Pro řešení těchto rovnic podal Lerch zvláštní metodu založenou na inversi řad.*)

Úloha 33. V které rovnici stupně čtvrtého jest $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 3$, $s_4 = 4$? $[x^4 - x^3 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x}{3!} - \frac{1}{4!} = 0]$.

SOUSTAVY ROVNIC O NĚKOLIKA NEZNÁMÝCH.

7.

SYSTÉMY LINEÁRNÍCH ROVNIC.

S řešením systému dvou lineárních rovnic

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

nebo tří takových rovnic

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

— případně i více rovnic — za předpokladu, že tato soustava vede k jedinému konečnému řešení, setkal se čtenář již na nižší střední škole a ví ze zkušenosti, že výpočet neznámých neposkytuje žádných zvláštních obtíží, jsou-li koeficienty i absolutní členy celistvá a malá čísla; nesnáze však vzrůstají s počtem neznámých a s koeficienty vyjádřenými čísly vícemístnými. Tu jest dobře užíti jistých schemat; velmi výhodné uspořádání doprovázené jednoduchou kontrolou pochází od Gausse.

Uvažujme pro jednoduchost o prvních dvou rovnicích poslední soustavy. Součet koeficientů a absolutního členu

*) Viz Časopis pro pěstov. matematiky a fysiky, roč. 46, str. 225, 377.

jest v první rovnici

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = S_1,$$

takže jest

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 - S_1 = 0;$$

podobně o druhé rovnici platí

$$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 - S_2 = 0.$$

Násobme první rovnici $-\dfrac{a_2}{a_1}$; dostaneme

$$-a_2x - \frac{a_2b_1}{a_1}y - \frac{a_2c_1}{a_1}z - \frac{a_2}{a_1}d_1 = 0$$

a opět jest

$$-a_2 - \frac{a_2b_1}{a_1} - \frac{a_2c_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}d_1 + S_3 = 0,$$

kdež $S_3 = \dfrac{a_2}{a_1}S_1$. Sečtením obou rovnic eliminujeme x, výsledek jest

$$\left(b_2 - \frac{a_2b_1}{a_1}\right)y + \left(c_2 - \frac{a_2c_1}{a_1}\right)z + \left(d_2 - \frac{a_2}{a_1}d_1\right) = 0.$$

Určili-li jsme naznačené podíly a součiny s dostatečnou přesností, musí býti

$$\left(b_2 - \frac{a_2b_1}{a_1}\right) + \left(c_2 - \frac{a_2}{a_1}c_1\right) + \left(d_2 - \frac{a_2}{a_1}d_1\right) - \left(S_2 - \frac{a_2}{a_1}S_1\right) = 0.$$

Výklad lépe vynikne z tohoto jednoduchého příkladu.

Jest řešiti soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 13{,}4x + 4{,}5y - 8{,}9z - 16{,}2 &= 0, \\ 4{,}5x - 7{,}2y + 10{,}2z - 8{,}9 &= 0, \\ 23{,}1x - 6{,}6y - 4{,}5z - 1{,}2 &= 0. \end{aligned} \tag{7,1}$$

Tuto soustavu pišme a řešme v tomto snadno pochopitelném schematu (při výpočtech užijme logaritmického pravítka). (Označme a_x, a_y, a_z, a koeficienty u neznámých x, y, z resp. absolutní člen.)

a_x	a_y	a_z	a	$-S$	zkouška	
13,4	4,5	—8,9	—16,2	7,2	0	(1)
4,5	— 7,2	10,2	—18,9	11,4	0	(2)
—4,5	— 1,51	2,99	5,44	— 2,41	—0,01	(1) . $\left(\frac{-4,5}{13,4}\right)$
0	— 8,71	13,19	—13,46	8,99	0,01	(I)
23,1	— 6,6	—4,5	— 1,2	—10,8	0	(3)
—23,1	— 7,75	15,34	27,92	—12,41	0	(1) . $\left(\frac{-23,1}{13,4}\right)$
	—14,35	10,84	26,72	—23,21	0	(II)

(I) a (II) tvoří soustavu rovnic o dvou neznámých, pro kterou

a'_y	a'_z	a'	$-S$	zkouška	
— 8,71	13,19	—13,46	8,99	0,01	(I)
—14,35	10,84	26,72	—23,21	0	(II)
14,35	—21,73	22,17	—14,81	—0,02	(I) . $\left(\frac{-14,35}{8,71}\right)$
	—10,89	48,89	—38,02	—0,02	

takže $z = 4,49$; z rovnice (II) plyne $y = 5,25$, a z rovnice (1) dostaneme $x = 2,43$. Tyto hodnoty dosazeny do rovnic (2) a (3) dávají výsledek 0,033; 0,078.

