Jaká je logická výstavba matematiky?

1. Spojování výroků

In: Miroslav Katětov (author): Jaká je logická výstavba matematiky?. (Czech). Praha: Jednota československých mathematiků a fysiků, 1946. pp. 6–14.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403133

Terms of use:

© Jednota československých mathematiků a fysiků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

1. SPOJOVÁNÍ VÝROKŮ

1·1. Výroky. Obvykle se říká, že logika je „věda o obecných formách vědomě odůvodněného myšlení". Její částí je tak zvaná formální logika, jejímž předmětem je d e d u k c e (odvození) soudů z jiných soudů. Soudem se zde míní každá myšlenka, kterou něco konstatujeme. Na příklad uvědomím si, že teď je tma; podívám se na zem a zjistím, že v noci pršelo; konstatuji, že $\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; to všechno jsou soudy.

Bude nás zde zajímat jen tato t. zv. formální logika. Nebudeme však mluvit o soudech, neboť naše výklady budou založeny na jiném pojetí, které je obvyklé v moderní logice: místo o soudech budeme mluvit o **výrocích.** Je zřejmé, že soud, t. j. určitá myšlenka, může se stát předmětem logiky jen do té míry, do jaké se dá zachytit a formulovat tak, aby se dal sdělit jiné osobě. Výrokem se však právě rozumí formulace soudu v nějaké řeči (ať již v obvyklé řeči, kterou mluvíme, nebo ve zvláštním systému značek). Tím, že mluvíme o výrocích místo o soudech, neztratíme nic z obsahu logiky, získáváme však na přesnosti a jasnosti úvah.

Výrokem nazýváme tedy každý projev (tvrzení), o kterém má smysl říci, že je pravdivý nebo nepravdivý. Výroky jsou na příklad „včera pršelo, dnes je hezky", „v březnu r. 1987 bude sluneční zatmění", „$2+2=4$", „$2+2=5$"; avšak „přines knihu!", „kdy přijdeš?" výroky nejsou. Termín **věta** bude pro nás znamenat totéž co výrok; vyhradíme si jej však pro výroky, jejichž správnost je již prokázána.

Termínů p r a v d i v ý, s p r á v n ý, p l a t n ý výrok budeme užívat ve stejném významu, v jakém se jich užívá v běžné řeči a nebudeme prozatím mezi nimi rozlišovat; později se k nim ještě vrátíme. Termínu

správně utvořený výrok užíváme, abychom zdůraznili, že jde skutečně o výrok. Tak „sin 45° = 1" je správně utvořený, avšak nesprávný (nepravdivý) výrok, kdežto na př. „sin 15 cm = 0,5 kg" je nesprávně utvořený výrok, t. j. přesně řečeno, není to vůbec výrok — jen snůška značek.

Promluvíme nyní o tom, jak tvoříme z daných výroků výroky nové (ať již pravdivé či nikoliv, avšak správně utvořené).

1·2. Souvětí. Když je dáno několik výroků, pak můžeme vytvořit nový výrok tím, že je spojíme vhodným způsobem jako celky. Tak z výroků (*A*) „pan M. N. byl v sobotu v divadle" a (*B*) „pan M. N. byl v neděli na výletě" lze utvořit mimo jiné tyto výroky: (1) „pan M. N. byl v sobotu v divadle a v neděli na výletě"; (2) „pan M. N. byl buď v sobotu v divadle nebo v neděli na výletě"; (3) „když pan M. N. byl v sobotu v divadle, pak byl v neděli na výletě". Při tom je podstatné, že správnost nebo nesprávnost výroků (1), (2), (3) závisí pouze na správnosti nebo nesprávnosti původních výroků (*A*), (*B*).

Výrok, který vzniká z daných výroků (případně z jediného výroku) takovým způsobem (tedy tak, že jeho správnost nebo nesprávnost závisí pouze na správnosti nebo nesprávnosti původních výroků), budeme nazývat **spojením** daných výroků anebo krátce **souvětím.** Probereme nyní jednotlivé druhy souvětí.

1·3. Negace. Z jednoho výroku jako celku můžeme bez přibrání dalších výroků vytvořit nový výrok (souvětí) jediným způsobem, totiž tak, že jej popřeme (negujeme). Tak z výroku „byl v sobotu v divadle" vytvoříme výrok „nebyl v sobotu v divadle"; takto vzniklý výrok nazýváme **negací** původního výroku. Negaci můžeme vyjádřit také slovním obratem „není pravda, že . . .", tedy v našem příkladě „není pravda, že byl

v sobotu v divadle". Výraz „není pravda, že..." považujeme zde za formální obrat, který je rovnocenný se slůvkem „ne-". — Při symbolickém označování, o němž mluvíme podrobněji v odst. 3'5, užívají různí autoři pro negaci výroku **A** rozdílných symbolů, tak non **A** nebo $\sim$ **A** nebo $\bar{\mathbf{A}}$.

