bod se zobrazuje v homothetičnost, ježto osa kolineace $x_\infty{}'$ je úběžnou přímkou.

Pro další některá zobrazení povšimněme si případu dvojstopního zobrazení, při němž stopní roviny jsou rovnoběžny s průmětnou π a mají od této průmětny vzdálenosti $\pm d$, t. j. *jsou souměrně položeny k průmětně π a promítání je kolmé.* V obr. 42 je sestrojen půdorys a nárys takových rovin ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$, které jsou rovnoběžny s první průmětnou, která je v rovině π půlící vzdálenost stopních rovin. Označíme-li vzdálenost libovolného bodu P od průmětny π jako souřadnici z, tu souřadnice rovin ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ jsou $\pm d$. Kolmý průmět do roviny π jeví se ve skutečné velikosti v půdoryse. Přímky $a, b, \ldots$ jdoucí bodem P mají stopníky na rovinách ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$, jejichž půdorysy jsou homothetické pro střed P_1 a poměr $\overline{P_1{}^1A_1} : \overline{P_1{}^2A_1} = \overline{P_1{}^1B_1} : \overline{P_1{}^2B_1} = \ldots = k$, kde $k = \dfrac{z - d}{z + d}$. Body průmětny π ($z = 0$) se zobrazují v středovou souměrnost ($k = -1$), úběžné body ($z = \infty$) zobrazují se v translaci ($k = 1$), body roviny ${}^1\sigma$ ($z = d$) a roviny ${}^2\sigma$ ($z = -d$) zobrazují se v speciální homothetičnosti, pro něž v prvém případě $k = 0$ a v druhém případě $k = \infty$.

Dvojstopního zobrazení se užívá s výhodou pro útvary přímkové; ukážeme to na příkladě t. zv. paprskové sítě, které (ve zvláštním případě) potřebujeme v dalším.

10. SÍŤOVÉ PROMÍTÁNÍ

Paprskovou sítí[16]) jmenujeme prostorový útvar skládající se z přímek, z nichž libovolným bodem v prostoru jde jedna a v libovolné rovině je též jen jedna přímka sítě. Tento přímkový útvar má nekonečně mnoho paprsků ∞^2. Lze dokázati, že taková paprsková síť je souhrn příček (trans-

[16]) Též „lineární kongruencí" viz *L. Seifert* l. c., str. 54.

versál) dvou mimoběžek, které mohou býti reálné různé, nebo reálné splývající anebo konečně imaginární druhého druhu.[17]) Tyto přímky jmenujeme též *řídicími přímkami* paprskové sítě. Paprsků sítě lze užíti též jako promítacích paprsků na průmětnu π při tak zvaném *síťovém* nebo *zborceném promítání*. Označme si m, n řídicí přímky paprskové sítě, jež jsou mimoběžné, a zvolme průmětnu π tak, aby neobsahovala žádnou z přímek m, n. Síťový nebo zborcený průmět libovolného bodu A je v průsečíku A' příčky a, jdoucí bodem A k řídicím přímkám m, n, s průmětnou π. Není-li bod A na žádné z přímek m, n, má jediný síťový průmět. Body přímek m nebo n mají nesčíslné množství síťových průmětů, jež jsou vždy na přímce, jež je průsečnicí průmětny π s rovinou určenou tím bodem a druhou řídicí přímkou, na níž bod ten neleží. Obráceně však bod A svým síťovým průmětem A' není v prostoru určen, ježto bod A' je zborceným průmětem všech bodů příčky jdoucí bodem A' k přímkám m, n; aby byl určen, musela by býti pro bod A dána ještě nějaká podmínka, na př. vzdálenost od průmětny π, nebo jiný zborcený průmět bodu A pro jiné řídicí přímky, ač v posledním případě oba zborcené průměty musely by vyhovovati jisté podmínce atd.

