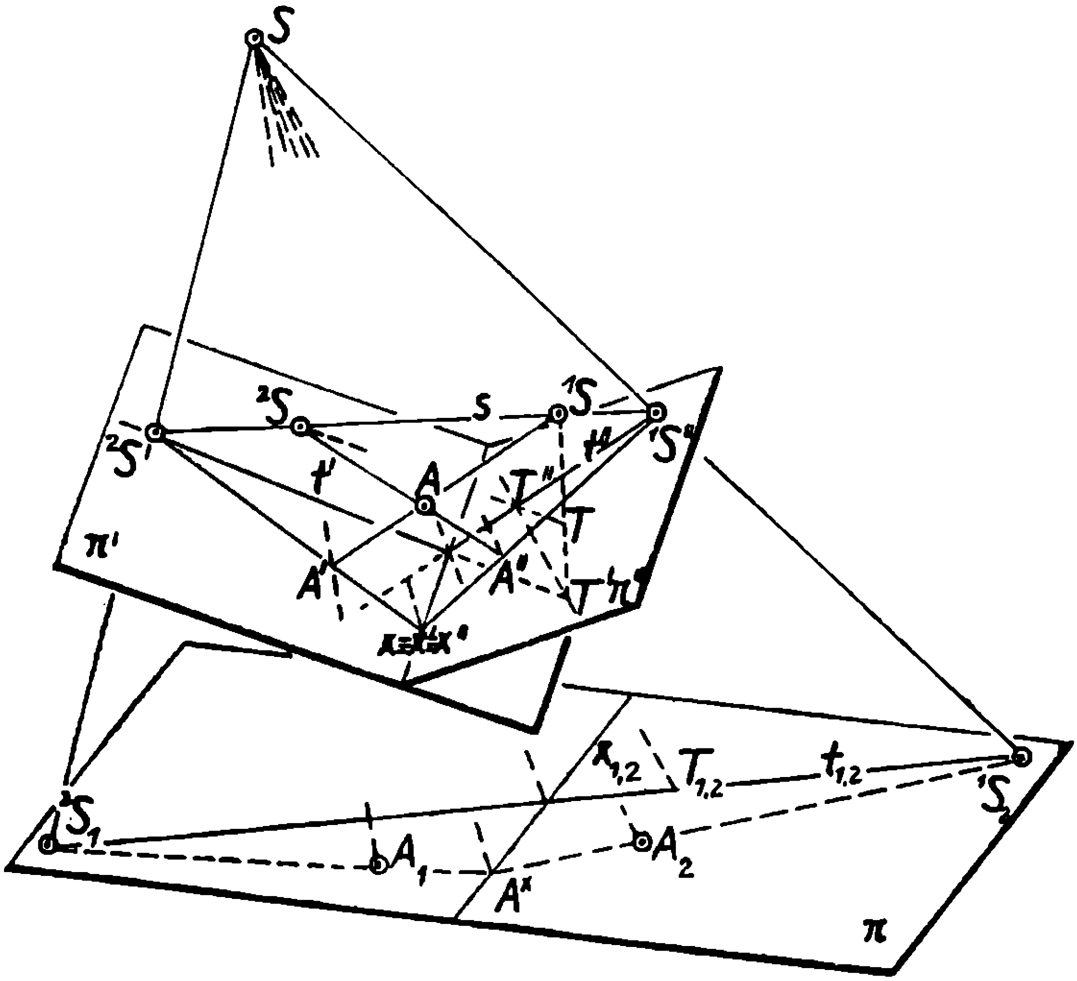
přímka $l$ v bodě $M$ sítě má za obraz kruhový oblouk jdoucí body $N$, $M'$, $Z$.

Z uvedeného příkladu je patrno, že je tu těžko najíti nějakou zobrazovací zásadu; uvádíme tento případ jen jako ukázku, jak všelijak, více méně vhodně, se lidé snaží napravovati lineární perspektivu, která přece jen, i přes některé své vady, zůstává vedoucí a nejužívanější při perspektivním zobrazování.

## 6. ZOBRAZENÍ DVOJOBRAZOVÉ

**6,1. Bod v obecném zobrazení dvojobrazovém.** V odst. **2,1** jsme viděli, že bod v prostoru není určen jedním svým středovým průmětem a bylo třeba jej určovati ještě některou jeho nositelkou. Většina užívaných zobrazení útvarů v prostoru užívá *dvou obrazů* bodů; takové dvojice ovšem nemohou míti v nákresně zcela libovolnou vzájemnou polohu, nýbrž musí to býti nějak uspořádané dvojice. Bod v nákresně je určen dvěma souřadnicemi a tedy dva body čtyřmi souřadnicemi. Protože poloha každého bodu v prostoru je určena jen třemi souřadnicemi, soudíme odtud, že ne každá dvojice bodová nákresny je obrazem bodu v prostoru, nýbrž jen ty dvojice, jež vyhovují jisté podmínce, o níž mluvíme dále.

