Jak se studují geometrické útvary v prostoru. II. část

VIII. Dodatek

In: Jiří Klapka (author): Jak se studují geometrické útvary v prostoru. II. část. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 106–112.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403062

VIII.

DODATEK.

38. O anuloidu. Definice a rovnice anuloidu byly podány v odst. 18. Jeho rovnici (18,12)

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + m)^2 - 4m^2 (x^2 + y^2) = 0, \quad (38,1)$$
$$(m > a > 0),$$

upravme na tvar homogenní

$$[x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + (m^2 - a^2)\, x_4{}^2]^2 - 4m^2 (x_1{}^2 + x_2{}^2)\, x_4{}^2 = 0. \quad (38,2)$$

Z něho je zřejmo, že průsečná křivka anuloidu s rovinou nevlastní (nevlastní křivka plochy) má rovnice

$$x_4 = 0, \quad (x_1{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2)^2 = 0,$$

a je to dvakrát počítaná absolutní kružnice kulová (proto anuloid patří mezi t. zv. cyklidy, t. j. plochy čtvrtého stupně s dvojnou kuželosečkou v absolutní kružnici).

Nejjednodušší rovinné řezy anuloidu leží jednak v rovinách procházejících jeho rotační osou, jednak v rovinách k ní kolmých (obr. 23).

V prvém případě rovinný řez je složen ze dvou shodných vytvořujících kružnic (jež tvoří t. zv. úplný meridián plochy); jejich poloměr jest a, vzdálenost středu — který leží v rovině $(\vec{x}\ \vec{y})$ — od počátku O je m.

V druhém případě roviny kolmé na rotační osu, o rovnici $z = k$, protínají plochu (38,1) v dvojicích kružnic, neboť levá strana rovnice

$$(x^2 + y^2 + m^2 + k^2 - a^2)^2 - 4m^2 (x^2 + y^2) = 0$$

je rozložitelna, takže jí lze dáti tvar

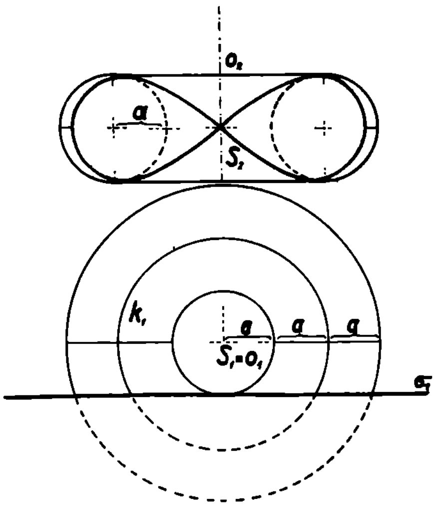
$$(x^2 + y^2 - m^2 - a^2 + k^2 + 2m\sqrt{a^2 - k^2})\,.$$
$$.\,(x^2 + y^2 - m^2 - a^2 + k^2 - 2m\sqrt{a^2 - k^2}) = 0.$$

Z něho je zřejmo, že obě kružnice se ztotožňují v téže kružnici k_1 resp. k_2 jen v tom případě, když jest $k = +a$ resp. $k = -a$. Roviny $z = \pm a$ se dotýkají anuloidu podél těchto kružnic, které jsou shodné a jejichž poloměr je m, t. j. rovný poloměru kružnice opsané středem kružnice vytvořující.

Je-li $|k| > a$, je $\sqrt{a^2 - k^2}$ imaginární stejně jako obě průsečné kružnice roviny $z - k = 0$ s anuloidem. Jen pro $|k| < a$ obě kružnice v této rovině jsou reálné a různé a jejich poloměry jsou dány výrazy

$$r_{1,2} = m \pm \sqrt{a^2 - k^2}.$$

Pro $k = 0$ obdržíme proto dvojici kružnic, složenou z kruž-



Obr. 23. Kolmé průměty anuloidu s lemniskatou Bernoulliovou.

nice největší (rovník) a nejmenší (hrdlová kružnice), jejichž poloměry jsou $m \pm a$. Rovník a hrdlová kružnice tvoří též obrys kolmého průmětu plochy do roviny $(\vec{x}\ \vec{y})$; tečné roviny plochy v jejich bodech jsou rovnoběžny s rotační osou $\vec{z}$.

Rovina v obecné poloze protíná anuloid v křivce čtvrtého stupně, která má v kruhových bodech roviny body dvojnásobné (křivky bicirkulární). Průsečná křivka nemusí míti ani jeden bod reálný.

Protože plocha je rotační, postačí při studiu jejích rovinných řezů se omeziti na roviny kolmé k rovině $(\vec{x}\,\vec{z})$, neboť do takové polohy lze přemístiti každou rovinu otočením okolo osy plochy o vhodný úhel.

Pro přehlednost nazývejme body vnější části anuloidu ony, jejichž vzdálenost od osy $\vec{z}$ je větší než m. Je-li tato vzdálenost menší než m, pravíme, že bod náleží vnitřní části anuloidu. Obě části jsou navzájem odděleny kružnicemi k_1 a k_2, na vnější části leží rovník, na vnitřní hrdlové kružnice anuloidu.

