Jaká je logická výstavba matematiky?

3. Obecné a existenční výroky

In: Miroslav Katětov (author): Jaká je logická výstavba matematiky?. (Czech). Praha: Jednota československých mathematiků a fysiků, 1946. pp. 20–28.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403135

Terms of use:

© Jednota československých mathematiků a fysiků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

3. OBECNÉ A EXISTENČNÍ VÝROKY

3·1. Obecné a existenční výroky. Z výrokového vzorce dostaneme výrok, když vhodným způsobem nahradíme neurčité. Tím vznikne výrok, který již neobsahuje žádnou neurčitou. Takový výrok budeme nazývat výrokem **individuálním.** Jsou však také jiné druhy výroků, které dostaneme, když vyjdeme z výrokového vzorce. Budeme se jimi nyní zabývat.

Všimněme si výroků „pro některá x je $x^2 - x = 2$" (tento výrok je pravdivý, neboť na př. $2^2 - 2 = 2$); „pro každé x je $x^2 - x = 2$" (tento výrok je nesprávný, neboť na př. není $3^2 - 3 = 2$). Smysl těchto výroků je jasný; po ryze formální stránce je zřejmé, že vzniknou z výrokového vzorce $x^2 - x = 2$" pomocí výrazu „pro některá x..." nebo „pro každé x..." Je jasné, že tímto způsobem můžeme vytvořit výroky z libovolného výrokového vzorce. Místo „pro některé..." můžeme také říkat „existuje... tak, že..."; logický význam obou výrazů považujeme — jak je to v matematice obvyklé — za naprosto stejný, takže na př. výroky „pro některé x je $x^2 - x = 2$" a „existuje x takové, že $x^2 - x = 2$" se liší jenom slovním tvarem.

Výrokům, které se utvoří z výrokového vzorce pomocí slov „pro některé..." nebo „existuje..." budeme říkat **existenční** výroky. Výrokům, které se vytvoří pomocí slov „pro libovolné..." nebo „pro každé..." nebo „pro všechny..." nebo pomocí jiného výrazu, který má stejný význam, budeme říkat **obecné** výroky. Výrazům „existuje", „pro některé", „pro každé" atd., pomocí kterých se tvoří obecné nebo existenční výroky, se někdy říká **logické operátory.**

Obecný výrok zastupuje vlastně všechny individuální výroky, které se dají vytvořit z daného výrokového vzorce. Dá se říci, že je jakousi „neomezenou konjunkcí" těchto individálních výroků. Tak na příklad obecný výrok „pro libovolné x je $(x+1)(x-1) = x^2-1$" znamená vlastně toto: „$(1+1)(1-1) = 1^2-1$ a také $(2+1)(2-1) = 2^2-1$ a také..." Podobně je existenční výrok vlastně jakousi „neomezenou disjunkcí" všech možných individálních výroků, které vznikají z daného výrokového vzorce. Tak na příklad existenční výrok „pro některé x je $x^2-x = 2$" znamená vlastně toto: „buď $1^2-1 = 2$ nebo $2^2-2 = 2$ nebo $3^2-3 = 2$ nebo..."

Obecné a existenční výroky mají tedy v podstatě stejný význam jako spojení výroků, totiž konjunkce nebo disjunkce, jenže spojují nikoliv dva nebo několik daných výroků, nýbrž všechny výroky, které mohou vzniknout dosazením z daného výrokového vzorce.

Uváděli jsme dosud jako příklady pouze takové obecné a existenční výroky, které vznikly z výrokových vzorců, obsahujících pouze jednu neurčitou. Je samozřejmé, že lze vytvořit obecné a existenční výroky stejným způsobem také z výrokových vzorců, které obsahují několik neurčitých, na příklad „pro libovolná x a y je $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$" nebo „existují x a y tak, že $x^2+y^2 = 1$ a $xy = \frac{1}{2}$.

Existenční a obecné výroky se vyskytují velmi často v matematice. Každý matematický vzorec je obecným výrokem; slova „pro každé x" a pod. se ovšem zpravidla buď nahrazují slovy „platí vždy" a pod. nebo ještě častěji se vůbec nevyslovují a musíme si je domyslit. Tak na příklad místo „$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$" bychom měli říci obšírněji „pro každé x je $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$". Proto často můžeme poznat jen z celkové souvislosti, zda určitý výraz je výrokovým vzorcem nebo obecným výrokem.