Je jasné, že negace nesprávného výroku je správná a naopak negace správného výroku je nesprávná. — Negujeme-li negaci nějakého výroku, dostaneme výrok, který je rovnocenný s původním výrokem. Tak na příklad výrok „není pravda, že nebyl v sobotu v divadle" znamená totéž, co výrok „byl v sobotu v divadle". Dvojnásobnou negací*) nedostáváme tedy nic nového.

Když je předložen nějaký výrok, pak můžeme utvořit nový výrok také jiným způsobem, než negací, na příklad pomocí rčení „je prokázáno, že..." nebo „je možné, že..." Dostaneme tak z výroku „pan M. N. byl v sobotu v divadle" výrok „je prokázáno, že pan M. N. byl v sobotu v divadle" nebo „je možné, že pan M. N. byl v sobotu v divadle". Zde však jde o něco zcela jiného, než je negace. Výrok „je prokázáno, že pan M. N. byl v sobotu v divadle" znamená totiž vlastně toto: byl podán důkaz výroku „byl v sobotu v divadle". Jde o jistý výrok o výroku „pan M. N. byl v sobotu v divadle" — a současně také o našich znalostech; jeho správnost závisí nejen na správnosti původního výroku „pan M. N. byl v sobotu v divadle", nýbrž též na jiných okolnostech (je dobře možné, že pan M. N. sice v divadle byl, že to však není prokázáno). Výrok „je prokázáno, že pan M. N. byl v sobotu v divadle" nepovažujeme tedy za souvětí v našem smyslu, a totéž platí o výroku „je možné, že pan M. N. byl v sobotu v divadle" a o jiných podobných výrocích. — Zůstává tedy při tom, že ne-

*) Rozumí se, negací ve smyslu tradiční formální logiky.

gaci považujeme za jediný způsob, jakým lze z jediného výroku utvořit výrok nový.

Promluvíme nyní o spojení dvou výroků. Zde je ovšem možnost různých kombinací mnohem větší. Hlavní druhy spojení dvou výroků jsou: konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence; probereme je nyní postupně.

1·4. **Konjunkce.** Souvětí, které vznikne, když spojíme dva výroky slovem „a" nebo „ale" (nebo jiným výrazem stejného významu) nazýváme **konjunkcí.** Příklady: (1) výrok „včera pršelo, ale dnes je hezky" je konjunkcí výroků „včera pršelo" a „dnes je hezky" (slovo „ale" značí při spojování výroků totéž logické spojení jako „a", vyjadřuje však současně určitý postoj k výroku, který pro logický rozbor nemá význam); (2) „tento trojúhelník je pravoúhlý a rovnoramenný"; zde máme konjunkci výroků „tento trojúhelník je pravoúhlý" a „tento trojúhelník je rovnoramenný".

Konjunkce tvrdí tedy, že jsou splněny oba výroky, které jsme spojili. Jinak řečeno, konjunkce dvou výroků je pravdivá pouze tehdy, když o b a spojené výroky jsou správné, kdežto v ostatních případech je nesprávná. — Při symbolickém označování výroků užíváme pro konjunkci výroků **A** a **B** znaku **A** . **B** nebo **A** & **B**.

1·5. **Disjunkce.** Výrok, který dostaneme, když spojíme dva dané výroky spojkou „nebo" (anebo jiným výrazem stejného významu), nazýváme **disjunkcí.** Příklady: (1) „buď přijde večer nebo zatelefonuje odpoledne"; zde máme disjunkci výroků „přijde večer" a „zatelefonuje odpoledne"; (2) „trojúhelník *ABC* je buď pravoúhlý nebo rovnoramenný"; zde máme disjunkci výroků „trojúhelník *ABC* je pravoúhlý" a „trojúhelník *ABC* je rovnoramenný". Spojku „nebo" pojímáme při tom vždy ve smyslu latinského v e l, totiž tak, že při-

pouštíme, aby nastaly obě uvedené možnosti (tak v prvním příkladě tvrdíme vlastně: buď přijde večer nebo zatelefonuje odpoledne anebo udělá obojí), a nikoli ve vylučovacím smyslu (latinské aut — aut), kdy takový případ vylučujeme. Disjunkce říká tedy, že je splněn aspoň jeden (tedy případně také oba) z výroků, které jsou v ní spojeny. Disjunkce dvou výroků je podle toho správná tehdy, když je správný některý z těchto výroků a je nesprávná pouze v tom případě, že oba tyto výroky jsou nesprávné. — Pro disjunkci výroků **A**, **B** se užívá symbolu **A** v **B**.

