

Úvod do filosofie matematiky

Richardova antinomie

In: Otakar Zich (author): Úvod do filosofie matematiky. (Czech).
Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1947.
pp. 10–12.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403159>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

RICHARDOVA ANTINOMIE

„Hledejme nejmenší číslo celé, jež nelze definovati souborem slov, obsahujícím méně než jedno sto českých slov. Existuje takové číslo?“

A) Takové číslo existuje, protože zásoba vyjadřovacích prostředků české řeči není nevyčerpatelná, slovník české řeči je přece jen kniha nebo řada svazků. Proto je také konečný počet souborů slov, jež obsahují předepsaný počet slov, na př. 56 slov. Mysleme si nyní shrnuty všechny takovéto soubory o předepsaném počtu slov (od 1 do 99 slov), těch bude také konečný počet. Mezi všemi těmi soubory budou i výrazy, t. j. takové soubory slovních znaků, jež označují nějaký předmět; bude jistě mnoho takových výrazů, jež s definicí čísla nemají nic společného. Některé však, na př. výraz „nejmenší prvočíslo tvaru $8k + 1$ “ (t. j. 17) definují celá čísla. Protože všech souborů je konečně mnoho, je tím spíše i výrazů, definujících celá čísla, konečně mnoho a tedy musí býti i taková čísla, jež našimi soubory, resp. výrazy mezi nimi obsaženými definovati nelze. A mezi těmi je jedno a jen jedno číslo celé nejmenší.

B) Takové číslo neexistuje. Kdyby existovalo, bylo by definováno výrazem o menším počtu slov, než jedno sto slov: přímo výrazem z věty postavené v čelo tohoto odstavce. Tato věta však říká pravý opak.*)

Přemýšlíme-li chvíli o věci, zmocní se nás nepříjemný pocit, že tu není něco v pořádku, zatím je těžko říci kde.

*) Příklad je nepatrně pozměněnou formou antinomie, jak ji uvádí Poincaré: *Dernières pensées*, str. 103. Řešení Poincarého neuvádím, na svém místě uvedu řešení jiné.

Příklad, jež jsme uvedli, vypadá na první pohled velmi prostě a nezáludně. Nejedná se ani o nekonečném souboru, u kterého vždy můžeme být na nějaké překvapení připraveni. Úvaha, provedená v bodě A) se zdá být zcela v pořádku. Úvaha B) je však ve své stručnosti neméně přesvědčivá.

Pro nás bude Richardova antinomie východiskem k prvnímu rozhlédnutí po celé oblasti myšlení, jež nás bude zaměstnávat. Všimneme si teď několika momentů.

Slovní vyjádření. Richardova antinomie je vyjádřena slovy — tím se její myšlenková struktura sděluje. Každá myšlenka nepotřebuje slovní vyjádření, také každá struktura nepotřebuje slovní vyjádření. Při tom to mohou být myšlenkové struktury velmi složité. Tak třeba celé hudební myšlení skladatelovo, značně abstraktní ve své povaze, nebo výtvarné myšlení malířovo. Nejde nám teď o to, je-li možno takové myšlení slovy popsati nebo ne, ale o zásadní zjištění, je-li té slovní formulaci nutně třeba. Matematické myšlení tohoto slovního vyjadřování užívá napořád, nestačí-li historická řeč požadavkům přesnosti a ekonomie, doplní se značkovou řečí umělou nebo vůbec jen značkovou řečí. Není původ antinomie v ošemetném slovním vyjádření?

Předměty. Každý matematický myšlenkový pochod, tedy i naše antinomie, se zabývá nějakými předměty myšlení. V antinomii jsou těmito předměty myšlení čísla (jež prozatím bez bližšího vyšetření bereme jako předměty známé z běžné početní praxe), definice čísel, pak nějaké soubory takových definic. Ale ovšem mluvíme také o větách, jež pro definici čísla mají smysl, jež smyslu nemají. Mluví se tam také o výrazu „konečný“. Předměty myšlení však mohou být i jisté vlast-

nosti, na př. že všechna čísla definovaná souborem přípustných vět patří k sobě, aby se mohla odlišiti od čísel jiných, kde hledáme ono nejmenší číslo. Fakt, že ta čísla shrnouti lze, je také předmětem myšlení. Každý vztah, na př. okolnost, že to má býti *nejmenší* číslo, je *také* myšlenkovým předmětem.

Není některý z těch předmětů, o nichž mluví Richardova antinomie, špatně určen, není vůbec sporný — je-li, co je to sporný předmět?

Logika. Úvaha A) i úvaha B) patří, jak jistě každý nahlíží, do oblasti logiky. V matematice hraje logika *podstatnou* roli, ba, byl, jak již víme, učiněn pokus, vybudovati celou matematiku jako větev logiky.*) Není obtíž antinomie v tom, že logika nějak selhala, že nestačí na zvládnutí duchů, jež vyvolala? Velmi často se slýchá, že stará logika musí být nahrazena novou. I to si musíme v plném rozsahu objasnit. Uvidíme, že tak špatně stará antická logika nedopadla — byla jen jistým způsobem rozšířena a zobecněna.

Řešení Richardovy antinomie teď hledati nebudeme. Svoji službu vykoná tím, že nám dá první podnět k rozhodnutí, jíti věcem trochu více na kloub, uložit je do širšího prostředí, kde je lepší přehled a kde funkce a souvislosti jsou lépe patrné.

*) Frege koncem minulého století, Russell a Whitehead v prvním desetiletí našeho století.