

Jaká je logická výstavba matematiky?

2. Výrokové vzorce

In: Miroslav Katětov (author): Jaká je logická výstavba matematiky?. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1946. pp. 15–19.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403134>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fysiků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

2. VÝROKOVÉ VZORCE

2.1. Výrokové vzorce. V běžném životě se setkáváme často (na př. v úředních formulářích) s výrazy jako: „podepsaný se narodil dne . . .“ V matematice se zase vyskytují velmi často výrazy jako: „čtverec čísla x je sudý“, „ $y = x^2 + x$ “. Výrazy tohoto druhu nejsou výroky; nemůžeme říci: je pravda, že „podepsaný se narodil dne . . .“ nebo je pravda, že „čtverec čísla x je sudý“, ani nemůžeme říci, že to pravda není. Takové výrazy prcstě nejsou úplné a proto nic netvrdí. Dosadíme-li však ve výraze „podepsaný se narodil dne . . .“ do mezery, vyznačené tečkami, jakékoli datum, pak vznikne výrck, ať již pravdivý nebo nepravdivý. Stejně tak netvrdí nic výraz „čtverec čísla x je sudý“ (léda že by symbol x vystupoval jako označení určitého čísla, tak jako na příklad π označuje číslo 3,14 . . .); dosadíme-li však za symbol x nějaké určité číslo, pak vznikne výrok, na příklad „čtverec čísla 2 je sudý“ (správný výrok) nebo „čtverec čísla 3 je sudý“ (nesprávný výrck).

Místo, případně několik míst, kde má být takový neúplný výraz doplněn, může být, jak jsme viděli, označeno buď mezerou (tečkováním) nebo — jak je to zvykem v matematice — tak zvanou **neurčitou** (na př. x , y , z atd.), t. j. symbolem, který má právě naznačit, že za něj můžeme a máme něco doplnit.

Výrazy, jejichž příklady jsme zde uvedli, mají úlohu jakési předlohy nebo vzorce, jejíž vhodným doplněním vznikne výrok. Nazveme je proto výrokovými vzorci. **Výrokový vzorec** je tedy výraz, jenž sám není výrokem, avšak obsahuje neurčité, jejichž vhodným nahra-

zením vznikne výrok.*) Toto nahrazení se provede — jak je ostatně samozřejmé — tak, že za každou neurčitou se dosadí všude t e n t ý ž výraz; nesmíme tedy ve výrokovém vzorci nahradit x na jednom místě a , na druhém b .

Všimněme si znovu výrokového vzorce „čtverec čísla x je sudý“; tento výrokový vzorec vyjadřuje určitou vlastnost čísel, totiž „míti sudý čtverec“. Dosadíme-li totiž za x číslo, které tuto vlastnost má, dostaneme správný výrok, dosadíme-li však číslo, které tuto vlastnost nemá, dostaneme výrok nesprávný. Ve stejném smyslu můžeme říci, že výrokový vzorec „ $x > y$ “ vyjadřuje vztah „větší“ atd. Každou vlastnost a každý vztah můžeme tedy vyjádřit výrokovým vzorcem s jednou nebo několika neurčitými, a naopak každý výrokový vzorec můžeme považovat za vyjádření vlastnosti nebo vztahu.

2.2. Dosazení. Mluvíme zde o vhodném, čili dovoleném nahrazení (dosazení). Je jasné, že nesmíme dosazovat za neurčitou cokoli, neboť mohli bychom dostat nesmyslnou snůšku slov; drastický příklad: kdybychom dosadili do výrokového vzorce „čtverec čísla x je sudý“ slovo „kočka“, dostali bychom snůšku slov: „čtverec čísla kočka je sudý“. Za neurčitou smíme dosadit pouze takový výraz, aby po dosazení skutečně vznikl výrok, případně — dosazujeme-li výraz, který sám zase obsahuje neurčité — aby vznikl znovu výrokový vzorec. Příklad: do výrokového vzorce „ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ “ dosadíme za x výraz $a + 2y$; tím vznikne znovu výrokový vzorec

$$\sin^2 (a + 2y) + \cos^2 (a + 2y) = 1''.$$

*) Obvyklý termín pro výrokový vzorec je výroková funkce. Užíváme zde jiného slova, abychom se vyhnuli zaměně s matematickým pojmem funkce. Místo neurčitá se zpravidla říká proměnná. Tento termín si rovněž rezervujeme pro matematický pojem proměnné veličiny.

Kromě tohoto základního omezení je ještě jedno další. Smluvili-li jsme na příklad, že budeme uvažovat pouze o reálných číslech, pak nesmíme do výrokového vzorce „čtverec čísla x není záporný“ dosadit za x číslo $\sqrt{-1}$, ač „čtverec čísla $\sqrt{-1}$ není záporný“ je správně utvořený výrok (ovšem nepravdivý); imaginární čísla jsme totiž vyloučili ze svých úvah, takže tento výraz pro nás vskutku nemá smysl — obrazně řečeno, nepatří do řeči, kterou chceme užívat, neboť ta nezná komplexních čísel.

2'3. Rovnice a otázka. Nyní si všimněme dvou velmi důležitých druhů výrazů, které jsou vlastně výrokovými vzorci. Jsou to rovnice a otázka.