Síťové promítání není lineární, t. j. přímka nemá za průmět zase přímku, nýbrž obecně kuželosečku, jež se může případně rozpadnouti. Mějme sestrojiti síťový průmět přímky p, jež je mimoběžná s přímkami m, n. Promítací paprsky $a, b, \dots$ všech bodů $A, B, \dots$ přímky p vyplní plochu zborcenou druhého stupně, obecně t. zv. jednodílný hyperboloid, jejž průmětna π protíná v kuželosečce p', jež se může ve zvláštním případě rozpadnouti ve dvě přímky (kdyby rovina π byla tečnou rovinou hyperboloidu). Promítací hyperboloid obsahuje dvě soustavy tvořících přímek; jedna soustava přímek $a, b, \dots$ jsou promítací paprsky bodů $A, B, \dots$ přímky p a druhá soustava sestává z přímek $p, m, n, {}^1p, \dots$, jež proti-

[17]) Tamtéž str. 54 a n.

nají všechny přímky prvé soustavy; mezi sebou jsou však mimoběžné. Přímky druhé soustavy $p, {}^1p, \ldots$, mimo m, n, mají týž síťový průmět $p' \equiv {}^1p' \equiv \ldots$ Kuželosečka p' jde stopníky M, N řídicích přímek m, n na průmětně π, jakož i stopníkem P přímky p. Kuželosečkový průmět p' jdoucí body M, N neurčuje přímku p jednoznačně, ježto všechny přímky $p, {}^1p, \ldots$ druhé soustavy výše zmíněného promítacího hyperboloidu lze považovati za originál k průmětu p'. Jednoznačnosti mezi průmětem p' a originálem přímky p se zde docílí, určíme-li vedle průmětu p' ještě na něm stopník P přímky p. Bodu P říkáme *bod upevňující*; kuželosečce (s bodem upevňujícím) se říká *upevněná kuželosečka*. Dostáváme tedy tento výsledek:

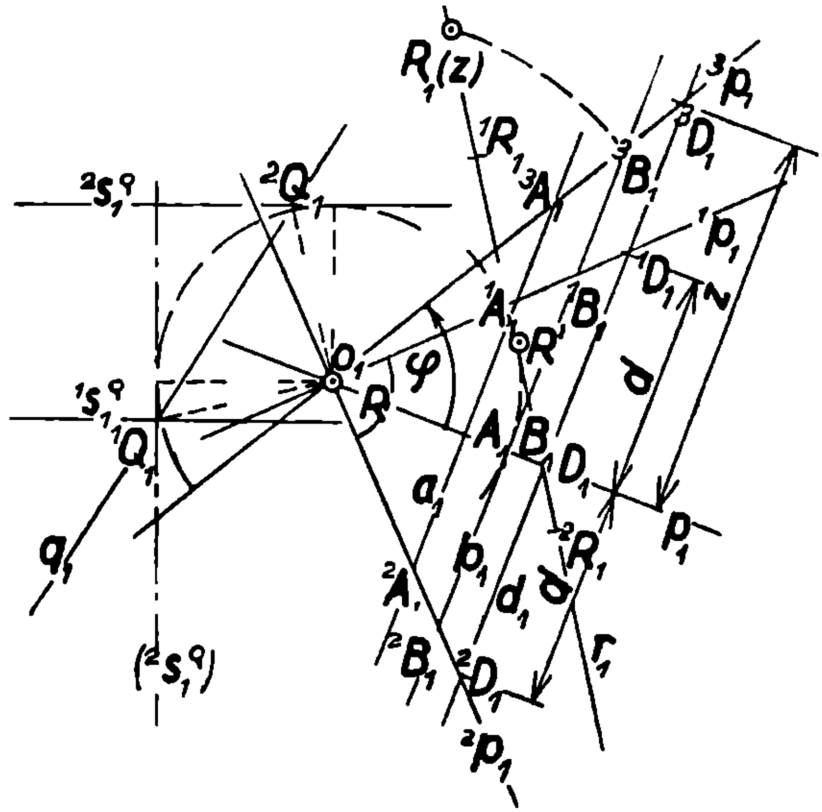
Průmětem přímky v prostoru při síťovém promítání je upevněná kuželosečka, jež prochází dvěma základními body M, N. Promítací paprsek, jenž náleží síti, má za průměty bod (vlastně dvě přímky protínající se v tomto bodě).

Jak se jeví v síťovém průmětě různoběžnost, nebo rovnoběžnost dvou přímek p, q? Označme jejich společný bod R a jejich rovinu $\varrho \equiv (p, q)$. V rovině ϱ je jeden paprsek a sítě, jehož stopník a' náleží oběma kuželosečkám p', q' a je na spojnici stopníků P, Q přímek p, q na π. Čtvrtý průsečík kuželoseček p', q' mimo M, N, a' jest síťovým průmětem R' průsečíku $R \equiv (p, q)$.