Počítejme tentýž příklad, abychom dosáhli lepší přesnosti (na 3 desetinná místa), užívajíce počítacího stroje:

a_x	a_y	a_z	a	$-S$	zkouška	
13,4	4,5	— 8,9	—16,2	7,2	0	(1)
4,5	— 7,2	10,2	—18,9	11,4	0	(2)
— 4,5	— 1,511	2,989	5,440	— 2,418	0	$(1)\,.\left(\frac{-4{,}5}{13{,}4}\right)$
	— 8,711	13,189	—13 460	8,982	0	(I)
23,1	— 6,6	— 4,5	— 1,2	—10,8	0	(3)
—23,1	— 7,758	15,342	27,927	—12,412	—0,001	$(1)\,.\left(\frac{-23{,}1}{13{,}4}\right)$
	—14,358	10,892	26,727	—23,512	—0,001	(II)
	14,358	—21,379	22,185	—14,804	0	$(\mathrm{I})\,.\left(\frac{-14{,}358}{8{,}711}\right)$
		—10,897	48,912	—38,016	—0,001	

$$z \doteq 48{,}912 : 10{,}897 = 4{,}489;$$

z rovnice (II) vypočteme

$$y \doteq 5{,}251,$$

z rovnice (1) dostaneme

$$x \doteq 2{,}427.$$

Tyto hodnoty dosazeny do (2) a (3) dávají $+\,0{,}0021$; 0,0066 místo 0.

Poznámka: Dörfling (Mathematik für Ingenieure und Techniker, str. 44, 45) řeší tímto způsobem soustavu sedmi rovnic o sedmi neznámých.

Ukažme při této příležitosti, jak lze počítati determinanty, jichž prvky jsou vícemístná čísla a to na tomto příkladě:

Aniž známe řešení rovnic v (7,1), jest stanoviti součet neznámých $x + y + z = s$.

Soustava (7,1) ve spojení s touto rovnicí představuje soustavu 4 rovnic mezi třemi neznámými x, y, z, jichž vyloučením*) obdržíme pro s rovnici ve tvaru determinantu

$$\begin{vmatrix} 13,4 & 4,5 & -8,9 & -16,2 \\ 4,5 & -7,2 & 10,2 & -18,9 \\ 23,1 & -6,6 & -4,5 & -1,2 \\ 1 & 1 & 1 & -s \end{vmatrix} = 0.$$

Tato rovnice se nezmění, dělíme-li prvky v řádcích postupně 13,4; 4,5; 23,1; výsledek jest (použijeme logaritmického pravítka):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0,34 & -0,67 & -1,21 \\ 1 & -1,60 & 2,27 & -4,20 \\ 1 & -0,29 & -0,20 & -0,05 \\ 1 & 1 & 1 & -s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,94 & -2,94 & 2,99 \\ -1,31 & 2,47 & -4,15 \\ -1,29 & -1,20 & s-0,05 \end{vmatrix} = 0:$$

Determinant vlevo vznikl z předchozího determinantu odečtením řádku druhého od prvního, třetího od druhého a čtvrtého od třetího. Týmže obratem jako dříve obdržíme z determinantu vpravo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1,52 & 1,54 \\ 1 & -1,89 & 3,17 \\ 1 & 0,93 & 0,04 - \dfrac{s}{1,29} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,37 & -1,63 \\ -2,82 & 3,13 + \dfrac{s}{1,29} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{0,37s}{1,29} + 1,1581 - 4,5966 = 0,$$

takže

$$s = \frac{3,4385 \, . \, 1,29}{0,37} = 11,988$$

místo správného $2,43 + 5,25 + 4,49 = 12,17$. Opět jest zřejmé, že bychom musili počítati na tři desetinná místa, chtěli-li bychom docíliti výsledku lepšího.

Zvláštní pokyn lze uděliti pro řešení soustavy rovnic

*) Obdobný postup viz: Pleskot: Spojnicové nomogramy, Cesta k vědění 12, str. 15.