Je-li dána rovina σ, nikoliv kolmá na osu anuloidu, pak existují čtyři tečné roviny s ní rovnoběžné. Dvě z nich se jej dotýkají v bodech vnější, dvě další v bodech vnitřní jeho části, proto je nazýváme vnější resp. vnitřní tečné roviny anuloidu. Obě vnitřní tečné roviny jsou středově souměrně položeny podle počátku, t. j. středu anuloidu, stejně jsou položeny i obě rovnoběžné vnější tečné roviny anuloidu. Řez plochy rovinou σ je jen tehdy reálný, když rovina σ leží mezi oběma vnějšími tečnými rovinami, které s ní jsou rovnoběžny.

Ukažme, že kromě soustavy kružnic v rovinách kolmých k ose a soustavy vytvořujících kružnic, existuje na anuloidu ještě třetí soustava kružnic. Platí totiž věta:

Rovina σ dotýkající se anuloidu ve dvou různých bodech jeho vnitřní části jej protíná ve dvou shodných kružnicích o poloměru m.

Při této zvláštní poloze s rovinou σ se ztotožňují obě vnitřní tečné roviny s ní rovnoběžné. Při důkazu věty stačí se omeziti na případ, kdy dvojnásob tečná rovina σ je kolma na rovinu $(\vec{x}\,\vec{z})$, takže její rovnice je

$$ax - z\sqrt{m^2 - a^2} = 0, \tag{38,3}$$

a její kolmý průmět do téže souřadnicové roviny jest jedna ze společných vnitřních tečen obou vytvořujících kružnic, které tvoří úplný meridián plochy v rovině $(\vec{x}\,\vec{z})$.

Vyloučíme-li z rovnic (38,3) a (38,1) souřadnici z, vychází rovnice

$$\begin{aligned}(m^2x^2 + m^2y^2 - a^2y^2 - m^4 + a^4)^2 - \\ - 4m^2(x^2 + y^2)(m^2 - a^2)^2 = 0.\end{aligned} \tag{38,4}$$

Snadno lze ověřiti, že levá strana této rovnice je rozložitelna a že jí lze dáti tvar

$$\begin{aligned}&[m^2x^2 + (m^2 - a^2)(y - a)^2 - m^2(m^2 - a^2)] \,. \\ .\,&[m^2x^2 + (m^2 - a^2)(y + a)^2 - m^2(m^2 - a^2)] = 0.\end{aligned}$$

Je tedy kolmý průmět průsečné křivky anuloidu s rovinou σ do roviny $(\vec{x}\,\vec{y})$ složen ze dvou shodných elips

$$\left.\begin{aligned}E_1 &\equiv \frac{x^2}{m^2 - a^2} + \frac{(y - a)^2}{m^2} - 1 = 0 \\ \text{a} \quad E_2 &\equiv \frac{x^2}{m^2 - a^2} + \frac{(y + a)^2}{m^2} - 1 = 0,\end{aligned}\right\} \tag{38,5}$$

jejichž poloosy a poloha jsou zřejmy z rovnic (38,5).

Avšak na př. k prvé z rovnic (38,5) dospějeme též vyloučením z z rovnice (38,3) roviny σ a z rovnice kulové plochy

$$x^2 + (y - a)^2 + z^2 - m^2 = 0.$$

Protože rovina σ prochází středem $(0; a; 0)$ této kulové plochy, je tím dokázáno, že E_1 je kolmý průmět kružnice anuloidu o poloměru m v rovině σ. Stejným způsobem to lze dokázati o elipse E_2.

Oba dotykové body roviny σ se ztotožňují s průsečíky obou kružnic, které v ní leží. Souřadnice těchto bodů, jak řešením soustavy rovnic (38,3) a (38,5) vychází, jsou

$$\left(\pm \frac{m^2 - a^2}{m};\ 0;\ \pm \frac{a\sqrt{m^2 - a^2}}{m}\right). \tag{38,6}$$

Vnitřní dvojnásob tečné roviny anuloidu (38,1) obalují rotační kužel, jehož osa resp. vrchol se ztotožňují s osou resp. středem anuloidu. Jeho rovnice je podle (38,3)

$$a^2 (x^2 + y^2) - (m^2 - a^2) z^2 = 0, \tag{38,7}$$

a jeho tvořící přímky jsou středné dvojic kružnic, ve kterých jeho tečné roviny protínají anuloid.