Síťové průměty dvou přímek téže roviny jsou dvě upevněné kuželosečky jdoucí základními body M, N průmětny, při čemž spojnice upevňujících bodů (stopníků přímek) *prochází jedním ze zbývajících dvou průsečíků kuželoseček, kdežto druhý z těchto průsečíků je průmětem průsečíku obou přímek.*

Přestaňme na těchto vlastnostech obecného síťového promítání a uvažujme o zvláštním případu paprskové sítě: o t. zv. síti rotační.

10,1. Promítání rotační sítí paprskovou. V zobrazení dvojstopním (odst. **9,1**), kde stopní roviny ${}^1\sigma \parallel {}^2\sigma \parallel \pi$ a $z_{1\sigma} = d$, $z_{2\sigma} = -d$, v kolmém promítání na rovinu π (obr. 43), uvažujme o souhrnu paprsků, jejichž obrazy jsou určeny takto: Mysleme si přímku $o \perp \pi$, jejímž půdorysem je bod o_1. Bodem o_1 v půdoryse veďme dvě k sobě kolmé přímky ${}^1p_1 \perp$ $\perp {}^2p_1$. Přímka ${}^1p_1$ je půdorysem přímky ${}^1p$ v stopní rovině ${}^1\sigma$ a přímka ${}^2p_1$ je půdorysem přímky ${}^2p$ v stopní rovině ${}^2\sigma$, takže



Obr. 43. Průmět bodu R rotační sítí paprskovou.

obě přímky ${}^1p$, ${}^2p$ kolmo protínají přímku o a jsou navzájem mimoběžné. Vezměme nyní přímky a, b, ..., jejichž stopníky ${}^1A$, ${}^1B$, ... jsou na přímce ${}^1p$ a mají od přímky o tytéž vzdálenosti jako druhé stopníky ${}^2A$, ${}^2B$, ... ležící na přímce ${}^2p$. Patrně půdorysy těch přímek a_1, b_1, ... jsou spolu rovnoběžné a jejich stopníky A, B, ... na průmětně π jsou na ose p úhlu přímek ${}^1p_1$, ${}^2p_1$. Přímky a, b, ... vyznačené v obr. 43 jsou všechny pravotočivé, t. j. postavíme-li se do osy o a pozorujeme bod pohybující se na přímkách a, b, ... směrem od naší hlavy k patě, musíme se otáčeti vpravo. Stejně určené přímky levotočivé vzhledem k ose o, měly by stopníky na rovině π v druhé ose úhlu přímek ${}^1p_1$, ${}^2p_1$. Všechny přímky $a, b, \ldots$ v obr. 43 vyplňují plochu zvanou hyperbolický paraboloid, který má dvě soustavy tvořících přímek a sice jednu tvořenou přímkami $a, b, \ldots$, jež jsou kolmy k přímce p a tudíž rovnoběžny s rovinou kolmou k této přímce a druhou soustavu tvořenou přímkami $p, {}^1p, {}^2p, \ldots$, jež jsou rovnoběžny s průmětnou π. (Pro důkaz zvolme si na přímce a bod ${}^3A$, který má od průmětny π vzdálenost z, tu dělicí poměr $\overline{{}^3A_1{}^1A_1} : \overline{{}^3A_1{}^2A_1} = (z - d) : (z + d)$.

Spojme bod ${}^3A_1$ s bodem o_1 přímkou ${}^3p_1 \equiv o_1{}^3A_1$ a označme $\sphericalangle\, p_1{}^3p_1 = \varphi$ a $\overline{A_1o_1} = u$, pak

$$\overline{{}^3A_1A_1} : \overline{{}^3A_1{}^2A_1} = u(\mathrm{tg}\varphi - 1) : u(\mathrm{tg}\varphi + 1) = \\ = (\mathrm{tg}\varphi - 1) : (\mathrm{tg}\varphi + 1).$$

Porovnáním dostaneme $\mathrm{tg}\varphi = z : d$ a proto body přímek $a, b, \ldots$ prvé soustavy, jež mají od π tutéž vzdálenost z, jsou na přímce ${}^3p$, jež protíná kolmo přímku o. [Sestrojíme-li přímku d prvé soustavy, jež má od osy o vzdálenost d, tu na půdorysu d_1 této přímky odtínají půdorysy přímek druhé soustavy svoje kóty z (v obr. 43 je to vyznačeno pro přímku ${}^3p$).]

