytická geometrie je soustava isomorfní k soustavě synthetické geometrie, každému předmětu a vztahu v této geometrii odpovídá jistá analytická forma a analytický vztah. Je-li aritmetika bezesporná, je také geometrie bezesporná. Bezespornost aritmetiky se v tomto případě *předpokládá*, takže tato methoda důkazu bezespornosti není než přesunutím problému na jiné pole. V tom je nevýhoda axiomatických soustav, jež užívají mimologických prostředků, t. j., jež nevyužijí možnosti, vyvíjeti pojmy z logiky samé. Tu je bezespornost zaručena bezesporností logického systému. Měli bychom se tedy ptáti po ní. Viděli jsme, že se dá zaručiti v případě výrokového počtu. Ale viděli jsme také, že výrokový počet zdaleka nestačí na výstavbu matematiky tak, jak ji potřebujeme, protože nemá dosti výrazových prostředků. U funkčního počtu se dá bezespornost zaručiti jen jistým umělým obratem, jenž není prost kritických výtek a před intuicionisty by jistě neobstál. Použijeme proto příležitosti, vyložiti, jak by se dala zaručiti bezespornost ještě jiným způsobem, velmi zajímavým a poměrně novým.

Bezespornost by bylo možno zajistiti takto: víme, a také jsme si to dokázali, že sporná soustava je taková, v které je možno dokázati *každou* větu. Kdyby bylo možno sestrojiti v nějaké soustavě větu, jež by dokázatelná *nebyla*, také však ne vyvratitelná, pak by byla zaručena bezespornost té soustavy jednoduše proto, poněvadž v ní existuje jedna věta, jež dokázatelná *není*. Aby soustava byla sporná, musela by býti jejím důsledkem *každá* věta, a to by splněno nebylo. Pod dokázatelnou větou rozumíme jako obvykle větu, jež je důsledkem základních logických vět, případně logických vět a axiomů, jež jsou do základu soustavy přibrány, pod větou vyvratitelnou pak větu, jejíž negace je v soustavě dokázatelná. Důležité je, že při sestrojení nedokázatelné věty, jakož i při všech operacích, jichž užíváme, nesmíme vystoupiti ze soustavy, v které jsme, jinak řečeno, nesmíme mluviti jinou řečí, než řečí onoho systému S, v němž větu vyslovíme.

Protože příklad věty nedokázatelné se týká každé logické soustavy, v níž je mimo to formalisována *aritmetika*, byl by naznačený typ důkazu postačující pro důkaz bezespornosti jak logiky tak také aritmetiky jedním jediným společným závěrem. Příklad je tak zajímavý, že se pokusím podati jeho hlavní myšlenku pokud možno srozumitelně, ponechávaje stranou velký aparát formální, jenž je k důkazu jinak nezbytný. (Důkaz pochází od Gödela, uveřejněn v r. 1931 ve vídeňských „Monatshefte f. Math. und Physik" pod názvem „O větách Principia Mathematica a příbuzných soustav, formálně nerozhodnutelných", důkaz zjednodušil Carnap v cit. díle, odst. 19., resp. 35., 36.) Příklad je zároveň ukázkou t. zv. aritmetisace umělé řeči.

Logistické značky všech druhů, tedy na příklad znaky pro „spojení" výroků, jako „V", „ · ", „(" (levá závorka), „→" (implikační šipka) a j., dále proměnné a konstanty výrokové, funkce, jejich argumenty proměnné i zvláštní hodnoty, to vše je možno jedno-jednoznnačně přiřaditi číslům přirozené řady číselné. Jednojednoznačně znamená tu jako všude v matematice, že dvěma různým znakům musí odpovídati také dvě různá přiřazená čísla, jedné značce jedno číslo a naopak. Zaručiti takové přiřazení, je technicky možno více způsoby.

