Jak se studují geometrické útvary v prostoru. II. část

VII. Kvadriky v pravoúhlých kartézských souřadnicích. Popis jednotlivých druhů

In: Jiří Klapka (author): Jak se studují geometrické útvary v prostoru. II. část. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 78–105.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403061

VII.

KVADRIKY V PRAVOÚHLÝCH KARTÉZSKÝCH SOUŘADNICÍCH. POPIS JEDNOTLIVÝCH DRUHŮ.

33. O jednodílném hyperboloidu.

a) Z normálního tvaru rovnice jednodílného hyperboloidu trojosého

$$f(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (33{,}1)$$

nejsnadněji odvodíme jeho hlavní vlastnosti. Je zřejmé, že všechny tři stěny souřadnicového trojhranu jsou jeho roviny souměrnosti a jejich průsečné přímky, hrany trojhranu souřadnic, jsou osy souměrnosti plochy. Nazýváme je osy hyperboloidu.

Stejně je tomu u všech středových kvadrik, máme-li na mysli jejich rovnice v normálním tvaru.

Průsečíky kvadriky s jejími osami jsou její vrcholy. Pouze čtyři z šesti vrcholů trojosého hyperboloidu jednodílného jsou reálné; dva z nich $(\pm a; 0; 0)$ leží na ose $\vec{x}$, jiné dva $(0; \pm b; 0)$ na $\vec{y}$. Na ose $\vec{z}$ ležící vrcholy $(0; 0; \pm ic)$ jsou sdruženě imaginární.

Délky a, b, ic jsou poloosy plochy (obr. 16).

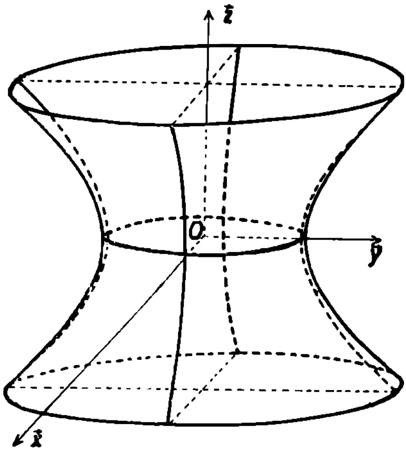
Roviny rovnoběžné s $(\vec{x}\,\vec{y})$ o rovnici $z = k$, kde k je reálná konstanta, protínají plochu (33,1) v elipsách o rovnicích

$$z - k = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right) = 0,$$

čili o rovnicích

$$z - k = 0, \quad \frac{x^2}{\dfrac{a^2\,(c^2 + k^2)}{c^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{b^2\,(c^2 + k^2)}{c^2}} - 1 = 0. \qquad (33{,}2)$$

Poměr poloos těchto elips zřejmě nezávisí na k. Z toho lze souditi, že osnova rovin rovnoběžných s hlavní rovinou $(\vec{x}\ \vec{y})$ protíná jednodílný hyperboloid (33,1) v soustavě elips podobných, promítající se kolmo do téže hlavní roviny v soustavu homotetických elips, jejichž osy leží v osách $\vec{x}$ a $\vec{y}$ (obr. 16).



Obr. 16. Jednodílný hyperboloid trojosý s hlavními hyperbolami a elipsou.

Se zvětšujícím se $|k|$ zvětšují se i poloosy průsečné elipsy; svého minima tedy dosahují pro $k = 0$; tuto nejmenší ze všech elips soustavy (33,2)

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{33,3}$$

nazýváme **hrdlovou elipsou** jednodílného hyperboloidy trojosého. Tečné roviny plochy v bodech hrdlové elipsu jsou rovnoběžny s osou $\vec{z}$ a obalují eliptický válec, v jehož vnitřní části není reálných bodů hyperboloidu.

Vrcholy elips soustavy (33,2) leží po dvou (protějších) na t. zv. hlavních hyperbolách plochy v hlavních rovinách, o rovnicích

$$y = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{33,4}$$

resp.

$$x = 0, \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{33,5}$$

Hrdlová elipsa a obě hlavní hyperboly jsou současně obrysy kolmých průmětů plochy do rovin těchto kuželoseček, t. j. do rovin hlavních.