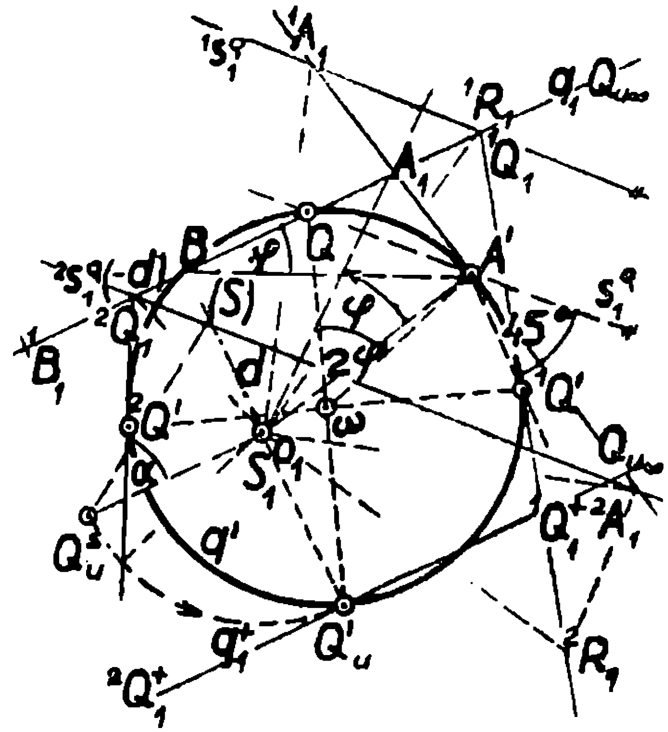
Otočme nyní přímky $a, b, \ldots$ prvé soustavy o 180° kolem přímky o; víme, že každá z nich a souměrně k ní podle osy o sdružená, vytvoří jednu soustavu tvořících přímek na rotačním hyperboloidu. Všechny tyto soustavy na jednomocném systému rotačních hyperboloidů vyplní rotační síť, jejíž řídicí přímky jsou ovšem imaginární druhého druhu.

V libovolné rovině, jež je dána stopami ${}^1s^\varrho$, ${}^2s^\varrho$ (obr. 43) je jediná přímka q této sítě, jejíž prvý stopník ${}^1Q$ má půdorys v průsečíku ${}^1Q_1$ půdorysu ${}^1s_1^\varrho$ s otočenou polohou $({}^2s_1^\varrho)$ půdorysu ${}^2s_1^\varrho$ o 90° ve smyslu kladném kolem bodu o_1. Libovolným bodem R, který je dán půdorysem R_1 a kótou z, jde též jediná přímka r sítě, kterou sestrojíme takto. Na hyperbolickém paraboloidu dříve uvažovaném určíme přímku ${}^3p$ o kótě z náležející druhé soustavě a bod R otočíme kolem osy o až přejde na přímku ${}^3p$ do bodu ${}^3B$, jímž jde přímka b sítě a sice $b_1 \perp p_1$. Otočením nazpět přímky b až bod ${}^3B$ přejde do bodu R, dostaneme přímku r sítě, jejíž stopník R' na průmětně π, který odpovídá bodu B přímky b, je síťovým průmětem bodu R na průmětně π. Řídicí přímky sítě m, n jsou též přímkami druhé soustavy hyperbolického paraboloidu a ježto při otáčení kolem osy o (a tedy jejich půdorysy m_1, n_1 při otáčení kolem bodu o_1) nesmějí se měniti, jsou jejich půdorysy minimálními přímkami bodu o_1.[18]) Půdorysy m_1, n_1 odtínají na půdorysu d_1 svoje kóty, jež jsou $\pm di$, $i^2 = -1$. Řídicí přímky m, n jsou tedy minimálními přímkami mimoběžnými protínajícími kolmo osu o sítě; jedna má kótu $+di$ a druhá $-di$. Pro levotočivou síť se kóty zamění.