Obecný případ dvojobrazového průmětu je znázorněn v obr. 20. Body $A$ prostoru promítáme ze dvou středů ${}^1S$, ${}^2S$ na dvě různé průmětny $\pi'$, $\pi''$ do bodů $A'$, $A''$. Středy ${}^1S$, ${}^2S$ a bod $A$ určují rovinu (dvojnásob promítací), jejíž stopy na průmětnách $\pi'$, $\pi''$ jdou stopníky ${}^2S'$, ${}^1S''$ spojnice $s \equiv {}^1S{}^2S$ a protínají se v bodě na průsečnici $x$ průměten $\pi'$, $\pi''$. Stopníky ${}^2S'$, ${}^1S''$ přímky $s$ jsou průměty středů promítání ${}^2S$, ${}^1S$ na první průmětnu $\pi'$, případně na druhou průmětnu $\pi''$. Tyto stopníky jmenujeme *uzlovými body*, nebo stručně *uzly* průměten $\pi'$, $\pi''$. Vidíme tudíž, že prvý průmět $A'$ a druhý průmět $A''$ bodu $A$ jsou na uzlových paprscích, jež se protínají v bodě průsečnice $x$ obou průměten a jež jmenujeme též odpovídajícími si uzlovými paprsky. Abychom převedli oba průměty do téže roviny, jež splývá s nákresnou, promítněme




Obr. 20. Vznik dvojobrazového zobrazení.

oba průměty v rovinách $\pi'$ a $\pi''$ z libovolného (mimo $s$ ležícího) středu $S$ na rovinu $\pi$. Prvý průmět $A'$ se promítne do prvého obrazu $A_1$ a druhý průmět $A''$ do druhého obrazu $A_2$; uzly mají za průměty uzly $^2S_1$, $^1S_2$ nákresny a průsečnice $x$ se promítne do základnice $x_{1,2}$. Dostáváme pak: *V obecném dvojobrazovém zobrazení první obraz $A_1$ a druhý obraz $A_2$ téhož* *bodu $A$ jsou na odpovídajících si paprscích uzlových, t. j. těch, jež se protínají na základnici $x_{1,2}$.*

Zvolíme-li tudíž první obraz $A_1$ libovolně, musí druhý obraz $A_2$ ležeti na uzlovém paprsku odpovídajícím uzlovému paprsku ${}^2S_1A_1$, který jde průsečíkem $A^x \equiv (x_{1,2}, {}^2S_1A_1)$. V tom tkví uspořádání dvojic obrazů bodů v prostoru.

*Nejobecnější dvojobrazové zobrazení* dostaneme, když pole druhých obrazů přemístíme tak, že se poruší perspektivnost obou paprskových svazků uzlových anebo kolineací pole druhých obrazů převedeme v jiné pole. Při tom uzlové svazky nebyly by sice perspektivní, ale zůstaly by projektivní. Obrazům v případě, jak vyznačeno v obr. 20 v rovině $\pi$, říkáme též, že jsou v *orientované poloze.* V dalším budeme uvažovati jen o případě posledním.

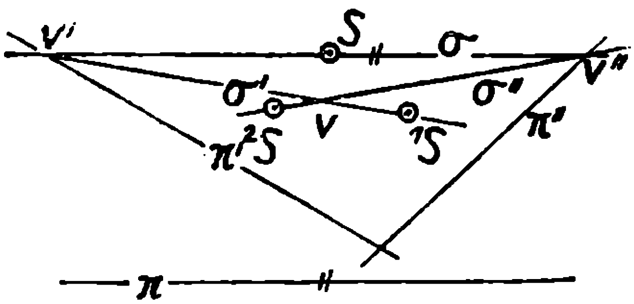
Dány-li uzly ${}^2S_1, {}^1S_2$ v nákresně, základnice $x_{1,2}$, průmětny $\pi', \pi''$ a středy $S, {}^1S, {}^2S$, a vyhovují-li obrazy $A_1, A_2$ podmínce, že jsou na odpovídajících si uzlových paprscích, tu bod $A$ v prostoru je obecně jednoznačně určen.