V běžné řeči vyslovujeme obecné a existenční výroky rovněž jinou formou, na příklad „někteří ssavci žijí ve vodě", „všichni ssavci dýchají plicemi". Takové výroky jsou však logicky totožné s výroky utvořenými pomocí t. zv. logických operátorů z výrokových vzorců. Kromě toho je ještě jeden případ, kdy obecný výrok se netvoří pomocí slov „pro každé..." a pod., nýbrž jiným způsobem. Utvoříme-li totiž obecný výrok z výrokového vzorce „x nemá vlastnost V", pak neříkáme „každé x nemá vlastnost V", nýbrž „žádné x nemá vlastnost V". V takovém případě má tedy obecný logický operátor slovní tvar „žádné".

3·2. Kombinování logických operací a spojení. Dosud jsme se setkali pouze s logickými operátory, které se vztahovaly na všechny neurčité, obsažené ve výrokovém vzorci. Logické operátory mohou se však také vztahovat pouze na některé neurčité. Příklad: „existuje x takové, že $x^2 = y$"; zde jsme dostali pomocí existenčního operátoru z výrokového vzorce „$x^2 = y$", který obsahoval dvě neurčité, výrokový vzorec „existuje x tak, že $x^2 = y$", který obsahuje již jen jednu neurčitou, za níž smíme dosazovat, a to y. Kdybychom totiž dosadili za x, dostaneme snůšku slov bez smyslu (na příklad „existuje 3 tak, že $3^2 = y$"). Vůbec nesmíme nikdy dosazovat za neurčitou, na kterou se již vztahuje některý logický operátor. Aplikujeme-li dále na výrokový vzorec „existuje x takové, že $x^2 = y$" obecný operátor „pro každé y", dostaneme výrok „pro každé y existuje x takové, že $x^2 = y$". Tento výrok jest správný, když mluvíme o komplexních číslech, je však nesprávný, když mluvíme jen o číslech reálných, t. j. když smíme dosazovat za neurčité jen reálná čísla.

Výroky tohoto druhu, t. j. výroky, které vznikají užitím několika logických operátorů za sebou (střídavě existenčního a obecného), se vyskytují velmi často v matematice, zvláště v jejich abstraktních oborech. Uvedeme ještě dva příklady takových výroků. (1) „Pro libovolná x a y existují φ a r tak, že r je kladné, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$". Základem je zde výrokový vzorec (konjunkce tří výrokových vzorců), „r je kladné, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$". Aplikujeme postupně existenční operátor „existují φ a r" a obecný operátor „pro libovolná x a y". (2) Existuje x takové, že pro každé y je $x + y = y$". Základem je výrokový vzorec „$x + y = y$"; aplikujeme postupně operátory „pro každé y" a „existuje x".

Všimněme si nyní příkladu jiného druhu: „když $-1 < x < 1$, pak $x^2 < 1$". Je to obecný výrok, nikoli výrokový vzorec; jak jsme již řekli, vyslovují se totiž v matematice obecné výroky zpravidla tak, že se vysloví výrokový vzorec a doložka „pro každé x" se domyslí. Stavebními kameny tohoto výroku jsou výrokové vzorce „$-1 < x < 1$" a „$x^2 < 1$". Když utvoříme jejich implikaci a pak aplikujeme obecný operátor, dostaneme náš výrok. Kombinujeme zde tedy logické spojování výroků a logické operace, totiž tvoření obecných a existenčních výroků. Můžeme je vůbec kombinovat nejrůznějším způsobem: zde jsou na to dva příklady: (1) „existuje x takové, že $\cos x = 1$, a také existuje x takové, že $\sin x = 1$"; (2) „existuje x takové, že $\cos x = 1$ a také $\sin x = 1$". Tyto dva výroky jsou si zdánlivě svou stavbou velmi podobné. První vznikne tak, že nejdříve utvoříme z výrokových vzorců „$\cos x = 1$" a „$\sin x = 1$" existenční výroky a pak utvoříme konjunkci těchto výroků. Druhý vznikne obráceným postupem: utvoříme nejdříve konjunkci daných výrokových vzorců a pak z ní utvoříme existenční výrok. Přes zdánlivou podobnost stavby, dostáváme však takto zcela různé výroky: výrok (1) je správný, výrok (2) nesprávný.

Stejně tak jsou zcela různé tyto výroky: (1) „pro každé φ je buď $-\frac{3}{4} < \cos \varphi < \frac{3}{4}$ nebo $-\frac{3}{4} < \sin \varphi < \frac{3}{4}$"

a (2) „buď je pro každé φ — $\frac{3}{4} < \cos\varphi < \frac{3}{4}$ nebo je pro každé φ — $\frac{3}{4} < \sin\varphi < \frac{3}{4}$".