$$
\begin{aligned}
A_1x + b_1y + c_1z &= d_1,\\
a_2x + B_2y + c_2z &= d_2,\\
a_3x + b_3y + C_3z &= d_3,
\end{aligned}
$$

v níž koeficienty A_1, B_2, C_3 svojí absolutní hodnotou jsou značně větší než ostatní koeficienty téže rovnice. Přibližně jest

$$x = \frac{d_1}{A_1},\ y = \frac{d_2}{B_2},\ z = \frac{d_3}{C_3}.$$

Položme nyní v dané soustavě

$$x = \frac{d_1}{A_1} + x_1,\quad y = \frac{d_2}{B_2} + y_1,\quad z = \frac{d_3}{C_3} + z_1,$$

tak obdržíme

$$
\begin{aligned}
A_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 &= -\frac{b_1d_2}{B_2} - \frac{c_1d_3}{C_3},\\
a_2x_1 + B_2y_1 + c_2z_1 &= -\frac{a_2d_1}{A_1} - \frac{c_2d_3}{C_3},\\
a_3x_1 + b_3y_1 + C_3z_1 &= -\frac{a_3d_1}{A_1} - \frac{b_3d_2}{B_2},
\end{aligned}
$$

a užijeme znovu popsaného obratu

$$x_1 = \frac{1}{A_1}\left(-\frac{b_1d_2}{B_2} - \frac{c_1d_3}{C_3}\right) \text{ atd.}$$

Na př. řešme soustavu

$$
\begin{aligned}
3x + 0{,}12y - 0{,}08z &= 6;\\
0{,}07x + 4y - 0{,}12z &= 12;\\
0{,}05x - 0{,}2y + 5z &= 20.
\end{aligned}
$$

Přibližné hodnoty jsou

$$x \doteq 2,\ y \doteq 3,\ z \doteq 4;$$

ty vedou k soustavě

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 0{,}12y_1 + 0{,}08z_1 &= -0{,}04;\\
0{,}07x_1 + 4y_1 - 0{,}12z_1 &= 0{,}34;\\
0{,}05x_1 - 0{,}2y_1 + 5z_1 &= 0{,}5
\end{aligned}
$$

a ta dává, řešena týmž způsobem,

$$x_1 = -0{,}013,\ y_1 = 0{,}085,\ z_1 = 0{,}1;$$

takže

$$x \doteq 1{,}987,\ y \doteq 3{,}085,\ z \doteq 4{,}1.$$

Tyto hodnoty dosazeny do levých stran rovnic dávají postupně 6,003; 11,987; 19,982 místo správných hodnot 6; 12; 20. Nestačila-li by tato přesnost, řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_2 + 0{,}12y_2 - 0{,}08z_2 &= -0{,}003,\\ 0{,}07x_2 + 4y_2 - 0{,}12z_2 &= 0{,}013,\\ 0{,}05x_2 - 0{,}2y + 5z_2 &= 0{,}018, \end{aligned}$$

jež vedou k hodnotám

$$x_2 = -0{,}001,\ y_2 = 0{,}003,\ z_2 = 0{,}004.$$

Jsou tedy ještě lepší hodnoty

$$x \doteq 1{,}986,\ y \doteq 3{,}088,\ z \doteq 4{,}108;$$

ty dávají výsledky levých stran 5,990; 11,998; 20,022.

Úlohy: **84.** Řešte oběma způsoby

$$\begin{aligned} 6x + 0{,}1y - 0{,}4z &= 6{,}897\\ 0{,}1x - 7y - 0{,}3z &= 8{,}228\\ -0{,}4x - 0{,}3y + 8z &= 8{,}833. \end{aligned} \qquad [x = y = z = 1{,}21]$$

85. Soustavu rovnic $x + y = a$, $y + z = b$, $z + x = c$ řešíme tak, že všechny tři rovnice sečteme, dělíme dvěma a nyní od tohoto výsledku odčítáme postupně dané rovnice. — Proč tohoto postupu nelze užíti při soustavě $x + y = a$, $y + z = b$, $z + u = c$, $u + x = d$? [Aby tato soustava byla řešitelná — a pak má nekonečně mnoho řešení — musí býti $a + c = b + d$.]

86. Tři hráči hrají tři hry; každé hry se účastní všichni tři hráči a prohrávající platí oběma hráčům tolik, kolik již mají. Nejprve prohrál první, pak druhý, posléze třetí. Kolik kdo měl na počátku, měl-li ke konci her první a K, druhý b K, třetí c K? Označíme-li původní částky x, y, z, platí především $x + y + z = a + b + c$. Snadno z úlohy odvodíme další tři rovnice. Vysvětlete, proč tři neznámé hoví čtyřem rovnicím. [Další rovnice jsou $4(x - y - z) = a$, $2(-x + 3y - z) = b$, $-x - y + 7z = c$.]

Užití lineárních soustav v přírodních vědách jest veliké a velmi důležité; řeší je chemikové, vyplývají v elektrotechnice z Kirchhoffových zákonů; zejména pak přicházejí při vyrovnávání údajů metodou nejmenších čtverců.

8.