1·6. **Implikace.** Souvětí, které vznikne, když spojíme dva dané výroky pomocí výrazu „když ... pak ..." (nebo pomocí jiného výrazu, který má stejný význam), nazýváme **implikací.**

První z výroků, které takto spojíme, nazýváme výrokem **implikujícím**, druhý výrok výrokem **implikovaným.** Pro implikaci výroků **A**, **B** užíváme symbolu **A** ⇒ **B**. Příklady implikace: (1) „když tento trojúhelník je pravoúhlý, pak není rovnostranný"; „tento trojúhelník je pravoúhlý" je zde výrok implikující, „není rovnostranný" je výrok implikovaný; (2) „nepřijde-li dnes, přijde zítra", čili „nepřijde dnes ⇒ přijde zítra"; implikujícím výrokem je zde „nepřijde dnes", implikovaným výrokem je „přijde zítra"; (3) „má-li prosinec 30 dní, pak je $2 + 2 = 5$", čili „prosinec má 30 dní ⇒ ⇒ $2 + 2 = 5$"; tato implikace je správným výrokem; (4) „má-li listopad 30 dní, pak $2 + 2 = 5$"; zde máme nesprávnou implikaci (správně utvořenou, avšak nepravdivou, neplatnou; připomínáme znovu rozdíl mezi správně utvořeným a správným výrokem).

Implikace výroků **A** a **B** říká tedy toto: je-li splněn výrok **A**, pak je splněn výrok **B**, jinými slovy: je vyloučeno, aby platilo **A**, nikoli však **B**. Podle toho pova-

žujeme implikaci „když **A**, pak **B**" za správnou, když implikující výrok **A** je nesprávný — ať již při tom **B** je správné či nikoliv. To sice může na první pohled zarazit, avšak v matematice to je obvyklé a odpovídá to také dobře běžné hovorové řeči. Příkladem může být výrok „když toto je pravda, pak jsem blázen". Ten, kdo jej vysloví, považuje oba výroky „toto je pravda" a „jsem blázen" za nepravdivé, celý svůj výrok však za správný.

Implikace „když **A**, pak **B**" je tedy správným výrokem v těchto případech: (1) **A** správné, **B** správné; (2) **A** nesprávné, **B** správné, (3) **A** nesprávné, **B** nesprávné. Je nesprávným výrokem pouze v případě (4) implikující výrok **A** je správný, implikovaný výrck **B** je nesprávný.

V případě, že implikace „když **A**, pak **B**" je správná, říkáme, že výrok **A** **implikuje** výrok **B**. Když tedy řeknu, že výrok **A** implikuje výrok **B**, pak to znamená, že souvětí „když **A**, pak **B**" je správné, a to zase znamená (srov. odst. 4·2), že z výroku **A** vyplývá výrok **B**.

Implikaci dvou výroků lze vyjádřit nejrůznějšími slovními obraty. Je užitečné, abychom si to dobře uvědomili, neboť takové obraty se vyskytují v matematice velmi často. Všimněme si souvětí „je-li toto číslo dělitelné 6, pak je dělitelné 2", „k tomu, aby toto číslo bylo dělitelné 2, stačí, aby bylo dělitelné 6"; „postačující podmínka k tomu, aby toto číslo bylo dělitelné 2, je, aby bylo dělitelné 6" a konečně „n u t n á podmínka k tomu, aby toto číslo bylo dělitelné 6, je, aby bylo dělitelné 2". Každé z těchto souvětí je v podstatě implikací výroků „toto číslo je dělitelné 6" a „toto číslo je dělitelné 2". Považujeme tato souvětí za logicky totožná, ač se značně liší svým slovním tvarem.

1·7. Ekvivalence. Souvětí, které vznikne, když spojíme dva výroky pomocí výrazu „. . . v tom a jen v tom

případě, že . . ." (nebo pomocí jiného výrazu, který má tentýž význam, na příklad „. . . tehdy a jen tehdy, když . . ." nebo „. . . když a jen když") nazýváme **ekvivalencí.** Příklady: (1) „přijde zítra v tom a jen v tom případě, že nepřijde dnes"; zde máme ekvivalenci výroků „přijde zítra" a „nepřijde dnes"; (2) „prosinec má 30 dní, když a jen když $2 + 2 = 5$"; to je správná ekvivalence. Ekvivalence říká, že buď jsou splněny oba spojené výroky anebo není splněn žádný. Je tedy správná v těchto případech: (1) když oba spojené výroky jsou správné; (2) když jsou oba nesprávné. Když je jeden výrok pravdivý, druhý nepravdivý, je jejich ekvivalence nesprávná. — Pro ekvivalenci výroků **A**, **B** užíváme symbolu $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$.