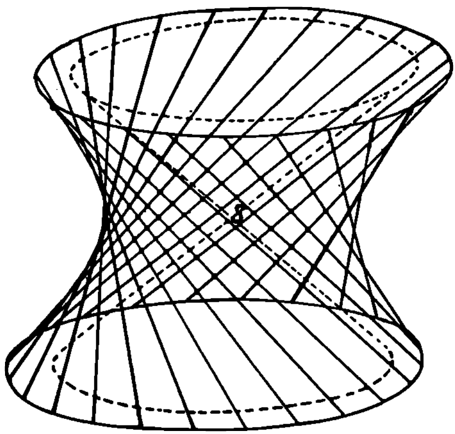
b) Z rovnice hyperboloidu (33,1) vychází $A = -A_{44} = \frac{1}{a^2b^2c^2} > 0$, proto jednodílný hyperboloid je kvadrika přímková. Asymptotický kužel (obr. 17) má podle (25,8) rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{33,7}$$

a zřejmě je reálný. Z jeho rovnice je patrno, že jeho roviny kolmé souměrnosti (roviny hlavní) se ztotožňují s rovinami souměrnosti hyperboloidu, proto i osy obou ploch se ztotožňují.

Jen u jednodílného hyperboloidu může nastati případ, předvídaný v odst. 25, kdy diametrální řez plochy je singulární kuželosečka, složená ze dvou rovnoběžných tvořících přímek p, q hyperboloidu. Rovina ϱ tohoto řezu musí pak býti tečnou rovinou kužele asymptotického a dotýkati se jej podél přímky, která je rovnoběžna s přímkami p, q.

Ze vztahu plochy k jejímu asymptotickému kuželi dále plyne, že na jednodílném hyperboloidu existují kuželosečky všech druhů; mezi nimi paraboly leží v rovinách rovnoběžných s tečnými rovinami asymptotického kužele. Máme-li rozhodnouti o druhu průsečné kuželosečky dané roviny s hyperboloidem, stačí místo něho uvažovati kužel asymptotický. S výjimkou řezů rovinami diametrálními obdržíme na asymptotickém kuželi kuželosečku téhož druhu, soustřednou a podle společného středu homotetickou, neboť asymptoty — ať již reálné nebo sdruženě imaginární — obou křivek jsou tytéž.



Obr. 17. Jednodílný hyperboloid s regulem přímek a kuželovou plochou asymptotickou.

Všechny dosud řečené vlastnosti má též jednodílný hyperboloid rotační ($a^2 = b^2$). Místo elips soustavy (33,2) máme zde ovšem kružnice (rovnoběžky) hyperboloidu, z nichž nejmenší poloměr má hrdlová kružnice v jeho hlavní rovině $(\vec{x}\,\vec{y})$. Obě hlavní hyperboly jsou zde shodné, neboť plochu lze vytvořiti rotací kterékoliv z nich kolem rotační osy $\vec{z}$.

Rotací jejich asymptot vznikne asymptotický kužel plochy, který tudíž je též rotační.

Charakteristická rovnice trojosého jednodílného hyperboloidu (33,1) má kořeny

$$\varrho_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \varrho_2 = \frac{1}{b^2}, \quad \varrho_3 = -\frac{1}{c^2}. \tag{33,8}$$

Je-li $a > b$, pak ϱ_1 je kořen prostřední velikosti a podle odst. 30 pouze singulární kuželosečka h_1 charakteristického svazku

$$x_4 = 0, \ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} - \frac{1}{a^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0, \tag{33,9}$$

je složena z reálných přímek nevlastních. Jimi jsou určeny dvě osnovy reálných rovin cyklických, které jsou vesměs rovnoběžny s osou $\vec{x}$ a položeny souměrně podle hlavních rovin $(\vec{x}\ \vec{y})$ a $(\vec{x}\ \vec{z})$. Z (33,9) vychází, že každá z obou rovin

$$c\sqrt{a^2 - b^2} \,.\, y \pm b\sqrt{a^2 + c^2} \,.\, z, \tag{33,10}$$

určuje svým směrem jednu z obou osnov cyklických rovin.