3·3. Tautologicky správné výroky. Všimněme si nyní výroku „buď některé x má vlastnost V nebo žádné x nemá vlastnost V". Tento výrok je zřejmě správný. Je vytvořen z výrokového vzorce „x má vlastnost V" pomocí logických spojek a operátorů, přitom však je správný, ať již V je jakákoliv vlastnost a zůstává správným, když nahradíme zmíněný výrokový vzorec „x má vlastnost V" jakýmkoliv jiným vzorcem, který obsahuje x a žádnou jinou neurčitou. Takové výroky budeme nazývati **tautologicky správnými** (viz 1. kapitolu).

Od podrobného rozboru různých druhů takových výroků zde upustíme a všimneme si jenom jednoho důležitého případu. Každý existenční výrok je totiž **tautologicky ekvivalentní** s negací jistého obecného výroku (tím míníme to, že jejich ekvivalence je tautologicky správným výrokem). Na příklad výroky „existuje x, které nemá vlastnost V" a „není pravda, že každé x má vlastnost V", jsou ekvivalentní, t. j. jsou buď oba správné nebo oba nesprávné. Obecně platí, že výroky „existuje ... tak, že platí A" a „není pravda, že pro každé ... platí non A" jsou vždy ekvivalentní. To znamená, že můžeme nahradit každý existenční výrok negací obecného výroku (obdobně, jako můžeme vždy nahradit disjunkci negací jisté konjunkce); nemuseli bychom tedy vůbec užívat existenčních výroků. Ve skutečnosti jich ovšem užíváme, neboť bez nich by se úvahy staly delší, málo přehledné, ale hlavně „nenázorné".

Od ekvivalence dvou výroků musíme odlišovat ekvivalenci dvou výrokových vzorců. Říkáme, že **výrokové vzorce** „x je P" a „x je Q" jsou **ekvivalentní**, když je správný obecný výrok „pro každé x platí: x je P, když a jen když x je Q". Příklad:

výrokové vzorce „x je větší než 1" a „x má kladný dekadický logaritmus" jsou ekvivalentní.

3'4. Dvojí pojetí existence. Přistoupíme nyní k jedné obtížné otázce, které se zde můžeme dotknout jen zběžně. Řekli jsme, že výroky „existuje . . . tak, že platí A" a „není pravda, že pro každé . . . platí non A" jsou tautologicky ekvivalentní. To se zdá zcela samozřejmé, nicméně se proti tomu činí námitky. Tvrdí se totiž toto: když vyvrátíme tvrzení, že každé x má vlastnost V, pak tím není nikterak prokázáno, že existuje x, které tuto vlastnost nemá. Zde prý totiž jen zdánlivě platí „tertium non datur" (vyloučení třetí možnosti), neboť kromě dvou možností (1) všechna x mají vlastnost V, (2) některé určité x nemá vlastnost V, je prý ještě třetí možnost: není sice pravda, že všechna x mají vlastnost V, avšak také se nedá najít žádné x, které by tuto vlastnost nemělo. Někdy se jde ještě dál a tvrdí se, že existenční výroky nemají vůbec smysl a jsou proto nepřípustné, pokud přímo neudávají určitý prvek, který má vlastnost, o níž nám jde, nebo aspoň neudávají předpis, jak nalézt takový prvek konečným počtem kroků.

Proti těmto námitkám lze říci toto: především je nutné objasnit, co rozumíme v matematických úvahách slovem „existuje". Je jasné, že v matematice tím nemíníme existenci v nějakém filosofickém (metafysickém) smyslu, třeba že slovo „existuje" často svádí k takovému výkladu (právě proto je někdy lépe místo „existuje . . ." říkat „některé . . ."). Je zde tedy možné v podstatě dvojí pojetí: 1. Výrok jako na příklad „některé x má vlastnost V" zavádíme vlastně jako z k r a t k u za výrok „nikoli každé x má vlastnost non V". Existence je tedy d e f i n o v á n a jako negace obecné platnosti opaku. Existenční výroky nejsou potom ničím zásadně novým a všechny námitky padají. 2. Pojímáme existenci jako m o ž n o s t k o n s t r u k c e, t. j. na příklad výrok „existuje x, které má vlastnost V" pro nás znamená, že lze u d a t (konstruovat) prvek, který má vlastnost V. Výraz „lze udat (sestrojit)" je ovšem velmi mlhavý, takže je nezbytné jej především přesně definovat. Pak jde zřejmě o existenci v jiném smyslu než při prvním pojetí; neměli bychom vlastně již mluvit o existenci, nýbrž třeba o sestrojitelnosti. Ekvivalence takové existence (sestrojitelnosti) s negací obecné platnosti opaku zřejmě nemusí být správná. Skutečně: když lze udat x, které nemá vlastnost V, pak ovšem není pravda, že by každé x mělo tuto vlastnost; když však naopak víme jenom toto: není pravda, že každé x má vlastnost V, pak z toho nikterak nevyplývá, že můžeme udat x, které nemá tuto vlastnost. Při tomto druhém pojetí padá tedy ekvivalence mezi existencí na jedné straně a negací obecné platnosti opaku na straně druhé. Existenční výroky se pak nedají nahradit negacemi obecných výroků, nýbrž jsou něčím podstatně novým.