V obr. 44 je sestrojen *síťový průmět q' přímky q* dané půdorysem q_1 a půdorysy stopníků ${}^1Q, {}^2Q$. Stopník Q přímky q půlí vzdálenost $\overline{{}^1Q_1{}^2Q_1}$. Průmět q' podle odst. 10 je kuželosečka, jež jde stopníky řídicích přímek m, n na průmětně π. Ježto tyto stopníky jsou zde v kruhových bodech průmětny, je *q' kružnicí*. To lze dokázati též přímo konstrukcí jednotlivých bodů průmětu q'. Třeba jen určovati stopníky paprsků rotační sítě, o níž předpokládáme v obr. 44, že je pravotočivou, jež jsou různoběžné s přímkou q. Snadno určíme síťové průměty ${}^1Q', {}^2Q'$ stopníků přímky q. Na př. bodem ${}^1Q$ jde přímka r sítě, jejíž ${}^1R \equiv {}^1Q$, $\sphericalangle\, {}^1R_1 o_1 {}^2R_1 = -90^\circ$, $\overline{o_1{}^2R_1} = \overline{o_1{}^1R_1}$ a tu průmět ${}^1Q'$ půlí úsečku $\overline{{}^1R_1{}^2R_1}$. Obdobně určíme průmět ${}^2Q'$. Abychom dostali obecný bod M' průmětu q', proložme přímkou q libovolnou rovinu ϱ, jejíž stopy ${}^1s\varrho, {}^2s\varrho$ jdou stopníky ${}^1Q, {}^2Q$ spolu rovnoběžně. Otočená poloha půdorysu stopy ${}^1s_1\varrho$ o úhel -90° kolem o_1, jde bodem ${}^2R_1$ kolmo k ${}^2s_1\varrho$ a protíná tuto v půdorysu ${}^2A_1$ druhého stopníku přímky a sítě, jež protíná přímku q v bodě A. Síťový průmět A' bodu A půlí vzdálenost ${}^1A_1{}^2A_1$ a je též na stopě $s\varrho$ roviny ϱ na průmětně π, která jde stopníkem Q přímky q rovnoběžně k stopě ${}^1s\varrho$. Pole bodů $A', {}^1Q', \ldots$ je podobné s polem ${}^1A_1, {}^1Q_1, \ldots$ a prvé vznikne z druhého otočením kolem středu o_1 o úhel -45° a homothetickým přiblížením k o_1 pro poměr $1 : \sqrt{2}$. Proto spojnice $A'{}^1Q'$ svírá s ${}^1A_1{}^1Q_1$ úhel 45° a tedy též s $A'Q \parallel {}^1A_1{}^1Q_1$. Je proto místem bodů A' kružnice q', na níž body Q, ${}^1Q'$ ome-

[18]) Viz *L. Seifert* l. c., str. 35.

zují čtvrtkružnici, z čehož lze určiti střed ω kružnice q'. Kratčeji však lze tento střed sestrojiti, určíme-li síťový průmět Q_u' úběžného bodu Q_u přímky q. Paprsek $q+$ sítě rovnoběžný s q dostaneme, sestrojíme-li $\overline{o_1 Q_u'} \mathrel{\underline{\underline{\perp}}} \overline{Q^1 Q_1}$, $\overline{Q_u'^1 Q_1} + = -\overline{Q_u'^1 Q_1} + = \overline{Q^1 Q_1}$ tak, že $\sphericalangle {}^1Q_1 + o_1{}^2 + = -\overline{90°}$. Lze nyní snadno dovoditi, že t. zv. *síťový úběžník* Q_u' přímky q je diametrálně protilehlý k stopníku Q na kružnici q'. Je totiž $\overline{o_1{}^1Q'} \mathrel{\underline{\underline{\perp}}}$

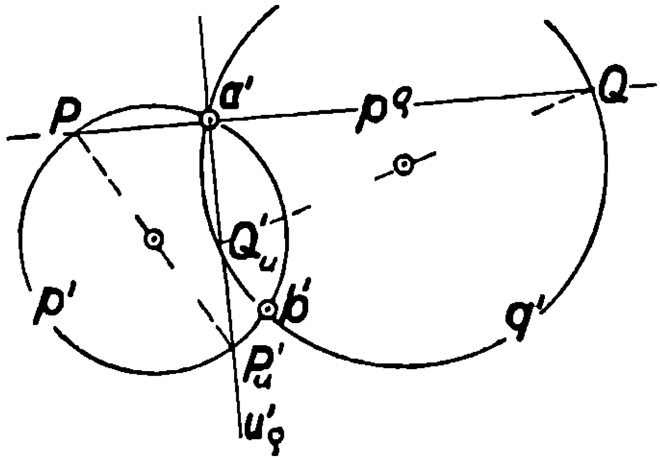


Obr. 44. Rotační síťový průmět přímky q.