Které body v prostoru vymykají se této jednoznačnosti? (Všimněte si bodů přímky $s \equiv {}^1S{}^2S$!)

Dány-li jen uzly ${}^2S_1, {}^1S_2$ v nákresně a základnice $x_{1,2}$, je možno průmětny $\pi', \pi''$, středy promítání $S, {}^1S, {}^2S$ zvoliti nekonečně mnoha způsoby, ale všechny originály k obrazům sestrojené jsou kolineární, t. j. bodu, přímce, rovině jednoho odpovídá bod, přímka resp. rovina druhého a incidence je zachována.

Ve zvláštních případech jsou často středy $S, {}^1S, {}^2S$ na téže přímce, pak uzly ${}^2S_1, {}^1S_2$ splývají a odpovídající si paprsky uzlové též splývají. Případ, kdy spojnice $s \equiv {}^1S{}^2S$ protíná průsečnici $x$ ponecháváme k úvaze laskavému čtenáři.

Body v prostoru, jejichž prvé obrazy jsou úběžnými body nákresny musí míti prvé průměty na průsečnici $v'$ středové roviny $\sigma$, jdoucí středem $S$ rovnoběžně s průmětnou a nákresnou $\pi$ (viz schematický obr. 21). Proto body, které mají prvé obrazy úběžné, jsou v prvé středové rovině $\sigma' \equiv ({}^1Sv')$. Podobně body mající druhé obrazy úběžné jsou v druhé středové rovině $\sigma'' \equiv ({}^2Sv'')$, kde je přímka $v'' \equiv (\sigma\pi'')$. Body, jejichž oba obrazy jsou úběžné, jsou na průsečnici $v$ středových rovin $\sigma'$ a $\sigma''$.

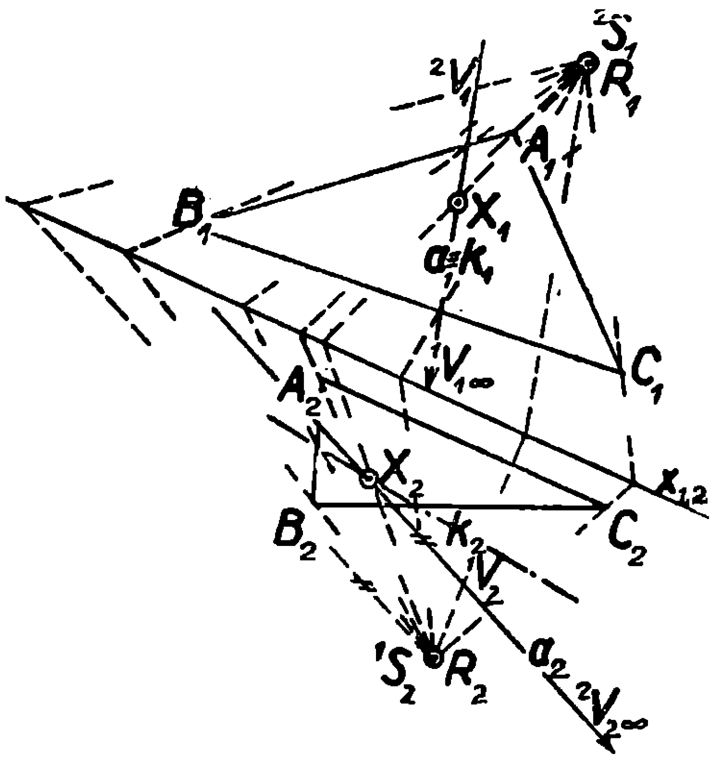



Obr. 21. Středové roviny $\sigma$, $\sigma'$, $\sigma''$ dvojobrazového zobrazení.

Ptejme se, kde jsou v prostoru body, jejichž oba obrazy splývají? Místem takových bodů v prostoru je t. zv. *koincidenční* útvar. Podle uspořádání dvojic obrazových je patrno, že splývající obrazy takových bodů mohou býti buď na základnici $x_{1,2}$ anebo na spojnici $t_{1,2}$ obou uzlů ${}^2S_1$, ${}^1S_2$ (obr. 20). Prvému místu odpovídají jako originály body průsečnice $x$ obou průměten. Body odpovídající druhému místu dostaneme takto. Obrazy $t_1 \equiv t_2$ náleží k průmětům $t'$, $t''$, jež jdou uzly průměten. Bodu $T_1 \equiv T_2$ na $t_{1,2}$ odpovídají průměty $T'$, $T''$ ležící na paprsku $ST_{1,2}$. Spojnice ${}^1ST'$ a ${}^2ST''$ protínají se v bodě $T$ koincidenčního útvaru. Probíhá-li bod $T_{1,2}$ přímku $t_{1,2}$, probíhají body $T'$, $T''$ perspektivní řady na přímkách $t'$, $t''$ a proto spojnice ${}^1ST'$, ${}^2ST''$ opisují kolem středů ${}^1S$, ${}^2S$ projektivní svazky a průsečík $T$ odpovídajících si paprsků vytvořuje kuželosečku $k$, jež jde body ${}^1S$, ${}^2S$ a protíná průsečnici $x$.