Všimněme si třeba rovnice „ $x^2 - 3x + 2 = 0$ “. Je to výraz, obsahující neurčitou x ; dosadíme-li do něho za tuto neurčitou nějaké číslo, pak dostaneme výrok, ať již správný či nikoliv, na př. „ $2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$ “ (správný výrok) nebo „ $3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 0$ “ (nesprávný výrok). Výraz (rovnice) „ $x^2 - 3x + 2 = 0$ “ je tedy výrokovým vzorcem; řešením této rovnice nazýváme právě takové číslo, jehož dosazením vznikne správný výrok (zde jsou to čísla 1 a 2).

Jak vidíme již z tohoto příkladu, je vlastně každá rovnice, ať již o jedné nebo o několika neznámých, výrokovým vzorcem.

Totéž platí o systému rovnic, který je vlastně konjunkcí několika výrokových vzorců, totiž jednotlivých rovnic systému, a o nerovnostech.

Dejme tomu, že pan Josef Pokorný byl 2. srpna 1942 večer v biografu. „Pan J. P. byl večer dne 2. srpna 1942 . . .“ je výrokový vzorec; dosadíme-li do vytečkované mezery výraz „v biografu“, dostaneme správný výrok. Když pronášíme otázku: „kde byl pan J. P. dne 2. srpna 1942 večer?“ pak tím jednak předkládáme zmíněný výrokový vzorec, jednak vybízíme k vytvo-

ření z něho správného výroku. Po logické stránce je tedy otázka výrokovým vzorcem; obsahuje však též něco, co leží vlastně mimo logiku, totiž pobídku k určité činnosti.

2'4. Spojení výrokových vzorců. Mluvili jsme již o spojování výroků. Ježto výrokový vzorec je vlastně neúplný výrok, je jasné, že výrokové vzorce se dají spojovat stejně jako výroky. Tak na příklad z výrokových vzorců „ x je větší než y “ a „ x se rovná y “, můžeme utvořit jejich disjunkci, totiž výrokový vzorec „ x je buď větší než y nebo se rovná y “.

Další příklady spojení výrokových vzorců: „když $x > y$, pak $2^x > 2^y$ “ (implikace); „číslo x je dělitelné 3 v tom a jen v tom případě, že je dělitelné 6“ (ekvivalence). Z prvního z těchto dvou výrokových vzorců vzniká, jak se čtenář snadno přesvědčí, pravdivý výrok, ať za x a y dosadíme jakákoliv čísla. Naproti tomu, dosadíme-li do druhého výrokového vzorce za x třeba číslo 15, vznikne nesprávný výrok „15 je dělitelné 3 v tom a jen v tom případě, že je dělitelné 6“.

2'5. Označení a označovací vzorce. Obrátíme se nyní k jinému důležitému druhu výrazů. Všimněme si výrazů „bezprostřední představený pana J. N. bydlí v Dejvicích“; „čtverec čísla 6 je dělitelný 4“. Výraz „bezprostřední představený pana J. N.“ označuje určitou osobu; výraz „čtverec čísla 6“ označuje číslo 36. Výrazům tohoto druhu právě budeme říkat **označení**. Další příklady označení: (1) číslo, které násobeno 3 dá 6, (2) dekadický logaritmus čísla 100, (3) normální počet prstů na lidské ruce. Jak vidíme z těchto příkladů, mohou dvě označení označovat totéž, aniž jsou sama totožná [příklady (1) a (2)]. Naproti tomu však požadujeme, aby označení bylo **j e d n o z n a č n é**; na př. výraz „číslo, jehož čtverec se rovná 4“ nebudeme považovat za označení, neboť $2^2 = 4$, ale také

$(-2)^2 = 4$, takže výraz „číslo, jehož čtverec se rovná 4“ byl by dvojnásobný.

Všimněme si nyní výrazu „čtverec čísla x “. Dosadíme-li do tohoto výrazu za neurčitou x nějaké číslo, pak dostaneme označení, na příklad „čtverec čísla 4“ (to je označení čísla 16) nebo „čtverec čísla 10“ (to je označení čísla 100). Takovým výrazům, které obsahují jednu nebo několik neurčitých, jejichž vhodným nahrazením vznikne označení, říkáme **označovací vzorce**. Další příklady označovacích vzorců: (1) bezprostřední představený pana X; (2) logaritmus čísla x ; (3) číslo, jež vynásobeno x , dá 1; (4) součin čísel x a y . Dosazovat za neurčité do označovacího vzorce smíme jen takové výrazy, abychom skutečně dostali označení, které má smysl, případně, když dosazujeme výraz, který sám zase obsahuje neurčité, abychom dostali zase správně utvořený označovací vzorec. Podmínky, které platí pro dosazování do označovacích vzorců, jsou tedy zcela obdobné podmínkám pro dosazování do výrokových vzorců.

Uvedeme ještě příklady dovoleného a nepřipustného dosazení. Z označovacího vzorce „logaritmus čísla x “ můžeme dostat dosazením za neurčitou x tyto správně utvořené výrazy (1) „logaritmus čísla 5“; (2) „logaritmus součinu čísel 3 a 4“; (3) „logaritmus součinu čísel x a y “; zde nevzniklo dosazením označení, nýbrž zase označovací vzorec. Naproti tomu není přípustné dosadit do označovacího vzorce „bezprostřední představený pana X“ za X jméno člověka, který je na př. samostatným podnikatelem, nebo — abychom zase uvedli drastický příklad — dosadit do označovacího vzorce „logaritmus x “ za neurčitou x slovo „Vltava“; dostali bychom pak skupinu slov, která nemá smysl. Právě tak není přípustné dosadit do označovacího vzorce „číslo, jež vynásobeno x dá 1“ za x číslo 0, načež bychom dostali skupinu slov „číslo, jež vynásobeno 0, dá 1“.