SOUSTAVY ROVNIC NELINEÁRNÍCH.

a) I s těmito soustavami jest čtenář v základě již obeznámen: Při procvičování analytické geometrie kuželoseček se setkal se soustavou rovnic jedné lineární a druhé kvadratické, případně obou kvadratických rovnic. Dána-li jedna rovnice kvadratická a druhá lineární, stačí z rovnice lineární vypočísti kteroukoliv neznámou a dosaditi do rovnice kvadratické; tak vznikne kvadratická rovnice o jedné neznámé mající dva kořeny, z nichž každý z lineární rovnice podává druhou neznámou; tato soustava má dva páry řešení, jež značíme $(x_1; y_1)$; $(x_2; y_2)$.

Na př. jest řešiti soustavu:

$$x^2 - 5xy + 2x - y + 3 = 0,$$
$$x - 3y + 1 = 0;$$

z rovnice lineární plyne

$$x = 3y - 1,$$

což dosazeno do rovnice kvadratické dává

$$3y^2 - 2y - 1 = 0$$

o kořenech

$$y_1 = 1, \ y_2 = -\tfrac{1}{3},$$

takže

$$x_1 = 2, \ x_2 = -2;$$

soustava má řešení

$$(2; 1), \ (-2; -\tfrac{1}{3}).$$

Soustavu rovnic

$$x + y = a, \ xy = b$$

řešíme touto úvahou: Jest nalézti čísla, jichž součet a součin jest dán. Poněvadž o kořenech kvadratické rovnice

$$x^2 + px + q = 0$$

platí

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q,$$

jest řešení poslední soustavy dáno kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 + ax + b = 0;$$

soustavě hoví řešení

$$x = x_1, \quad y = y_2, \quad x = x_2, \quad y = x_1.$$

Obecnější soustavu

$$mx + ny = p, \quad xy = q$$

převedeme na soustavu

$$mx + ny = p, \quad mx \,.\, ny = mnq$$

a tuto soustavu řeší kvadratická rovnice

$$X^2 - pX + mnq = 0;$$

řešení dané soustavy pak jest

$$\left(\frac{X_1}{m}; \frac{X_2}{n}\right), \quad \left(\frac{X_2}{m}; \frac{X_1}{n}\right).$$

b) Řešiti soustavu dvou kvadratických rovnic

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

dovede čtenář neznalý řešení obecné rovnice čtvrtého jen ve zvláštních případech. Elementární výklady se omezují proto jen na některé jednodušší případy, na př. řeší se soustava kvadratických rovnic:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d,$$
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = D \neq 0.$$

Dělme první rovnici druhou; dostaneme

$$\frac{ax^2 + bxy + cy^2}{Ax^2 + Bxy + Cy^2} = \frac{d}{D};$$

po odstranění zlomku jest

$$(aD - dA)\,x^2 + (bD - dB)\,xy + (cD - dC)\,y^2 = 0$$

a tuto rovnici lze řešiti na př. podle $x : y = u$. Výsledek $u_{1,2}$ dosazen do rovnice druhé, poskytuje

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{D}{Au_1^2 + Bu_1 + C}}, \quad x_{1,2} = \pm u_1\sqrt{\frac{D}{Au_1^2 + Bu_1 + C}},$$

$$y_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{D}{Au_2^2 + Bu_2 + C}}, \quad x_{3,4} = \pm u_2\sqrt{\frac{D}{Au_2^2 + Bu_2 + C}};$$

této soustavě hoví tedy čtyři páry řešení.

Budiž dána soustava

$$x^2 - xy - 3x + 2 = 0, \quad 2xy - y^2 + x - y - 2 = 0.$$

Z druhé rovnice plyne

$$x = \frac{y^2 + y + 2}{2y + 1}$$

a to dosazeno do první dává rovnici

$$3y^4 - 2y^3 - 12y^2 - 23y - 12 = 0.$$

Jeden její kořen jest

$$y_1 = 3,$$

druhý leží mezi -1 a 0; Newtonovou metodou určíme

$$y_2 = -0{,}7281$$

a těmto hodnotám odpovídá

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3{,}9500.$$

Poněvadž jest

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \tfrac{2}{3}, \quad y_1 y_2 y_3 y_4 = -4,$$

jest

$$y_3 + y_4 = \tfrac{2}{3} - y_1 - y_2, \quad y_3 y_4 = -\frac{4}{y_1 y_2},$$

takže y_3, y_4 hoví kvadratické rovnici

$$y^2 + 1{,}6052y + 1{,}8313 = 0$$

a její kořeny již snadno určíme.

I tato soustava má čtyři páry řešení a tento poznatek platí obecně:

S o u s t a v a d v o u k v a d r a t i c k ý c h r o v n i c o d v o u n e z n á m ý c h m á o b e c n ě č t y ř i p á r y ř e š e n í.

To dokážeme takto: Buďtež dány dvě kvadratické rovnice

$$x^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$
$$x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

předpokládejme však, že tyto mnohočleny stupně druhého v x a y nemají kromě konstantního činitele nezávislého na x i y žádného společného dělitele.