*Při obecném dvojobrazovém zobrazení skládá se koincidenční útvar z průsečnice $x$ obou průměten a kuželosečky $k$, jež prochází středy promítání ${}^1S$, ${}^2S$ a protíná přímku $x$.*

**6,2. Přímka a rovina v obecném dvojobrazovém zobrazení.** Průměty přímky $a$ jsou obecně zase přímky; jsou to průsečnice průměten $\pi'$, $\pi''$ s příslušnými promítacími rovinami $({}^1S, a)$, případně ($^2S$, $a$). Jestliže přímka $a$ je promítací přímkou, na př. první, t. j. jde středem $^1S$, tu první průmět je bodem a druhý je odpovídajícím uzlovým paprskem. Dvojnásob




Obr. 22. Přímka a rovina v dvojobrazovém zobrazení.

promítací přímkou je spojnice $s$ a její oba průměty splývají s příslušnými uzly.

Mějme v obr. 22 dánu přímku $a$ oběma obrazy $a_1$, $a_2$ v dvojobrazovém zobrazení daném uzly $^2S_1$, $^1S_2$ a základnicí $x_{1,2}$. Obrazy libovolného bodu přímky $a$ jsou na odpovídajících si uzlových paprscích. V obrazci sestrojeny obrazy průsečíků $^1V$ a $^2V$ přímky $a$ se středovými rovinami $\sigma'$, $\sigma''$, takže $^1V_{1\infty}$ a $^1V_{2\infty}$. Obrazy dvou přímek téže roviny musí míti průsečík prvých obrazů a průsečík druhých obrazů na odpovídajících si uzlových paprscích.

Vyšetřte polohu obrazů dvou přímek, jež se protínají v bodě ležícím v středové rovině $\sigma'$, nebo $\sigma''$, anebo na jejich průsečnici $v$!

Obecná rovina $\varrho$ se určuje obrazy tří bodů; v obr. 22 je na př. určena rovina $\varrho$ třemi body $A, B, C$. Oba obrazy $\varrho_1, \varrho_2$ bodového pole v rovině $\varrho$ jsou ve vztahu obecné kolineace, jež je určena čtyřmi páry odpovídajících si bodů. Rovina $\varrho$ protíná totiž spojnici $s$ obou středů ${}^1S, {}^2S$ v bodě $R$ a obraz $R_1 \equiv {}^1S_2$ a $R_2 \equiv {}^1S_2$. Je tedy kolineace obou obrazů roviny $\varrho$ dána čtyřmi páry odpovídajících si bodů a to $(A_1, B_1, C_1, R_1 \equiv {}^2S_1) \longleftrightarrow (A_2, B_2, C_2, R_2 \equiv {}^1S_2)$.

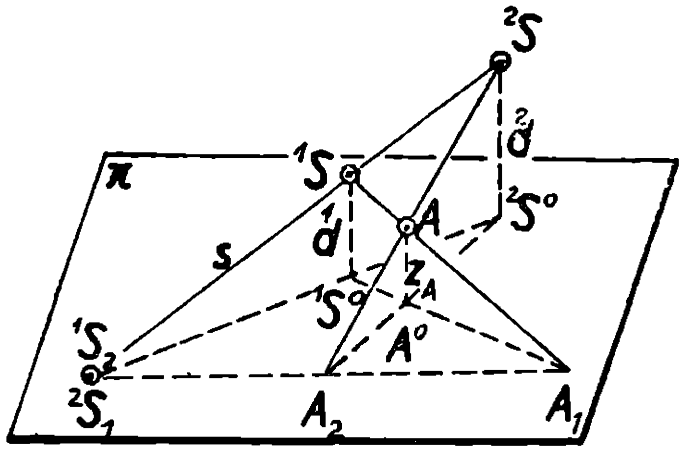
Dán-li jeden obraz přímky $k$ roviny $\varrho$ na př. $k_1$, lze snadno k němu určiti příslušný druhý obraz $k_2$, užijeme-li průsečíků přímky $k$ na př. s přímkami $AB$, $BC$. Toho lze užíti k určení průsečíku $X$ přímky $a$ s rovinou $\varrho \equiv (A, B, C)$. Použijeme krycí přímky $k$ v rovině $\varrho$, jejíž (na př. první) obraz splývá s příslušným obrazem přímky $a$ ($k_1 \equiv a_1$). Druhý obraz $k_2$ protíná pak druhý obraz $a_2$ v druhém obraze průsečíku $X$; k bodu $X_2$ odvodíme první obraz $X_1$.