Středy kružnic každé z obou soustav vyplňují průměr hyperboloidu, ležící v rovině $(\vec{y}\ \vec{z})$ a sdružený vzhledem k hlavní hyperbole (33,5) s průměrem (33,10). Tak vycházejí rovnice obou průměrů

$$x = 0, \quad z = \pm \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2}}\, y. \tag{33,11}$$

Na jednodílném hyperboloidu, jak víme (odst. 30), není reálných kruhových bodů a žádný z průměrů (33,11) nemá s plochou reálných bodů společných. Průměr kružnice se s polohou cyklické roviny ovšem mění; délky průměrů (33,10) hyperboly (33,5) jsou stejné a rovny průměru obou shodných nejmenších plošných kružnic.

Je-li jednodílný hyperboloid rotační, obě soustavy jeho kružnic se ztotožňují v soustavě kružnic (rovnoběžek) hyperboloidu.

c) Z normálního tvaru (33,1) rovnice trojosého hyperboloidu jednodílného vychází podle (23,5) jeho rovnice v přímkových souřadnicích

$$a^2p_{23}^2+b^2p_{13}^2-c^2p_{12}^2+b^2c^2p_{14}^2+a^2c^2p_{42}^2-a^2b^2p_{34}^2=0. \quad (33,12)$$

Souřadnice přímky q jednoho z regulů (obr. 17) vyhovují podle (23,7) trojici rovnic

$$abq_{34}+cq_{12}=0,\ acq_{42}-bq_{13}=0,\ bcq_{14}-aq_{23}=0, \quad (33,13)$$

kdežto souřadnice přímky r druhého regulu vyhovují rovnicím

$$abr_{34}-cr_{12}=0,\ acr_{42}+br_{13}=0,\ bcr_{14}+ar_{23}=0. \quad (33,14)$$

Přímka p je tvořící přímkou asymptotického kužele (33,7), když její souřadnice splňují soustavu rovnic

$$p_{12}=p_{13}=p_{23}=0,\quad \frac{p_{41}^2}{a^2}+\frac{p_{42}^2}{b^2}-\frac{p_{43}^2}{c^2}=0. \quad (33,15)$$

Je-li jednodílný hyperboloid (33,1) rotační, svírají tvořící přímky jeho asymptotického kužele s osou $\vec{z}$ týž úhel ε, o němž platí $\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{a}{c}$. Protože tvořící přímky hyperboloidu jsou rovnoběžny s tvořícími přímkami jeho asympt. kužele, svírají s osou $\vec{z}$ touž odchylku ε, jsou s ní však mimoběžny.

Je-li q jedna z tvořících přímek rotačního hyperboloidu, obdržíme každou jinou z přímek téhož regulu pootočením přímky q okolo osy $\vec{z}$. Abychom stejným způsobem vytvořili i druhý regulus, postačí znáti jednu jeho přímku, na př. onu, která je s q souměrně položena podle kterékoliv roviny procházející osou $\vec{z}$.

Při otáčení přímky q okolo $\vec{z}$ její body opisují kružnice plochy, z nichž nejmenší poloměr má ona, kterou opisuje od osy $\vec{z}$ nejméně vzdálený bod přímky q. Jest to, jak známo, pata společné kolmice (osy) obou mimoběžek q, $\vec{z}$ a kružnice jím opsaná je hrdlová kružnice hyperboloidu. Z toho plyne, že osa mimoběžek $q, \vec{z}$ leží v rovině $(\vec{x}\ \vec{y})$ a protíná osu $\vec{z}$ v počátku. Platí tedy věta:

Otáčením přímky q okolo osy o s ní mimoběžné, nikoli však k ní kolmé, se vytvořuje jednodílný rotační hyperboloid; souhrn všech přímek, jež při tomto pohybu zaujme přímka q, tvoří jeden regulus tvořících přímek hyperboloidu. Druhý obdržíme zrcadlením podle roviny kteréhokoliv meridiánu, nebo otáčením jedné z jeho přímek okolo o. Hrdlová kružnice je vytvořena otáčením onoho bodu přímky q, jehož vzdálenost od o je nejmenší.