Koeficient 1 při x^2 ani koeficienty 2 při xy, při x a při y nejsou na újmu obecnosti. Tyto dvě rovnice pišme takto:

$$x^2 + 2x\,(by + d) + cy^2 + 2ey + f = 0,$$
$$x^2 + 2x\,(By + D) + Cy^2 + 2ey + F = 0,$$

nebo též

$$x^2 + 2xp_1 + p_2 = 0, \quad x^2 + 2xP_1 + P_2 = 0,$$

kdež význam p_1, p_2, P_1, P_2 jest zřejmý. Řešením podle x plyne z obou rovnic:

$$(P_1 - p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - p_2})^2 = P_1^2 - P_2,$$

a tuto rovnici lze po několika obratech psáti ve tvaru

$$(P_2 - p_2)^2 - 4\,p_1\,(P_1 - p_1)\,(P_2 - p_2) + 4\,p_2\,(P_1 - p_1)^2 = 0,$$

což jest rovnice v y stupně čtvrtého. Upravíme-li dané rovnice dle mocnin y, obdržíme po týchž úpravách rovnici stupně čtvrtého pro x.

Snad by bylo možno namítnouti, že každému kořenu pro x náleží celkem 4 hodnoty pro y, takže by tato soustava měla celkem čtyřikráte čtyři, t. j. 16 řešení; že tomu tak není, ukáže nám tato úvaha. Nechť má soustava více než čtyři páry řešení; volme si z nich kterýchkoliv pět $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, $(x_4; y_4)$, $(x_5; y_5)$; tyto hodnoty dosazeny do první rovnice dávají pět rovnic

$$x_i^2 + 2bx_iy_i + cy_i^2 + 2dx_i + 2ey_i + f = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5);$$

z těchto pěti rovnic můžeme určiti pět veličin

$$2b, c, 2d, 2e, f.$$

Avšak kdybychom týmž způsobem chtěli určiti z obdobných pěti rovnic

$$x_i^2 + 2Bx_iy_i + Cy_i^2 + 2Dx_i + 2Ey_i + F = 0$$

pět neznámých

$$2B, C, 2D, 2E, F,$$

došli bychom k týmž hodnotám jako dříve, t. j. bylo by

$$2b = 2B, \ c = C, \ 2d = 2D, \ 2e = 2E, \ f = F,$$

což znamená, že obě rovnice jsou totožny a pak ovšem mají nekonečně mnoho společných řešení. Má tedy soustava dvou kvadratických rovnic obecně čtyři páry řešení; i zde nutno vzíti v úvahu násobnost kořenů.

Proč pravíme obecně, vysvitne z tohoto příkladu:

Jest řešiti soustavu rovnic

$$xy = a, \ xy + mx + ny + p = 0.$$

Odečtením první rovnice od druhé jest

$$mx + ny + p^2 + a^2 = 0,$$

což jest rovnice lineární, která s kteroukoliv z daných rovnic určuje nikoliv čtyři páry, nýbrž pouze dva páry řešení. — Vysvětlení jest toto: Obě rovnice představují rovnoosé hyperboly, jichž osy, rovnoběžné s osami x a y, jsou rovnoběžné i mezi sebou; tyto hyperboly se protínají ve dvou bodech v konečnu (ty odpovídají našim dvěma párům řešení), další dva průsečíky jsou v nekonečnu a odpovídají dalším dvěma párům řešení, ovšem vyjádřeným čísly nekonečně velikými.

Příkladů na řešení soustav v a) a b) podává každá sbírka; umělých a velmi často i nesnadných obratů vyžadují četné příklady (týkající se i soustav vyšších) uveřejňované v Příloze k Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky (až do jeho padesátého ročníku) a v Rozhledech matematicko-přírodovědeckých (od r. 1921) (viz též Schwarz, str. 90 a n.).

Úlohy: **37.** V které aritmetické řadě jest $a_1a_{14} = 276$, $a_7a_8 = 1326$?

Řešiti soustavy rovnic:

38. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{61}{30}$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 11$.

39. $\binom{x}{2} - \binom{y-1}{2} = 12$, $\frac{\log(x+y)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{z}}{3 - \log(x+y)}$.

40. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a$, $\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = b$.

41. $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y = a$, $\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} y = b$.

42. $5^{\log x} + 3^{\log y} = 32$; $5^{\log x} . 3^{\log y} = 135$.

43. $2\sqrt[y]{9^5} = 3\sqrt[x]{64}$, $\sqrt[x]{2^{10}} = \sqrt[y]{2^{24}}$.

9.