Jsou tedy dvě pojetí existence, čili „dva druhy" existence v matematice. První pojetí je v matematice běžné; při druhém pojetí (existence jako sestrojitelnost) velmi vadí to, že není snadné dobře definovat sestrojitelnost, a že se s tímto pojmem dostáváme do obtížných logických úvah. Je však jeden směr (i n t u i c i o n i s m u s), který zavrhuje vůbec první pojetí existence a připouští pouze existenci jako sestrojitelnost. Důvody pro to jsou spíše filosofického rázu. Nebudeme se tím zde tedy zabývat.

3'5. Logické značky. Uvádíme ještě pro informaci přehled značek, jichž se užívá pro logická spojení a logické operátory, jakož i několik příkladů výroků, vyjádřených pomocí těchto značek (o nichž jsme se ostatně již zmiňovali).

Negaci výroku p označujeme $\sim p$; konjunkci výroků p a q označíme $p \mathbin{\&} q$, jejich disjunkci $p \vee q$, implikaci $p \Rightarrow q$, ekvivalenci $p \Leftrightarrow q$. Správnost souvětí závisí, jak víme (odst. 1·2) jenom na správnosti nebo nesprávnosti spojovaných výroků. Uvádíme zde tabulku, v níž je pro jednotlivé druhy souvětí uvedeno, ve kterých případech (ze čtyř možných kombinací správnosti a nesprávnosti výroků p a q) je souvětí správné (zkratka S), ve kterých nesprávné (zkratka N).

výrok	p	S	S	N	N
výrok	q	S	N	S	N
negace	$\sim p$	N	N	S	S
negace	$\sim q$	N	S	N	S
konjunkce	$p \mathbin{\&} q$	S	N	N	N
disjunkce	$p \vee q$	S	S	S	N
implikace	$p \Rightarrow q$	S	N	S	S
implikace	$q \Rightarrow p$	S	S	N	S
ekvivalence	$p \Leftrightarrow q$	S	N	N	S

Uvádíme dále několik příkladů tautologicky správných souvětí (viz odst. 1·9): $p \vee \sim p$; $\sim (p \mathbin{\&} \sim p)$; $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$; $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \mathbin{\&} \sim q)$.

Logický operátor „pro každé x…" vyjadřujeme symbolem (zkratkou) „(x)"; místo „pro každé x je $V(x)$", kde $V(x)$ je určitý výrokový vzorec, píšeme tedy „$(x)V(x)$". Příklady: (1) $(x)(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$; (2) $(x)(x > 0 \Rightarrow 10^x > 1)$, což znamená: pro každé kladné x je $10^x > 1$; (3) $(x)(y)(z)(x > y \mathbin{\&} y > z \Rightarrow x > z)$, což znamená, že pro libovolná čísla x, y, z platí: když $x > y$ a $y > z$, pak $x > z$. — Existenční operátor místo slovy „pro některé x…" vyjadřujeme symbolem „$(\exists x)$"; místo „pro některé x platí $V(x)$" nebo „existuje x, pro něž platí $V(x)$", píšeme tedy „$(\exists x)\ V(x)$". Příklady: (1) $(\exists x)\ (10^x = 2)$; (2) $\sim(\exists x)\ (10^x = 0)$, což znamená: neexistuje x, pro něž by bylo $10^x = 0$; (3) $(x)\ [x > 0 \Rightarrow (\exists y)\ (10^y = x)]$, což znamená: ke každému kladnému x existuje takové y, že $10^y = x$.

Konečně uvádíme dva příklady tautologicky správných vět (viz odst. **3·3**), v nichž vystupují logické operátory (x) a $(\exists x)$.

1. příklad: $(\exists x) V(x) \Leftrightarrow \sim (x) \sim V(x)$, což znamená ekvivalenci existenčního výroku s negací obecné platnosti opaku.

2. příklad: $(x)\ [A(x) \Rightarrow B(x)]\ \&\ (x)\ [B(x) \Leftrightarrow C(x)] \Rightarrow$ $\Rightarrow (x)\ [A(x) \Rightarrow C(x)]$, což znamená: když z $A(x)$ vždy vyplývá $B(x)$ a z $B(x)$ vždy vyplývá $C(x)$, pak z $A(x)$ vždy vyplývá $C(x)$.