Je tedy rotační hyperboloid jednodílný jednoznačně určen svou rotační osou a s ní mimoběžnou tvořící přímkou.

Jeho vytvoření otáčením přímky jest podkladem pro jeho modely z pružných vláken. Mysleme si rotační válec, omezený dvěma kruhovými podstavami, které na modelu jsou realisovány dvěma shodnými kruhovými kotouči, otáčivými okolo hmotné osy válce. Jsou-li tvořící přímky válce pružná vlákna, napjatá mezi obvody obou kotoučů, změní se po pootočení jednoho z obou kotoučů — které ovšem má svou hranici — celá soustava tvořících přímek válce v jeden z regulů rotačního hyperboloidu jednodílného (obr. 17). Komplementární regulus vzniká pootočením téhož kotouče z jeho původní polohy o týž úhel, ale v opačném smyslu.

Při zvětšování úhlu pootočení zmenšuje se poloměr hrdlové kružnice a při určité jeho velikosti vznikne kužel. Při ještě větším pootočení vlákna se ve středu válce lomí.

d) Názorné je vytvoření jednodílného hyperboloidu trojosého z rotačního transformací, již nazýváme kolmou perspektivní prostorovou afinitou.

Položíme-li v (31,14)

$$X = x, \quad Y = \frac{a}{b}y, \quad Z = z, \tag{33,16}$$

obdržíme právě (33,1).

Z rovnic (33,16), vyjadřujících uvedenou afinitu, je její geometrický význam patrný na prvý pohled. Dva korespondující body se shodují v prvé i v třetí souřadnici, pouze druhá se násobí kladným číslem $\frac{b}{a}$. Body roviny $(\vec{x}\,\vec{z})$ jsou neproměnné (invariantní), proto ji nazýváme samodružnou (invariantní) rovinou afinity. Libovolný bod v prostoru se transformuje v jiný, ležící s původním na společné kolmici k samodružné rovině. Vzdálenost transformovaného bodu od této roviny jest $\frac{b}{a}$ násobkem vzdálenosti bodu původního $\left(\frac{b}{a} = \text{poměr afinity}\right)$. Lze tedy vysloviti větu:

Kolmá perspektivní afinita, jejíž samodružná rovina σ prochází osou o rotačního hyperboloidu jednodílného, transformuje jej v soustředný trojosý hyperboloid jednodílný, s jednou hlavní rovinou a hlavní hyperbolou v rovině σ a s osou o. Při této transformaci hrdlová kružnice rotačního hyperboloidu se transformuje v hrdlovou elipsu hyperboloidu trojosého.

Jak je z (33,16) patrno, použitá transformace je lineární, takže rovina se jí transformuje v rovinu, přímka v přímku. Oba reguly rotačního hyperboloidu se jí transformují v oba reguly hyperboloidu trojosého.

Jak víme, žádný z těchto regulů neobsahuje přímek nevlastních. Takové reguly se nazývají hyperboloidické.

Při transformaci (33,16) pól a polární rovina plochy (31,14) přecházejí v pól a polární rovinu plochy (33,1). Totéž platí o bodu na ploše a jeho rovině tečné. Rovnici tečné roviny plochy (33,1) v jejím bodě (x_0; y_0; z_0) dovedeme ovšem napsati přímo podle odst. 21 ve tvaru

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0;$$

není-li (x_0; y_0; z_0) bodem plochy, je to rovnice jeho roviny polární.

Příklady k cvičení.

124. Dokažte: Obě polární roviny libovolného bodu nevlastního vzhledem k jednodílnému hyperboloidu a jeho asymptotickému kuželi se ztotožňují. [Napište rovnice obou rovin podle odst. **21**, homogenisujíce napřed rovnice (33,1) a (33,7)!

125. Dokažte: Obě úsečky, omezené dvojicemi bodů, které na libovolné sečně vytíná jednak hyperboloid, jednak jeho asymptot. kužel, mají společný půlící bod. Jak tedy lze sestrojovati další body hyperboloidu, je-li dán jeho jeden bod a kužel asymptotický? [Plyne z věty příkladu **124**.]