Ozřejmíme přiřazení příkladem: budiž soustava, o kterou jde, funkční počet. V této soustavě není sice formalisována celá aritmetika, ale to pro náš příklad nemá význam. „x" budiž v této soustavě proměnná, jíž bude přiřazeno číslo 3 (nějaké prvočíslo větší než 2). Znaku ‚=' nechť je přiřazeno číslo 13. Číslo 7 je možno v této soustavě definovati, jak víme. Smluvme si pravidlo, že definovaným číslům v naší soustavě přiřadíme čtverce prvočísel, větších než 2. Přiřadíme tedy číslu 7 třeba čtverec 3^2. Potom lineární rovnice, již můžeme v soustavě funkčního počtu celou vyjádřiti, „$x = 7$", bude míti k sobě přiřazenu posloupnost čísel 3, 13, 9. Úmluvu o přiřazení je možno ještě zdokonaliti v tom směru, že rovnici právě napsané nebude odpovídati jen posloupnost tří čísel, nýbrž číslo jediné (na př. vhodně definovaný součin jejich). Nazpět je možno každou takovou posloupnost přeložiti do znaků funkčního počtu, anebo jedno číslo samo podle rozkladu v jeho prvočinitele tak přeložiti.

Jiným příkladem by bylo důkazové schema, odvozování důsledku. Je-li nějaká věta v soustavě S dokazatelná, je posledním členem konečné posloupnosti formulí. Každé větě i axiomu odpovídá v aritmetickém přiřazení nějaká posloupnost čísel, celý důkaz je tedy konečnou posloupností jistých konečných posloupností a dokázané větě je přiřazena právě poslední z nich.

Posloupnosti, resp. čísla jim přiřazená, dále posloupnosti z posloupností, resp. složitější čísla jim přiřazená je možno zkoumati čistě aritmeticky: hledati takové vlastnosti jako je dělitelnost, tvar rozkladu v prvočísla, (má-li na př. čtverce prvočísel a vyšší mocniny jejich), srovnávání podle velikosti a j. Ukazuje se pak, je-li přiřazení vhodně voleno, že každé *syntaktické* vlastnosti v řeči soustavy S odpovídá jistá *aritmetická* vlastnost. Naopak zase je možno aritmetické zákonitosti přiřazených čísel zpět interpretovati jako vlastnosti syntaktické. To nám prozatím postačí.

V soustavě S, v níž je také formalisována aritmetika (to je předpoklad!), jsou jistě predikáty jedné volné proměnné, kde volná proměnná probíhá elementy nějaké podmnožiny, obsažené v množině všech přiřazených čísel. Mysleme si teď tyto predikáty, nebo jinak tyto funkce jedné proměnné, srovnány v posloupnost tak, že dvěma různým znakům odpovídají různé aritmetické indexy. Nazveme všechny predikáty, o něž jde, společnou písmenou R a indexem ‚n', připojeným k funkčnímu znaku, je odlišíme. Dá se dokázati, že srovnání všech $R_i(u)$ s volnou proměnnou ‚u' v posloupnost podle indexů je proveditelné.

Vyjádříme ještě symbolem $[F(u)\,;\,x]$ okolnost, že za volnou proměnnou funkce ‚F' bylo dosazeno ‚x'. Také tento symbol lze aritmeticky interpretovati. Po této přípravě přistoupíme ke konstrukci nerozhodnutelné věty. Budeme definovati novou třídu, stanovenou predikátem ‚K' takto

$$K(n) \equiv_{Df.} \overline{\text{Dokaz}}\ [R_n(x)\,;\,n].$$

‚n' je tedy ve třídě stanovené funkčním znakem K, není-li dokázatelno, že za volnou proměnnou n-tého predikátu je možno dosaditi číslo ‚n'.

Tato nová třída, určená predikátem ‚K', vede k nerozhodnutelné větě a patří také mezi funkce s jednou volnou proměnnou. Toto ‚K' se musí totiž shodovati s jedním z predikátů naší posloupnosti R_1, R_2, R_3, ... Budiž tedy ‚K' shodné s ‚R_i'. Pak tvrdíme, že

$$[R_i(x)\,;\,i]$$

je nerozhodnutelná věta. Důkaz:

1. Kdyby bylo dokázatelno

$$[R_i(x)\,;\,i],$$

t. j., že za volnou proměnnou ‚x' predikátu ‚R_i' možno dosaditi ‚i', platilo by podle definiční rovnice

$$K(i) \equiv \overline{\text{Dokaz}}[R_i(x)\,;\, i],$$

ale pravá strana této rovnice tvrdí opak.