Z ostatních rovinných řezů povšimněme si ještě některých, jejichž roviny jsou rovnoběžny s osou anuloidu. Buď $y = c$, kde c je reálná konstanta, rovnice takové roviny. Její průsečná křivka s anuloidem (38,1) má rovnice

$$y - c = 0,\ (x^2 + z^2 + m^2 + c^2 - a^2)^2 - 4m^2 (x^2 + c^2) = 0; \tag{38,8}$$

je to t. zv. spirická křivka Perseova, kterou po prvé uvažoval Perseus již v 2. století před Kristem. Pro $c = a$ se druhá z rovnic (38,8) specialisuje na rovnici

$$(x^2 + z^2 + m^2)^2 - 4m^2 (x^2 + a^2) = 0. \tag{38,9}$$

Lze ji psáti též ve tvaru

$$[(x - m)^2 + z^2] \cdot [(x + m)^2 + z^2] = 4a^2m^2,$$

který vyjadřuje, že každý bod na křivce (38,9) v rovině $y - a = 0$ má od bodů $(m; a; 0)$ a $(-m; a; 0)$ vzdálenosti d_1, d_2, o nichž platí,

$$d_1 d_2 = 2am. \tag{38,10}$$

Promítá se tudíž průsečná křivka roviny $y - a = 0$ s anuloidem (38,1) kolmo do roviny $(\vec{x}\,\vec{z})$ do křivky, jejíž body mají od středů obou vytvořujících kružnic v rovině $(\vec{x}\,\vec{z})$ vzdálenosti o konstantním součinu. Takové křivky jsou křivky Cassiniovy, a oba zmíněné středy vytvořujících kružnic jsou jejich ohniska. Jsou tedy Cassiniovy křivky zvláštním případem spirik Perseových.

Ukažme, že při zvláštních anuloidech se uvažovaná křivka Cassiniova dále specialisuje na lemniskatu; je to v tom případě, kdy $m = 2a$. Rovnice průsečné křivky roviny $y = a$ s takovým anuloidem pak jsou

$$y - a = 0, \; (x^2 + z^2)^2 + 8a^2 (z^2 - x^2) = 0. \quad (38,11)$$

a hodnota stálého součinu je

$$d_1 d_2 = 4a^2,$$

jak plyne z (38,9) a z (38,10).

Z Cassiniových křivek pouze lemniskata má reálný singulární bod a to v počátku. Křivka má v něm dvě reálné tečny, jejichž rovnice podle (38,11) jsou

$$z \pm x = 0.$$

Singulární bod se proto nazývá dvojný bod uzlový.

Průsečná lemniskata v rovině σ určuje svým uzlovým bodem dotykový bod roviny σ na hrdlové kružnici plochy.

Platí tedy věta:

Je-li průměr vytvořující kružnice anuloidu roven průměru jeho kružnice hrdlové, pak tečné roviny v bodech hrdlové kružnice jej protínají v lemniskatách Bernoulliových.

39. O studiu a učebnicích analytické geometrie. Existuje mnoho učebnic analytické geometrie, lišících se jak obšírností, tak způsobem výkladu.

Jak i z tohoto spisku je patrno, k studiu geometrie metodou analytickou, čili souřadnicovou je nutno ovládati alespoň některé části algebry, zejména nauku o determinantech. Proto je doporučení hodno před studiem větších děl o analytické geometrii prostudovati nauku o determinantech a osvojiti si jejich praktické užívání. K tomu cíli znamenitě se hodí kniha B. Bydžovský, Základy teorie determinantů z r. 1929, nebo alespoň stručný spisek (litografie) Zahradník, O determinantech, 1903—1904.

K soustavnějšímu studiu analytické geometrie v českém jazyku nutno především doporučiti knihu dr. Boh. Bydžovský, Úvod do analytické geometrie, str. 404, z r. 1932. Větší její část (226 str.) je věnována analytické geometrii rovinné, zbytek analytické geometrii prostorové v pravoúhlých kartézských souřadnicích se stručnými doplňky o kosoúhlých souřadnicích v prostoru a historickém přehledu.

O kuželosečkách, algebraických křivkách vyšších stupňů, rovinných i prostorových, o algebraických plochách druhého i vyšších stupňů, o přímkových komplexech a jiných útvarech, lze se poučiti z velkého díla Jan Vojtěch, Geometrie projektivní (880 str.) z r. 1932.

K úvodnímu studiu se hodí též tyto zcela elementární učebnice:

Studnička, Úvod do analytické geometrie v prostoru, 1876.

Zahradník, Analytická geometrie, 1902.

Zahradník, O plochách druhého stupně, 1911.

Stručné poučení o analytické geometrii v prostoru, včetně ploch druhého stupně, nalezneme též ve všech přednáškách o matematice na vysokých školách technických, pokud byly vydány tiskem. Z nich nejlépe vyhovuje kniha Jan Vojtěch, Základy matematiky (díl I. z r. 1939, díl II. z r. 1940), v níž nalezneme i četné příklady s výsledky.

Na konec uveďme, že analytická geometrie útvarů lineárních, kuželoseček a ploch druhého stupně je již do nejmenších podrobností propracována. Existují veliká díla, v nichž je sneseno takřka vše, co lze o těchto útvarech říci. Takové je na př. třísvazkové dílo Staude, Analytische Geometrie des Punktes atd., 1905 a Analytische Geometrie des Punktepaares atd., díl I. a II. z r. 1910. Stejně podrobná je i příslušná stať v Enzyklopädie der math. Wissenschaften. K rychlé informaci často dobře poslouží známé dílo Pascal, Repertorium der Mathematik.