JINÉ SOUSTAVY. PŘIBLIŽNÉ ŘEŠENÍ.

Soustavy, v nichž jsou neznámé stupně vyššího než druhého nebo v nichž jest více neznámých než dvě, lze řešiti jen ve zvláštních případech.

a) Na př. jest řešiti soustavu:

$$x(y+z) = a,$$
$$y(z+x) = b,$$
$$z(x+y) = c;$$

sečtením těchto rovnic a dělením dvěma obdržíme

$$xy + xz + yz = \frac{a + b + c}{2} = s,$$

načež vypočteme

$$yz = s - a, \quad zx = s - b, \quad xy = s - c.$$

Znásobením těchto rovnic plyne

$$x^2y^2z^2 = (s - a)(s - b)(s - c),$$

$$xyz = \pm \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)}$$

a postupným dělením

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s - a}},$$

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{(s - a)(s - c)}{s - b}},$$

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{s - c}}.$$

Úloha 44. Řešte podobným způsobem soustavu

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 = a,$$
$$x_4x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 = b,$$
$$x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 + x_1x_2x_3 = c,$$
$$x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 = d.$$

b) Řešme tuto úlohu: Součet prvních čtyř členů aritmetické řady jest 16, součet jejich převrácených hodnot je $\frac{176}{105}$; určiti řadu.

Píšeme-li, jak obvykle $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$, obdržíme soustavu rovnic

$$4a_1 + 6d = 16,$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + d} + \frac{1}{a_1 + 2d} + \frac{1}{a_1 + 3d} = \frac{176}{105}$$

a tuto soustavu rovnic, z nichž jedna jest lineární a druhá čtvrtého stupně, máme řešiti; úloha není snadná. Označíme-li však členy aritmetické řady

$$\alpha - 3\delta,\ \alpha - \delta,\ \alpha + \delta,\ \alpha + 3\delta,$$

dává první podmínka rovnici

$$4\alpha = 16$$

a druhá

$$\frac{1}{4 - 3\delta} + \frac{1}{4 - \delta} + \frac{1}{4 + \delta} + \frac{1}{4 + 3\delta} = \frac{176}{105},$$

vede na kvadratickou rovnici v δ^2.

c) Z odstavce 3 a) plyne, že v soustavě

$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ xy + yz + zx &= b, \\ xyz &= c, \end{aligned}$$

lze považovati neznámé za kořeny rovnice

$$X^3 - aX^2 + bX - c = 0;$$

jsou-li X_1, X_2, X_3 její kořeny, jest řešením této soustavy

$$(X_1; X_2; X_3),\ (X_1; X_3; X_2),\ (X_2; X_1; X_3),$$
$$(X_2; X_3; X_1),\ (X_3; X_1; X_2),\ (X_3; X_2; X_1).$$

d) Soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= m, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= n, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= p \end{aligned}$$

řešíme úvahou, že jsou vlastně dány součty prvních, druhých a třetích mocnin kořenů rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0;$$

dle 6 e) jest

$$s_1 + a = 0,\ a_2 + as_1 + 2b = 0,\ s_3 + as_2 + bs_1 + 3c = 0;$$

odtud určíme, že jest v podstatě řešiti rovnici:

$a = -m$; $n - m = -2b$ atd.

$$x^3 - mx^2 - \frac{m^2 - n}{2}x + \frac{-m^3 + 3mn - 2p}{6} = 0.$$

e) Na řešení soustavy o dvou neznámých lze převésti úlohu nalézti komplexní kořeny rovnic o jedné neznámé; na př. jest řešiti rovnici

$$x^4 + a^4 = 0.$$

Položme

$$x = u - iv;$$

po dosazení a oddělení části reálné a imaginární, obdržíme dvě rovnice

$$u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + a^4 = 0, \quad 4u^3v - 4uv^3 = 0.$$

Druhá rovnice ihned dává

$$u^2 = v^2$$

($u = 0$, $v = 0$ nedává řešení soustavy — leda že by $a = 0$), což dosazeno do první rovnice dává

$$4u^4 = a^4,$$

odkud

$$u_{1,2} = \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}, \qquad u_{3,4} = \pm \tfrac{1}{2}ia\sqrt{2}$$

a vhodnou kombinací

$$x_{1,2} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}(1 \pm i), \qquad x_{3,4} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}(-1 \pm i);$$

$u_{3,4}$ nemá významu.