Proveďte tutéž úlohu druhou krycí přímkou $l$, jejíž $l_2 \equiv a_2$! Sestrojte průsečnici dvou rovin tím, že sestrojíte průsečíky dvou přímek jedné z rovin s druhou rovinou! Zvláště určete průsečnici obecné roviny se středovými rovinami $\sigma'$, $\sigma''$!

**6,3. Rovnoběžnost a kolmost v dvojobrazovém zobrazení.** Přímky a roviny jsou rovnoběžné, když jejich úběžné body nebo přímky splývají; případně jsou incidentní. (Přímky, které jsou rovnoběžné, protínají úběžnou rovinu v tomtéž bodě atd.) Abychom v obecném dvojobrazovém zobrazení mohli uvažovati o rovnoběžnosti, je třeba znáti obrazy úběžné roviny $\omega_\infty$ prostoru a tudíž kolineaci mezi poli $\omega_1, \omega_2$; potřebujeme tedy obrazy tří úběžných bodů, ježto uzly jsou též párem (t. j. čtvrtým) odpovídajících si bodů v uvažované kolineaci. Je viděti, že úběžná rovina prostoru v obecném dvojobrazovém zobrazení nemá zvláštní postavení vzhledem k jiné rovině.

Úlohy o kolmosti vyžadují zobrazení absolutní kuželosečky v úběžné rovině, což vede k dosti složitým konstrukcím; zde je pomineme, ježto tohoto obecného zobrazení se prakticky málo používá, a obrátíme se k zvláštním případům tohoto zobrazení.

**6,4. Dvojstředové promítání na jednu průmětnu.** Jestliže v obecném případě (odst. **6,1**) průmětny $\pi'$, $\pi''$ splynou s průmětnou $\pi$, není třeba promítati ze středu $S$ a dostáváme případ (znázorněný v obr. 23) často se vyskytující v lékařské praxi při roentgenování,[11]) nebo v zeměměřičství. Body $A$ promítáme tu na průmětnu $\pi$ ze dvou středů ${}^1S$, ${}^2S$ do průmětů $A_1$,




Obr. 23. Dvojstředové promítnutí bodu $A$ na $\pi$.

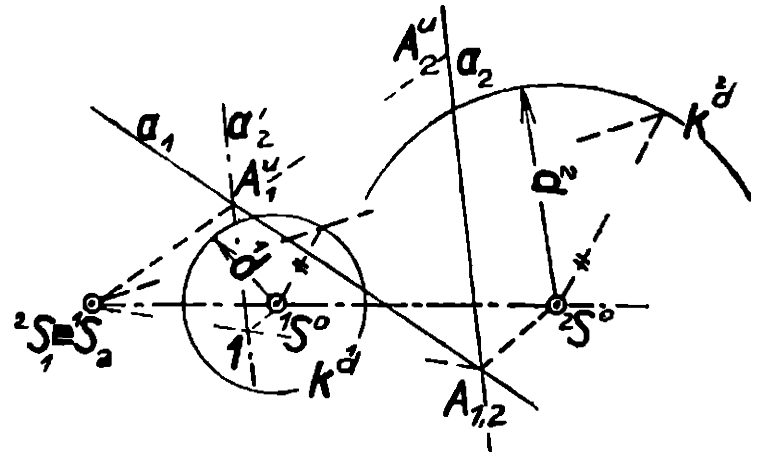
$A_2$, jež splývají s obrazy bodu $A$, ježto $\pi$ může býti ihned nákresnou. Oba uzly splývají se stopníkem ${}^1S_2 \equiv {}^2S_1$ spojnice $s \equiv S^1S$ na průmětně $\pi$. Distance středů ${}^1S$, ${}^2S$ od průmětny $\pi$ značíme ${}^1d$, ${}^2d$ a hlavní body ${}^1S^0$, ${}^2S^0$. Kolmý průmět bodu $A$ na průmětnu $\pi$ je patrně v průsečíku $A^0$ spojnic ${}^1S^0A_1$, ${}^2S\,{}^0A_2$. Vzdálenost $z_A$ bodu $A$ od průmětny $\pi$ lze vypočítati (známe-li hlavní body nákresny, obrazy $A_1A_2$ a jednu distanci na př. ${}^1d$) z úměry $z_A : {}^1d = \overline{A_1A^0} : \overline{A_1{}^1S^0}$; stejně bylo by lze tuto vzdálenost vypočítati užitím distance ${}^2d$ a kontrolovati. Je-li bod $R$ v průmětně $\pi$, je $R \equiv R_1 \equiv R_2$, takže průmětna $\pi$ a přímka $s$ jsou tu koincidenčními útvary.