$\mathrel{\underline{\underline{\perp}}}$ $\overline{{}^1Q_1{}^1Q'}$ a proto též $\overline{Q_u'^1Q'} \mathrel{\underline{\underline{\perp}}} \overline{Q^1Q'}$. Zvolíme-li na ose o střed promítání S ve vzdálenosti d nad průmětnou π, tu síťový úběžník Q_u' dostane se ze středového úběžníku $Q_u{}^s$ otočením kolem středu o_1 o úhel $+90°$. Z toho je patrno jak lze ze síťového průmětu přímky (q', Q) přejíti k středovému průmětu, známe-li o_1 a d a naopak.

Kružnice q' obsahuje též patu B kolmice spuštěné z bodu o_1 na půdorys q_1, je to totiž stopník síťového paprsku ležícího v půdorysně promítací rovině přímky q a tedy s ní různoběžné. Každému bodu A přímky q přísluší v prostoru jistá kóta z a podle obr. 43 jistý úhel φ, daný vztahem $\operatorname{tg}\varphi = z : d$; při pravotočivé síti jsou φ a z téhož znaménka, kdežto při levotočivé síti mají znaménka opačná. V síťovém průmětu q' přímky q je Q stopník přímky a tu, je-li φ úhel patřící ke kótě z bodu A přímky, je $\varphi = \sphericalangle A'o_1A_1$. Body o_1, B, A_1, A' jsou na kružnici a proto $\sphericalangle A'BQ = \varphi$ a tedy v kružnici q' středový úhel $\sphericalangle Q\omega A' = -2\varphi$. Pro body Q, ${}^1Q$, $Q_{u\infty}$ jest $\varphi = 0°, 45°, 90°$ a podle konstrukce patří k obrazům těchto bodů na kružnici q' středové úhly $0°, -90°, -180°$.

Buď dán síťový obraz přímky q, t. j. upevněná kružnice q' s bodem Q; při rotační síti je k obrazu A' libovolného bodu A přímky q příslušný středový úhel $\sphericalangle Q\omega A'$ měřený od $0°$ do $-180°$ a od $0°$ do $+180°$, roven dvojnásobku úhlu patřícího ke kótě z_A.



Obr. 45. Rotační síťové obrazy různoběžek p, q.

Přímky kolmé k průmětně π se zobrazují v kružnici jdoucí bodem o_1, kde je jejich společný síťový úběžník. *Promítací paprsky*, t. j. paprsky sítě zobrazují se do dvou minimálních přímek, které se protínají v reálném bodě průmětny. *Přímky rovnoběžné s průmětnou* se zobrazují v přímky v průmětně, jež vzniknou z jejich půdorysů otočením o úhel φ patřícím k jejich kótě a homothetickým přiblížením k o_1 pro poměr $\cos\varphi : 1$. (Úběžná přímka doplňuje každý takový obraz na kružnici.)

V obr. 45 jsou vyznačeny kruhové síťové obrazy p', q' *dvou různoběžek* p, q určujících rovinu ϱ. V rovině ϱ je jeden paprsek a sítě, jehož bodový síťový obraz je v jednom z průsečíků a' kružnic p', q', kdežto druhý průsečík b' je síťovým obrazem paprsku b sítě, jež jde průsečíkem (p, q). Stopníky P, Q přímek p, q musí býti na stopě p^ϱ roviny ϱ, jež musí jíti průsečíkem a' obou kružnic. Diametrálně protilehlé síťové úběžníky P_u', Q_u' určují přímkový obraz u_ϱ' úběžné přímky u_ϱ roviny ϱ, jež je kolmá k stopě p^ϱ. Poslední plyne z určení síťového úběžníku ze středového úběžníku.

Laskavému čtenáři se ponechává, aby zobrazil v síťovém promítání svazek paprskový, trs paprskový atd.