126. Dokažte: Tečna asymptotického kužele v jeho bodě P protíná hyperboloid v dvojici bodů, jejichž vzdálenost bod P půlí. [Plyne z věty příkladu **125**.]

127. Dokažte: Tečná rovina σ asymptotického kužele v bodech jeho tvořící přímky p protíná hyperboloid ve dvou rovnoběžných přímkách, jejichž vzdálenost přímka p půlí. [Plyne z věty příkl. **126**.]

128. Dokažte, že přímka q je jen tehdy tvořící přímkou rotačního hyperboloidu jednodílného (31,14), když její souřadnice vyhovují rovnici $q_{14}q_{13} - q_{23}q_{42} = 0$! [Vychází buď z (33,13), kde $a = b$, nebo přímo jako podmínka, aby osa mimoběžek $q, \vec{z}$ procházela počátkem.]

129. Jak zní rovnice rotačního hyperboloidu (31,14), dána-li jeho tvořící přímka q, jejíž souřadnice splňují rovnici příkladu **128**? [Viz příklad **130**.]

130. Jak zní normální rovnice (31,13) trojosého hyperboloidu jednodílného, určeného osami $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ a přímkou q? [Podle

(33,13) nebo (33,14) vypočtěte a^2, b^2, c^2! Hledaná rovnice je až na faktor

$$q_{23}q_{34}q_{42}x^2 + q_{13}q_{34}q_{14}y^2 + q_{12}q_{42}q_{14}z^2 + q_{12}q_{13}q_{23} = 0.]$$

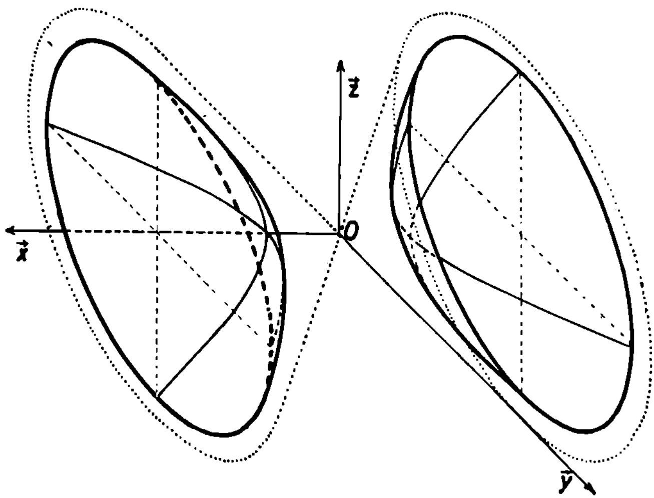
131. Dokažte, že tři přímky téhož hyperboloidického regulu nejsou komplanární (t. j. rovnoběžny s jednou rovinou)! [V opačném případě by komplementární regulus obsahoval společnou nevlastní příčku daných přímek a nebyl by hyperboloidický; pak by však nebyl hyperboloidický ani původní regulus.]

132. Dokažte, že kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 - b^2 = 0$ protíná jednodílný hyperboloid trojosý (33,1), při $a > b$ ve dvou shodných kružnicích v rovinách (33,10)! [Vylučte x z rovnic obou ploch!]

34. O dvojdílném hyperboloidu.

a) Pouze dva z šesti vrcholů trojosého hyperboloidu dvojdílného (obr. 18)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (34,1)$$



18. Dvojdílný hyperboloid trojosý s asymptotickou kuželovou plochou a hlavními hyperbolami.

jsou reálné a to vrcholy ($\pm a; 0; 0$) na ose $\vec{x}$, jíž říkáme **reálná osa** hyperboloidu. Naproti tomu na jeho **imaginárních osách** $\vec{y}, \vec{z}$ ležící vrcholy $(0; \pm ib; 0)$ a $(0; 0; \pm ic)$ jsou sdruženě imaginární.