Rovina $\varrho$ se zobrazuje jako dvě soumístná kolineární pole $\varrho_1$, $\varrho_2$, jež jsou v poloze perspektivní s polem $\varrho$ a sice prvé

---

[11]) Na př. *F. Schilling*: „Neue Methoden des Ortsbestimmung eines Fremdkörpers, insbesondere eines Geschosses im menschl. Körper durch Röntgenaufnahme“, Zeitschr. f. Math. u. Physik, roč. 1917.

pro střed ${}^1S$ a druhé pro střed ${}^2S$. Je-li $p_\varrho$ stopa roviny $\varrho$ na průmětně $\pi$, pak pole $\varrho_1, \varrho_2$ jsou perspektivní pro osu $p_\varrho$ a střed v uzlu ${}^1S_2 \equiv {}^2S_1$. Rovina rovnoběžná s průmětnou $\pi$ zobrazuje se tudíž v homotetičnost pro střed v uzlu. Speciálně úběžná rovina $\omega_\infty$ má za obraz homothetičnost pro střed v uzlu a poměr ${}^1d : {}^2d$.



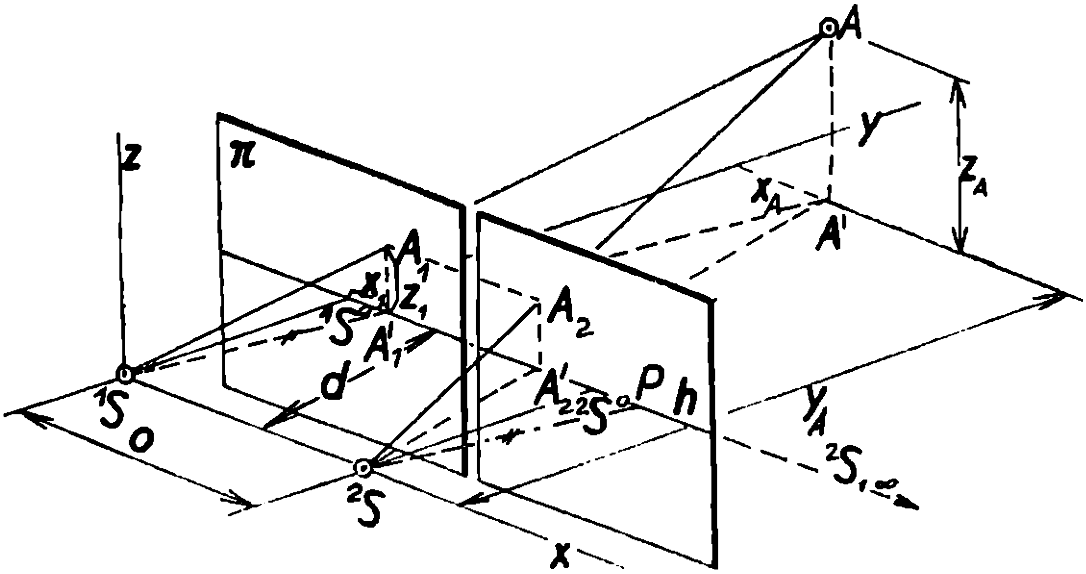

Obr. 24. Úběžníky přímky v dvojstředovém promítání.