Je-li ekvivalence dvou výroků správná, říkáme, že tyto výroky jsou **ekvivalentní.** To naprosto neznamená, že tyto výroky mají stejný význam (obsah), nýbrž pouze to, že jsou buď oba správné nebo oba nesprávné. Tak jsou v tomto smyslu ekvivalentní výroky „$2+2 = 4$" a „Vltava protéká Prahou" nebo „$2+2 = 5$" a „Vltava protéká Vídní".

1·8. Spojení několika výroků. Probrali jsme čtyři druhy spojení dvou výroků. Jsou ovšem také jiná spojení, na příklad spojení pomocí rozlučovacího „nebo", o němž jsme se zmínili v odstavci 1·5. Všechna tato spojení jsou však rovnocenná s různými kombinacemi zmíněných čtyř spojení a negace. Rovněž spojení několika výroků vznikají kombinováním negace a zmíněných čtyř spojení: konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence. Uvedeme jenom několik příkladů:

(1) „Buď byl v sobotu v divadle a v neděli na výletě, nebo byl v sobotu a v neděli na služební cestě"; zde máme disjunkci dvou konjunkcí; (2) „první trojúhelník je pravoúhlý a rovnoramenný, když a jen když je kongruentní buď s prvním nebo třetím trojúhelníkem";

zde máme ekvivalenci jedné konjunkce a jedné disjunkce.

1'9. Tautologicky správná souvětí. V každé úvaze, ať z běžného života nebo z některého vědního oboru, neustále spojujeme výroky, dokazujeme správnost různých souvětí atd. Všechny tyto obraty jsou zcela běžné a samozřejmé, takže během úvahy si je naprosto neuvědomujeme a ani nepotřebujeme uvědomovat. Je však užitečné, podrobit je dodatečně rozboru (jak jsme to nyní učinili pro jednotlivé druhy spojení).

Především se v úvahách leckdy vyskytují souvětí, která jsou správná bez ohledu na správnost nebo nesprávnost jednotlivých spojených výroků. O takových souvětích (spojeních výroků) budeme říkat, že jsou **tautologicky správná.** Příklady: (1) „Tento trojúhelník buď je anebo není pravoúhlý"; (2) „není pravda, že tento trojúhelník současně je a není pravoúhlý"; (3) „je-li tento trojúhelník pravoúhlý a rovnoramenný, pak je pravoúhlý". V příkladě 1. máme disjunkci výroku a jeho negace, v příkladě 2. máme negaci konjunkce výroku a jeho negace.

Jak se snadno můžeme přesvědčit, lze vyslovit následující pravidla: (1) konjunkce libovolného výroku a jeho negace (t. j. výrok „**A** a non **A**") je vždy nesprávná, (2) disjunkce libovolného výroku a jeho negace (t. j. výrok „buď **A** nebo non **A**") je vždy správná. Čtenář snadno pozná, že jsme vlastně vyslovili v této formě dva t. zv. základní zákony logiky. První pravidlo totiž říká, že nemůže být správný výrok a současně jeho negace; to je právě tak zvaná z á s a d a s p o r u. Druhé pravidlo říká, že je správný buď výrok nebo jeho negace, není však žádné třetí možnosti; to je právě tak zvaná z á s a d a o v y l o u č e n é m t ř e t í m („tertium non datur"). K těmto zásadám se ještě vrátíme v jedné z dalších kapitol.

Mluvili jsme o tautologicky správných souvětích. Jsou ještě jiné případy, kdy můžeme něco říci o spojení výroků, aniž něco víme o těchto výrocích samých.

1. Dvě souvětí mohou být navzájem **tautologicky ekvivalentní**, t. j. ekvivalentní bez ohledu na správnost nebo nesprávnost jednotlivých spojených výroků. V tomto případě je ekvivalence těchto souvětí tautologicky správným výrokem. Tak výroky „když **A**, pak **B**" a „buď **B** anebo non **A**" jsou ekvivalentní (t. j. buď jsou oba správné nebo oba nesprávné), ať již jsou **A** a **B** jakékoliv výroky. Dvě tautologicky ekvivalentní souvětí jsou zcela rovnocenná, t. j. můžeme beze všeho nahrazovat jedno druhým.

2. Jedno souvětí může **tautologicky implikovat** souvětí druhé, t. j. implikovat je, ať jsou jednotlivé spojené výroky správné či nesprávné. Tak výrok (1) „když **A** pak **B**, a když **B**, pak **C**" (je to konjunkce dvou implikací) implikuje výrok (2) „když **A**, pak **C**", ať jsou **A**, **B**, **C** jakékoliv výroky. To znamená, že výrok (2) je vždy důsledkem výroku (1). Nemůžeme však vždy nahrazovat jeden druhým, neboť se může stát, že výrok (2) je pravdivý, (1) však nikoliv.