Protože

$$A = -A_{44} = -\frac{1}{a^2b^2c^2} < 0, \tag{34,2}$$

není na ploše přímek. Přes to asymptotický kužel dvojdílného hyperboloidu je reálný a má podle (25,8) rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Roviny rovnoběžné s $(\vec{y}\ \vec{z})$ ve vzdálenosti k protínají hyperboloid v soustavě kuželoseček o rovnicích

$$x - k = 0, \quad \frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(k^2 - a^2)} + \frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(k^2 - a^2)} - 1 = 0; \tag{34,3}$$

reálné z nich jsou patrně jen ty, pro něž $|k| > a$. Pak jsou všechny kuželosečky soustavy (34,3) elipsy (obr. 18) a to podobné, neboť poměr čtverců jejich poloos $\frac{b^2}{c^2}$ nezávisí na k. S rostoucím k rostou i poloosy průsečné elipsy a to tak, že dva její protější vrcholy vytvořují hlavní hyperbolu plochy v hlavní rovině $(\vec{x}\ \vec{y})$ o rovnicích

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{34,4}$$

kdežto zbývající dva vrcholy vytvořují hlavní hyperbolu v rovině $(\vec{x}\ \vec{z})$ o rovnicích

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{34,5}$$

Obě hlavní hyperboly jsou současně obrysy kolmých průmětů plochy do svých rovin.

Pro $| k | = a$ průsečná kuželosečka je singulární; jsou tedy roviny $x \mp a = 0$ tečné roviny plochy v jejích reálných vrcholech. Mezi nimi není reálných bodů plochy.

Z uvedených vlastností lze si učiniti představu o tvaru plochy, která, jak název naznačuje, je složena ze dvou oddělených částí.

Z reálnosti asymptotického kužele (34,2) lze usouditi, že též na dvojdílném hyperboloidu existují kuželosečky všech druhů. Řezy hyperboloidu a jeho asymptotického kužele nikoliv diametrální rovinou σ jsou kuželosečky téhož druhu. Jsou-li středové, jsou soustředné a homotetické podle společného středu, neboť mají společné asymptoty, ať již reálné, nebo sdruženě imaginární. Parabolické řezy vzniknou na obou plochách jen tehdy, je-li rovina σ rovnoběžná s některou tečnou rovinou asymptotického kužele.

Na rozdíl od jednodílného hyperboloidu leží všechny body hyperboloidu dvojdílného uvnitř jeho asymptotického kužele.

Je-li $b = c$, dvojdílný hyperboloid (34,1) je rotační o ose rotace $\vec{x}$, což platí i o jeho asymptotickém kuželi.

Rotační hyperboloid dvojdílný lze definovati jako geometrické místo bodů v prostoru, které mají od dvou různých bodů F, G stálý rozdíl vzdáleností. Spojnice FG je rotační osa plochy, body FG jsou společná ohniska všech jejích meridiánů, jež jsou shodné hyperboly.

b) Na trojosém hyperboloidu dvojdílném existují dvě soustavy kružnic. Protože charakteristická rovnice plochy (34,1) má kořeny

$$\varrho_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \varrho_2 = -\frac{1}{b^2}, \quad \varrho_3 = -\frac{1}{c^2},$$

je při $c < b$ kořen ϱ_2 střední velikosti. Jen singulární kuželosečka h_2 charakteristického svazku je reálná a má rovnice

$$x_4 = 0, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} + \frac{1}{b^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0.$$

Obě osnovy cyklických rovin jsou proto určeny rovinami

$$xc\sqrt{a^2 + b^2} \pm za\sqrt{b^2 - c^2} = 0, \tag{34,6}$$

procházejícími osou $\vec{y}$, takže všechny cyklické roviny jsou s touto osou rovnoběžny. Geometrickým místem středů kružnic oné soustavy, jež odpovídá hornímu znaménku v (34,6), je průměr hyperboloidu

$$y = 0, \quad xc\sqrt{b^2 - c^2} + za\sqrt{a^2 + b^2} = 0, \tag{34,7}$$

kdežto kružnice druhé soustavy mají své středy na průměru

$$y = 0, \quad xc\sqrt{b^2 - c^2} - za\sqrt{a^2 + b^2} = 0. \tag{34,8}$$

O správnosti těchto rovnic se snadno přesvědčíme na př. určením polárních rovin nevlastních bodů obou průměrů; lze je ovšem též odvoditi jako rovnice k (34,6) sdružených průměrů vzhledem k hlavní hyperbole (34,5).