2. Kdyby věta byla vyvratitelná, t. j. kdyby bylo dokazatelno

$$\overline{[R_i(x)\,;\, i]},$$

pak by platilo

$$\overline{K}(i) \equiv \overline{\overline{\text{Dokaz}}}[R_i(x)\,;\, i]\,;$$

nezapomínejme totiž, že ‚K' je shodné s ‚R_i', negace

$$[R_i(x)\,;\, i]$$

tedy značí, že ‚i' za volnou proměnnou do ‚R_i' dosaditi nelze, čili že neplatí ‚$K(i)$'. To je vyjádřeno levou stranou rovnice. Pravá strana má však dvojnásobnou negaci a tedy zase popírá stranu levou.

Formulí

$$[R_i(x)\,;\, i]$$

je tedy sestrojena nedokazatelná věta v soustavě S, v níž je současně formalisována aritmetika. Podle obecné úvahy, kterou jsme provedli, byla by tak zaručena nejen bezespornost logiky, nýbrž současně i aritmetiky, jež je součástí celé soustavy S, v níž byla odvozena nedokazatelná věta. Význam takového důkazu by byl mimořádný uvážíme-li, kolik práce bylo věnováno důkazům bezespornosti aritmetiky. V aritmetice samé je totiž řada problémů, které ještě dodnes nebyly řešeny. Nevíme tedy, co může jejich řešení přinésti. Vzhledem k velkému odporu, jejž kladou některé tyto proslulé problémy i novodobým mohutným prostředkům (poslední věta Fermatova, páry prvočísel tvaru p, $p + 2$, a jiné mnohé) není daleko myšlenka, přijmouti některou z takových vět za axiom. Byla-li by to dokazatelná věta, je zařazení takového nového axiomu zbytečné. Horší situace by vznikla, kdyby se při vyšetřování některého takového problému ukázal spor, tak jako se tomu stalo v theorii množin, než byla formálně dokonaleji ustavena. Přes nepatrnou pravděpodobnost takového překvapení není tato možnost vyloučena.

Věta o bezespornosti soustavy prokázaná nedokazatelnou formulí, by ukazovala k tomu, že k takovému překvapení nedojde. Tím by také byla samočinně zaručena bezespornost geometrie, kde jsme na tento problém po prvé narazili. Bezesporností aritmetiky by byla zaručena bezespornost analytické geometrie a tedy i odpovídající isomorfní soustavy geometrie synthetické.

Věta Gödelova o existenci nedokazatelné věty však nemá tento dosah. Je totiž odvozena za předpokladu bezespornosti soustavy S, v níž se celý důkaz provádí. Proto není možno výsledku užíti k cíli, jejž jsme naznačili. Výsledek Gödelův není však přesto bez zajímavosti, poukazuje na jistou velmi obecnou vlastnost některých logických soustav, jež se dají aritmetisovati a bylo by jej možno stručně vystihnouti asi tak, že lze formulovati v soustavě S problémy, na jichž odpověď vlastní prostředky soustavy nestačí.*)

Důkaz sám má jedno choulostivé místo. Třída „K" je definována pomocí všech tříd, daných predikátem o jedné volné proměnné. Logický typ pravé strany definiční rovnice se má shodovati s logickým typem strany levé. V té však je predikát P_i a to jako argument funkce „Dokaz". Tu by tedy bylo porušeno typové pravidlo, o němž jsme mluvili. Dá se však bez aritmetisace

*) Gödelova věta upoutala na sebe velkou pozornost zejména matematiků a logiků amerických a navodila celý velký komplex nových otázek matematických soustav.

najíti cesta, jak i tuto obtíž odstraniti, takže důkaz, jak dnes vypadá, vydrží všechny kritické nápory, jež bychom s dnešními prostředky mohli podniknouti. Po této obtížnější odbočce v otázkách bezespornosti logických soustav se vrátíme k axiomatice geometrie, abychom získali názor, co všechno je možno z takové soustavy získati.

Závislost resp. nezávislost geometrických axiomů na sobě lze zkoumati číselným modelem, tak vhodně voleným, že v něm jsou všechny axiomy splněny s výjimkou jednoho, o jehož nezávislost právě jde. Tato methoda je nám již známa z výkladu o nezávislosti základních vět výrokového počtu. Tady je situace složitější, ale princip zůstává týž.