Na základě toho jsou sestrojeny v obr. 24 obrazy průsečíku přímky $a$ s rovinou $\omega_\infty$, t. zv. úběžníky $A_1{}^u$, $A_2{}^u$ přímky $a$, pro oboje středové promítání. Třeba jen na obrazech $a_1$, $a_2$ přímky vyhledati obrazy $A_1{}^u$, $A_2{}^u$ tak, aby $\overline{{}^2S_1A_1{}^u} : \overline{{}^2S_1A_2{}^u} = {}^1d : {}^2d = \overline{{}^2S_1{}^1S^0} : \overline{{}^2S_1{}^2S^0}$. V obr. zvolen stopník $A_{1,2} \equiv (a_1, a_2)$ přímky $a$ a na spojnici ${}^2S_1A_{1,2}$ určen bod $1$ tak, že ${}^1S^0 1 \parallel A_{1,2}{}^2S^0$; potom přímka $a_2' \parallel a_2$ vedená bodem $1$ protíná $a_1$ v prvém obrazu $A_1{}^u$ úběžného bodu $A_\infty{}^u$, t. j. v úběžníku prvého středového promítání, z něhož se určí snadno druhý obraz $A_2{}^u$, úběžník přímky $a$ v druhém středovém promítání.

Uvedený příklad ukazuje, že lze převésti dvojstředové promítání na středové (na př. pro střed promítání ${}^1S$ a distanci ${}^1d$), že lze příslušné úlohy zde vyřešiti podle odst. **2** a pak určiti teprve druhé obrazy.

Určete na př. úběžnice roviny dané obrazy tří svých bodů!

**6,5. Stereoskopické průměty.** Jestliže v předchozím odst. **6,4** obě distance jsou stejné (${}^1d = {}^2d = d$) a tudíž uzel průmětny $\pi$ je úběžným bodem ${}^2S_{1\infty} \equiv {}^1S_{2\infty}$ spojnice ${}^1S^0{}^2S^0$ (obr. 25), a když vzdálenost obou středů promítání je rovna vzdálenosti lidských očí (jež je normálně $o \doteq 65$ mm), dostáváme t. zv. *stereoskopické průměty*. Toto promítání odpovídá prostorovému vidění dvěma očima a má hojné praktické upotřebení. Stereoskopické obrazy lze snadno získati stereoskopickým fotografickým přístrojem, který má dva objektivy ve vzdálenosti $o$. Na takto získané obrazy musíme se dívati tak,




Obr. 25. Stereoskopické průměty bodu $A$.

aby každé oko vidělo jen svůj obraz. Toho se dosáhne nejlépe t. zv. *stereoskopy*, pro něž musí být oba obrazy *vedle sebe*, takže objekt musí býti za průmětnou $\pi$ dosti vzdálený.

Jiným prostředkem k získání prostorového dojmu jsou t. zv. *anaglyfy* od *Ducos du Haurona*. Zde oba obrazy předmětu mohou býti přes sebe, takže předmět může býti i před průmětnou $\pi$. Oba obrazy se vytisknou (nebo narýsují) v doplňkových barvách. Nejčastěji to bývá pro jedno oko barva zelená (modrá) a pro druhé oko barva červená. Na obrazy se díváme brýlemi, jež jsou opatřeny místo skel želatinou a to vždy pro obraz zelený (modrý) v barvě červené a opačně pro druhé oko.[12]) Anaglyfů lze též použíti k projekci na plátno; ostatně jsou dosud jedinou podstatou t. zv. prostorového filmu, který vede k zajímavým prostorovým klamům.

Zásad prostorového vidění užíváme prakticky též k určování vzdáleností předmětů od nás. Fotografujeme-li vzdálenější předměty, je vzdálenost fotografické desky od objektivu přibližně rovna fokální vzdálenosti $f$ objektivu. Positiv představuje nám tudíž perspektivu pro distanci $d = f$ a pro hlavní bod v kolmém průmětu optického středu objektivu na rovinu snímku. Stereoskopické snímky lze proto uvažovati jako perspektivy na jednu průmětnu a pro tutéž distanci $d = f$. V obr. 25 znázorněny průměty $A_1$, $A_2$ bodu $A$ ze středů ${}^1S$, ${}^2S$ na průmětnu $\pi$. Zvolme si pravoúhlou soustavu souřadnic, jejíž počátek je ve středu ${}^1S$, osy $x \equiv {}^1S^2S$, $y \equiv {}^1S^1S^0$ a osa $z$ je svislá za předpokladu, že průmětna $\pi$ je svislá. Bod $A$ má v této souřadnicové soustavě souřadnice $x_A, y_A, z_A$. Průmět $A_1$ má pravoúhlé souřadnice $x_1$, $z_1$ (vzhledem k osám $h \equiv {}^1S^{0\,2}S^0$, a kolmému průmětu osy $z$ do $\pi$, takže počátek je ${}^1S^0$); průmět $A_2$ souřadnice $x_2$, $z_2$ vzhledem k ose $h$ a ose $z_2 \perp h$ a pro počátek ${}^2S^0$ (v obr. je $x_2$ záporné). Je patrno, že $z_2 = z_1$, kdežto souřadnice $x_1$, $x_2$ jsou různé, leda že by bod $A$ byl úběžným bodem. Vzdálenost $\overline{A_1A_2}$ je pro objekty za průmětnou menší než $o$; rozdíl $|o - \overline{A_1A_2}| = |x_1 - x_2|$ jmenujeme *stereoskopickou paralaxou* $p$ bodu $A$. Sestrojme ${}^2SP \parallel {}^1SA'$, kde $A'$ je kolmý průmět bodu $A$ do roviny $(x, y)$; potom $\overline{A'_2P} = p$, je-li $A'_2$ kolmý průmět obrazu $A_2$ do osy $h$. Z podobnosti trojúhelníků $A'_2{}^2SP$, $A'{}^1S^2S$ plyne pro souřadnici $y_A = \dfrac{o \cdot d}{p}$. Z tohoto vztahu plyne, že body téže hloubky $y_A$ mají tutéž stereoskopickou paralaxu.