Řešme takto rovnici

$$x^4 + x + 3 = 0.$$

Substituce $x = u + iv$ vede k rovnicím

$$u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + u + 3 = 0,$$
$$4u^3v - 4v^3u + v = 0$$

a krátíme-li v ($v = 0$ vede ke kořenům reálným), dostaneme

$$4u^3 - 4u^2v^2 + 1 = 0.$$

Mohli bychom sice z této rovnice vypočísti v a dosaditi do první, došli bychom však k rovnici šestého stupně dosti složité, kterou bychom musili řešiti některou z přibližných metod. V těchto a podobných případech se uchylujeme k přibližným metodám řešiti soustavu rovnic; dvě z těchto metod (metodu Newtonovu a iterací) zde vyložíme.

f) Jest dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y - 11 &= 0, \\ x + y^2 - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Tyto rovnice přibližně řeší

$$x_0 = 3{,}1, \quad y_0 = 1{,}5.$$

Položme

$$x = 3{,}1 + x_1, \quad y = 1{,}5 + y_1;$$

x_1, y_1 jsou malá čísla snad vyjádřena setinami, takže x_1^2, y_1^2 můžeme vynechati. Tak dospějeme k rovnicím

$$\begin{aligned} 6{,}2x_1 + y_1 + 0{,}11 &= 0, \\ x_1 + 3y_1 + 0{,}35 &= 0. \end{aligned}$$

Přibližné jich řešení jest

$$x_1 = 0{,}001, \quad y_1 = -0{,}117,$$

takže lepší hodnoty jsou

$$x = 3{,}101, \quad y = 1{,}383.$$

Opět položme

$$x = 3{,}101 + x_2, \quad y = 1{,}383 + y_2,$$

tato substituce vede k rovnicím

$$\begin{aligned} 6{,}202x_2 + y_2 &= 0{,}0008, \\ x_2 + 2{,}766y_2 &= -0{,}0137. \end{aligned}$$

Opravy jsou

$$x_2 = 0{,}002, \quad y_2 = -0{,}005,$$

tedy

$$x = 3{,}103, \quad y = 1{,}378.$$

Tyto hodnoty dosazeny do daných rovnic dají 0,007, 0,002.

Tímto postupem jsme s to rozřešiti i systémy tří rovnic o tří neznámých; jistého zjednodušení dosáhne čtenář obeznalý s Taylorovou řadou pro funkce dvou proměnných. Pak totiž lze psáti, omezíme-li se na první mocniny přírůstků h, k a značí-li $f_1(\xi, \eta) = 0$, $f_2(\xi, \eta) = 0$ dané rovnice, relace

$$f_1(x + h, y + k) = f_1(x, y) + \frac{\partial f_1}{\partial x} h + \frac{\partial f_1}{\partial y} k = 0.$$

$$f_2(x + h, y + k) = f_2(x, y) + \frac{\partial f_2}{\partial x} h + \frac{\partial f_2}{\partial y} k = 0.$$

Na př. jest řešiti soustavu rovnic

$$\begin{aligned} f_1(\xi, \eta) &\equiv 2\xi^3 - \eta^2 - 1 = 0, \\ f_2(\xi, \eta) &\equiv \xi\eta^3 - \eta \ - 4 = 0. \end{aligned}$$

Zde jest

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 6x^2, \ \frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y, \ \frac{\partial f_2}{\partial x} = y^3, \ \frac{\partial f_2}{\partial y} = 3xy^2 - 1;$$

vyjděme z hodnot

$$x = 1{,}2, \ y = 1{,}7;$$

pak pro ně jest

$$f_1 = -0{,}434, \ f_2 = 0{,}196,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 8{,}64, \ \frac{\partial f_1}{\partial y} = -3{,}40; \ \frac{\partial f_2}{\partial x} = 4{,}91, \ \frac{\partial f_2}{\partial y} = 9{,}40.$$

Soustava pro h a k zní

$$\begin{aligned} 8{,}64h - 3{,}40k &= \ \ 0{,}434, \\ 4{,}91h + 9{,}40k &= -0{,}196; \end{aligned}$$

odtud

$$h = 0{,}035, \ k = -0{,}039;$$

a tedy

$$\xi = x + h = 1{,}235, \ \eta = y + k = 1{,}661;$$

další krok pak dává

$$\xi = 1{,}2348, \ \eta = 1{,}6615;$$

výsledky dosazení do levých stran jsou 0,0112; —0,0001.

g) Nalézti vhodné počáteční hodnoty bývá spojeno s nemalými obtížemi; někdy si lze pomoci jednoduchou úvahou patrnou z tohoto příkladu: Řešme rovnice

$$x^2 - xy + y - 2x - 3y + 6 = 0,$$
$$x^2 - y^2 - 1 = 0.$$

Druhá rovnice jest přibližně splněna pro

$$x^2 = y^2,$$

t. j. když

$$x = \pm\, y.$$

To dosazeno do první rovnice dává

$$x = 2 \text{ nebo } x = 3.$$

Vyjděme od počátečních hodnot

$$x = 2,\ y = 2.$$

Přírůstky h a k určíme z rovnic

$$0 \,.\, h - k = 0,\ 4h + 4k = 1,$$

takže

$$k = 0,\ h = 0{,}25.$$

Potom

$$x = 2{,}25,\ y = 2;\ f_1(2{,}25;\, 2) = \tfrac{1}{16},\ f_2(2{,}25;\, 2) = \tfrac{1}{16}.$$