Jako ukázku si zvolíme důkaz nezávislosti axiomu V,2., závěrového axiomu, nejpodivnějšího axiomu soustavy. (V dalších výkladech je použito citované Hilbertovy knihy „Základy geometrie", pokud jde o technické provedení důkazů.) Abychom dokázali nezávislost axiomu V,2., mysleme pouze v číselném oboru, jenž bude vytvořen takto: základem oboru Ω je číslo 1, přípustné operace, jež jsou všechny konečné, jsou sčítání, odčítání, násobení, dělení a operace $|\sqrt{1+\omega^2}|$ (prostá hodnota odmocniny), kde ω^2 je již číslo, získané některou z předchozích operací.

Pár čísel (x, y) z tohoto oboru, z něhož již nevystoupíme, nechť odpovídá bodu, poměr tří čísel $u : v : w$ odpovídá přímce $(u, v \neq 0)$; okolnost, že bod x, y leží na přímce, vyjádříme, jak známo, rovnicí

$$ux + vy + w = 0.$$

Axiomy skupin I,1. ÷ 3. a IV. budou tak splněny, jak se lze přesvědčiti. Čísla oboru jsou reálná a dají se srovnati co do velikosti, takže i axiomy skupiny II., jakož i Archimedův axiom budou v platnosti. Úsečkami a úhly se zachází stejně jako v obvyklé analytické geometrii, lineární transformace

$$x' = x + a,$$
$$y' = y + b,$$

vyjadřuje rovnoběžný posuv úseček i úhlů. Jde jen ještě o to, jesli otáčením nevzniknou nová čísla, jimiž by se obor měl rozšířiti.

Budiž počátek označen jako obvykle $O(0, 0)$, dále mějme ještě bod $E(1, 0)$ a libovolný bod třeba v prvním kvadrantě roviny souřadné označme $A(a, b)$. Otočme celou rovinu o úhel $\sphericalangle EOA$, takže pár bodový (x, y) přejde v bodový pár (x', y') a to transformačními vzorci pro otočení

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^3}} y$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} x - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} y.$$

Čísla $\sqrt{a^2 + b^2}$, jež přicházejí v jmenovatelích, lze napsati jednoduše ve tvaru $b \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$, což jest číslo našeho oboru Ω, protože je to číslo tvaru $\sqrt{1 + \omega^2}$, násobené zase jen číslem z oboru Ω. Nemusili jsme tedy z oboru vystoupiti (mimochodem řečeno, je teď dobře patrno, proč byl obor Ω právě tak zvolen, podnět k operaci tvaru $\sqrt{1 + \omega^2}$ jde právě z transformačních rovnic pro otočení) a protože posunutí a otáčení souvisí s axiomy shodnosti, platí také skupina III. v aritmetické interpretaci našeho oboru.

Jediný axiom úplnosti tu neplatí. Nemáme totiž ve svém oboru Ω všechny body a následkem toho všechny přímky, máme jen ty elementy, jež odpovídají aritmetickému oboru Ω a tam jsou jistě „mezery", protože kromě čísel oboru Ω existuje ještě mnoho čísel jiných. Zcela jistě na příklad v tomto oboru chybí číslo π, takže bod s oběma souřadnicemi rovnými π by prostě v naší geometrii neexistoval. Tedy tato geometrie neodpovídá běžné geometrii analytické, jak je probírána na školách. Teprve doplněním oboru Ω na obor *všech reálných čísel* se dostane geometrie, již měl na mysli Descartes. Nezávislost axiomu V,2. je tak ukázána existencí geomterie, v níž není sporů, ale v níž axiom V,2. neplatí. Tato geometrie se svými prostorovými mezerami, nahlíženo se stanoviska běžné euklidovské geometrie, se bez posledního axiomu celé soustavy obejde. Poznámka, již jsme učinili, míří dál, než by se na první pohled zdálo. Vzpomeňme si, že poslední skupina axiomů geometrie se nazývala: axiomy spojitosti. Každý by očekával, že se bude také výslovně o spojitosti, která je pro běžné představy geometrie tak typická, v obou posledních axiomech mluviti. Místo toho je tam mluveno o axiomu Archimedově, který na první pohled nijak nevypadá, že by mohl míti ke spojitosti vůbec vztah, a poslední axiom úplnosti je pojmu spojitosti naprosto vzdálen. Ale jen zdánlivě. Viděli jsme příklad geometrie, jež má své mezery v prostoru, opět říkám, viděno se stanoviska Descartovské geometrie, a teprve axiom úplnosti umožní geometrii spojitého prostoru. Axiom V,2. je tedy právem zařazen pod axiomy spojitosti.