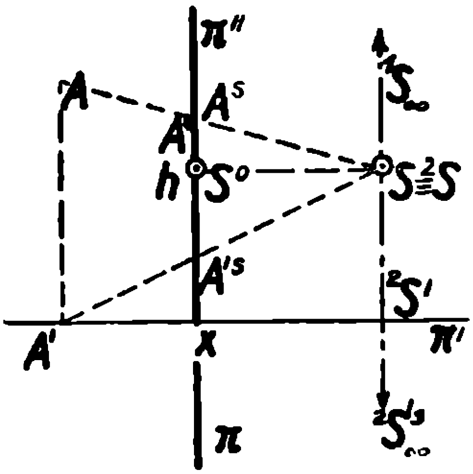
Vypočítání souřadnic $x_A$ a $z_A$ ze souřadnic $x_1$, $z_1$ prvého průmětu ponecháváme laskavému čtenáři. Právě uvedené

[12]) Viz na př. *R. Pruner*: „Anaglyfy k učebnicím Klíma-Ingriš: Deskr. geometrie pro V. tř. reálek“, 1941. Praha.

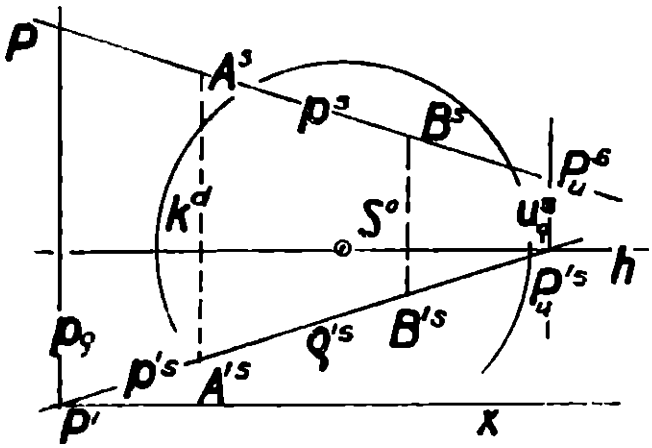
vztahy jsou základem t. zv. *stereofotogrammetrie* v zeměměřičství.

## 7. ROVNOBĚŽNÝ PRŮMĚT

Je-li při středovém promítání střed promítání v nekonečnu, jako úběžný bod daného směru $s$, dostáváme rovnoběžný (paralelní) průmět a to *pravoúhlý*, je-li směr $s$ kolmý k průmětně $\pi$, jinak *kosoúhlý*. Při rovnoběžném promítání zůstává zachován (je invariantní) dělicí poměr bodu na přímce nebo paprsku ve svazku a rovnoběžnost. Přímky rovnoběžné mají rovnoběžné průměty, pokud nemají za průměty body.




Obr. 26. Vznik středového průmětu a středového půdorysu.




Obr. 27. Střed. průmět a střed. půdorys přímky $AB$.

**7,1. Středový obraz se středovým obrazem půdorysu.** V obr. 26 je schematicky znázorněn případ dvojobrazového zobrazení tak, že průmětny $\pi'$, $\pi''$ zvoleny k sobě kolmé a sice $\pi'$ vodorovná a příslušný střed promítání ${}^1S$ v úběžném bodě kolmic k průmětně $\pi'$ a střed promítání ${}^2S$ v konečnu. Nákresna $\pi$ je identická s průmětnou $\pi''$ a střed promítání $S \equiv {}^2S$. Průmět