Další přiblížení dají rovnice

$$0{,}5h - 1{,}25k + \tfrac{1}{16} = 0,$$
$$4{,}5h - \quad 4k + \tfrac{1}{16} = 0.$$

Jest pak

$$h = 0{,}048,\ k = 0{,}069,\ x = 2{,}298,\ y = 2{,}069;$$

výsledky substitucí do levých stran daných rovnic jsou 0,00400; 0,00043.

Geometrický význam vyloženého obratu jest ten, že hyperbola vyjádřená druhou rovnicí se nahrazuje svými asymptotami.

Úlohy: **45.** Užijte tohoto obratu při řešení soustavy rovnic (vzniklé ke konci odst. 8a z rovnice $x^4 + x + 3 = 0$)

$$u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + u + 3 = 0,$$
$$4u^3v - 4uv^3 - 1 = 0.$$

[Vyjděte z hodnot $u = v = 1$, lepší hodnoty jsou $u = 0{,}93$. $v = 1{,}06$; výsledky $0{,}1200$, $-0{,}0376$, jež lze ovšem ještě zdokonaliti. Přibližná hodnota dvou kořenů jest $0{,}93 \pm i\, 1{,}06$; ukažte, že přibližné hodnoty dalších dvou kořenů, opět komplexních, jsou dány rovnicí $\xi^2 + 2u\xi + \frac{3}{u^2 + v^2} = 0$.]

46. Nalezněte průsečík křivek

$$4x^2 + 9y^2 - 1 = 0,$$
$$(x - 1)^2 + (y - 0{,}5)^2 - 1 = 0.$$

[Vyjděte z hodnot $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{4}$; lepší hodnoty jsou $0{,}335$, $-0{,}247$ dávající výsledky $-0{,}002$, $0{,}000$.]

h) Metoda iterací. Je-li možno danou soustavu

$$f_1(x, y) = 0, \ f_2(x, y) = 0$$

psáti ve tvaru

$$x = \varphi_1(x, y), \ y = \varphi_2(x, y),$$

lze za jistých podmínek s výhodou užíti iterací.

Na př. jest řešiti rovnice

$$xy^2 - 2y^2 = 1, \ x^2y - 3x^2 = 1;$$

pišme tyto rovnice ve tvaru

$$x = 2 + \frac{1}{y^2}, \quad y = 3 + \frac{1}{x^2}$$

a vyjděme z počátečních hodnot

$$x = 1, \ y = 1;$$

pak lepší hodnoty jsou

$$x_1 = 2 + 1 = 3, \ y_1 = 3 + 1 = 4,$$

$$x_2 = 2 + \frac{1}{\cancel{1+}\, 4^2} = 2{,}063, \qquad y_2 = 3 + \frac{1}{\cancel{1+}\, 3^2} = 3{,}1$$

atd. Další hodnoty jsou zřejmy z této tabulky

x	y
2,103	3,235
2,096	3,231
2,0959	3,2276
2,0961	3,2277

Jako další příklad řešme soustavu

$$10^x - 3y = 5, \qquad 40x - \sqrt{10^y} = 8.$$

Pišme ji ve tvaru:

$$x = \log(3y + 5), \quad y = 2\log(40x - 8);$$

za počáteční hodnoty volme

$$x = 0{,}9, \quad y = 3;$$

potom dostaneme tabulku

$\log(3y + 5)$	$2\log(40x - 8)$	x	y
log 14	2 log 28	1,146	2,894
log 13,682	2 log 37,84	1,1363	3,156
log 14,468	2 log 37,452	1,1604	3,147
log 14,441	2 log 38,416	1,1596	3,169
log 14,507	2 log 38,384	1,1617	3,168
log 14,504	2 log 38,468	1,1615	3,170
log 14,510	2 log 38,460	1,1617	3,170

I soustavy o třech neznámých lze touto metodou řešiti.

Úloha 47. Řešte tak soustavu lineárních rovnic z odst. 7; pište ji ve tvaru

$$x = \frac{6 - 0,12y + 0,08z}{3},$$

$$y = \frac{12 - 0,07x + 0,12z}{4},$$

$$z = \frac{20 - 0,05x + 0,02y}{5}$$

a vyjděte z počátečních hodnot $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $z_0 = 4$.