Předchozí úvahu by bylo možno ještě doplniti výsledkem z novější doby. Význačný sovětský matematik Kolmogorov uveřejnil spolu s Pontrjaginem v Annals of Mathematics 1932 (2) (33) definitivní výsledek, jehož obsah stručně podáme. Nazveme tělesem T takovou soustavu elementů, pro něž jsou zavedeny dvě operace: sčítání ($a + b$) a součin ($a . b$) a to tak, že dvěma elementům v daném pořadí (lišíme tedy na př. ‚$a + b$' od ‚$b + a$', podobně ‚$a . b$' od ‚$b . a$') odpovídá příslušný element ‚součet' a ‚součin' *jednoznačně* a oba tyto elementy patří také do soustavy T. Pak platí, že tělesem geometrie v uvažovaném smyslu „spojité" je buď těleso reálných čísel nebo obyčejných komplexních čísel Gaussových ($a + ib$). První možnost nastane, položíme-li jako vedlejší podmínku: ke každé ploše 2. stupně (v rovině: kuželosečce) existuje přímka, jež ji *neprotíná*. Druhá možnost nastane, předepíšeme-li, že každá plocha druhého stupně (v rovině: kuželosečka) je proťata *každou* přímkou ve dvou bodech (tato podmínka vede ovšem také k průsečíkům, jež nejsou reálné).

Mnohem zajímavější výsledek však dostaneme, vynecháme-li předposlední axiom V,1., t. j. axiom Archimedův. Ukáže se, že je nutno současně vynechati také axiom V,2. Hilbert k tomu účelu sestrojil zvláštní číselný obor, v němž není splněn Archimedův axiom. Na srovnání uvádím jen, že tento axiom platí také pro čísla reálná, což je snadno patrné, interpretujeme-li si jeho geometrické vyjádření aritmeticky. Konstrukce oboru, v němž V;1. neplatí, jest tato: sestrojíme obor $\Omega(t)$ všech algebraických funkcí čísla t, jež vzniknou z t čtyřmi základními úkony početními a ještě operací $|\sqrt{1 + \omega^2}|$, při tom ω^2 je funkce t, jež vznikla dříve již na základě některé z jmenovaných operací. Obor $\Omega(t)$ má jen reálné a jednoznačné funkce veličiny t (prostá hodnota odmocniny!). Algebraické funkce t jsou všechny tvaru

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_n t^n,$$

což má ten důsledek, že každé $F(t)$ je rovno nule nejvýše po tolik hodnot t, kolik ukazuje stupeň funkce F (Víme, že rovnice n-tého stupně má právě n kořenů, některé mohou splývati.) Volíme-li tedy t dosti vysoké, bude hodnota $F(t)$ od jistého t počínajíc, trvale kladná nebo trvale záporná.

Na tyto algebraické funkce t pohlížejme teď jako na zvláštní druh čísel. Jsou-li a, b různá čísla oboru $\Omega(t)$, tedy různé algebraické funkce oboru $\Omega(t)$, pak je můžeme srovnati co do velikosti tak, ze $a > b$ tehdy, když $a - b$ je pro dostatečně velké hodnoty t stále kladné, jinak je $a < b$. Je tedy možné srovnání co do velikosti, které hraje podstatnou roli v axiomech uspořádání. Naproti tomu, ať volíme jakkoli vysoké n kladné, a t číslo z oboru $\Omega(t)$, bude vždy $n < t$, protože $n - t < 0$ pro dosti veliká t. (Číslo n je vždy v oboru $\Omega(t)$, protože je tam podle definice tohoto oboru číslo $\frac{t}{t} \doteq 1$, tedy je tam také součet n jednotek.) Z toho plyne, že libovolný násobek jednotkové úsečky je vždy menší než číslo t, Archimedův axiom neplatí.

Geometrie, jež se tak vybuduje, má všechny analogické vlastnosti, jako předchozí, má také ve srovnání s obvyklou analytickou geometrií „mezery" (sama v sobě jich nemá, protože o možném rozšíření nic neví), ale neplatí v ní axiom V,1. Každý bod t na reálné ose je *nedosažitelný* konečným počtem jednotkových úseček, nanášených vedle sebe směrem k onomu bodu.

Další podivná geometrie, o které se již jen stručněji zmíníme, je geometrie, v níž neplatí Pascalova věta. Pascalova věta je jednou z hlavních vět projektivní geometrie a má značný význam i prakticky konstruktivní. Bývá obyčejně vyslovena pro kuželosečku, ale my ji tu v jejím obecném znění nepotřebujeme, stačí nám její zvláštní případ. Význam této užší formulace je ihned patrný z obrázku, jejž si snadno pořídíme k jejímu znění: A, B, C je trojice bodů na jedné přímce. A', B', C' je trojice bodů na jiné přímce, jež první přímku protíná. Při tom nechť žádný z uvedených šesti bodů nesplývá s průsečíkem obou přímek. Platí pak:

$$CB' \parallel BC' \,.\, CA' \parallel AC' \text{ implikuje } BA' \parallel AB'.$$

Vztah rovnoběžnosti spojnic značíme obvyklým znakem „$\parallel$" mezi znaky pro obě úsečky, o něž jde. Důkaz tohoto zvláštního případu Pascalovy věty (když kuželosečka degeneruje na dvě přímky, jež se protínají) se dá provésti pomocí skupin I,1. ÷ 3. a II., III., IV. Pascalova věta umožňuje geometrický důkaz rovnice $ab = ba$ čili záměnnosti součinu. V aritmetice bylo již dříve známo, že existují soustavy, kde neplatí pravidlo o záměnnosti součinu. Jsou to na příklad komplexní čísla o větším počtu komplexních jednotek než mají čísla tvaru $a + ib$. Takovými čísly jsou kvaterniony anglického matematika Hamiltona, jež hrály značnou roli v theoretické fysice 19. stol.; jiným příkladem jsou matice, dříve pouze předmět matematického studia a dnes nepostradatelný předmět moderní fysiky. Součin dvou kvaternionů není obecně záměnný, stejně tak není obecně záměnný součin dvou matic. Okolnost, že součin dvou matic není záměnný, je formálním důvodem pro Heisenbergovu relaci neostrosti, jež způsoblia tolik hluku v posledenějším období moderní fysiky v souvislosti s determinismem. Tedy nezáměnné součiny jsou a dokonce i v aplikacích matematiky v hojném užívání.

Zavedeme-li soustavu číselnou, kde neplatí záměnnost součinu, do geometrie, neplatí v ní Pascalova věta, neplatí v ní také zpětně vzato některé axiomy soustavy. V takové geometrii by se nerovnaly sobě obsahy dvou obdélníků, jež by se lišily pouze tím, že jeden by spočíval na straně *a*, druhý na straně *b*, jinak by byly stejné. Je tedy patrno, že důsledkem Pascalovy věty musí býti nějaká změna v axiomech shodnosti. Touto změnou a jejími dalšími podrobnostmi se již zabývati nebudeme.

Důsledky, jež jsme ukázali vzhledem k soustavě axiomů geometrie, mají tento smysl: je-li již tak prostudován mechanismus matematických předmětů a vztahů, jež je váží, můžeme se odvážiti změn logických premis v takové míře, že dřívější matematika by byla takový krok považovala za pochybený, prostě nemožný. Co kdysi bylo revolučním činem, lze dnes vyložiti „avec une parfaite tranquillité", jak se vyjádřil o Hilbertově soustavě právě Poincaré v citované knize.

Tím není nikterak snížen význam činu, jaký podnikl na příklad Lobačevský vzhledem k novým možnostem geometrie. Jeho čin byla revoluce proti filosoficky sterilnímu názoru na jedinost prostoru a jeho apriorní zákonitosti. Právě takový čin umožnil pokrok ve vědě a vedl k prozkoumání mechaniky myšlení, jež dovoluje opravdu mluviti o neobvyklých oborech matematiky s naprostým klidem.