Na rozdíl od jednodílného hyperboloidu existují zde reálné body kruhové. Dva z nich leží na průměru (34,7), další dva na průměru (34,8). Jejich souřadnice jsou dány výrazy

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 + c^2}}, \tag{34,9}$$

kde je dovoleno znaménka jakkoliv kombinovati. Určují tudíž kruhové body dvojdílného hyperboloidu obdélník v hlavní rovině, kolmé k rovinám cyklickým, a to kolmo souměrný podle os hyperboloidu, ležících v téže rovině.

Rovnice polární roviny, resp. tečné roviny plochy v jejím bodě $(x_0; y_0; z_0)$ zní

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0; \tag{34,10}$$

odtud vychází, že rovnice tečných cyklických rovin (protínajících plochu v dvojicích sdružených isotropických přímek), t. j. tečných rovin v kruhových bodech, jsou

$$\pm \frac{x}{a} \sqrt{a^2 + b^2} \pm \frac{z}{c} \sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 + c^2} = 0, \quad (34,11)$$

kde opět jest kombinovati znaménka všemi způsoby. Rozhodování o tom, v kterém kruhovém bodě se některá z rovin (34,18) dotýká plochy a na kterém z obou průměrů (34,7), (34,8) některý z kruhových bodů (34,9) leží, nečiní žádných obtíží.

Stejně jako trojosý hyperboloid jednodílný lze i dvojdílný vytvořiti kolmou perspektivní afinitou z dvojdílného hyperboloidu rotačního. Skutečně, transformací

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = \frac{b}{c} z \quad (34,12)$$

rovnice (31,16) přechází v (34,1). Odtud je patrno, že za invariantní rovinu afinity lze zvoliti rovinu kteréhokoliv meridiánu rotačního hyperboloidu dvojdílného.

Příklady k cvičení.

133. Dokažte, že věty příkladů **124**, **125** platí i pro hyperboloid dvojdílný! Jak je nutno pozměniti větu příkladu **126**, aby platila pro jednodílný hyperboloid? [Zaměniti hyperboloid s asympt. kuželem.]

134. Kdy obdélník o vrcholech v kruhových bodech dvojdílného hyperboloidu (34,1) s $c < b$ je čtverec? Kolik kruhových bodu má rotační hyperboloid dvojdílný a kde tyto body leží? [Když $a^4 + c^4 + a^2b^2 - b^2c^2 = 0$. — Dva; na ose rotace plochy.]

35. O elipsoidech. a) Z normální rovnice trojosého reálného elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (35,1)$$

je patrno, že má šest vesměs reálných vrcholů $(\pm a; 0; 0)$, $(0; \pm b; 0)$, $(0; 0; \pm c)$. Délky a, b, c jsou poloosy elipsoidu.

Protože jest

$$A = -A_{44} = -\frac{1}{a^2b^2c^2} < 0, \tag{35,2}$$

jsou elipsoidy plochy nepřímkové.

Nevlastní kuželosečka plochy o rovnicích

$$x_4 = 0,\ \frac{x_1^{\ 2}}{a^2} + \frac{x_2^{\ 2}}{b^2} + \frac{x_3^{\ 2}}{c^2} = 0, \tag{35,3}$$

zřejmě nemá žádných bodů reálných a je imaginární stejně jako asymptotický kužel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{35,4}$$

Je-li $a = b$, elipsoid je rotační. Z jeho rovnice (31,18) je patrné, že vzniká rotací elipsy (srovnej s 18,6)

$$Y = 0,\quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{35,5}$$

okolo osy $\vec{Z}$.

Kolmá perspektivní afinita

$$X = x,\quad Y = \frac{a}{b}\, y,\quad Z = z, \tag{35,6}$$

jejíž samodružná rovina je meridián $(\vec{X}\vec{Z})$ rotačního elipsoidu (31,18) jej transformuje v trojosý elipsoid (35,1). Rovník rotačního elipsoidu při této transformaci přechází v hlavní elipsu E (obr. 19)

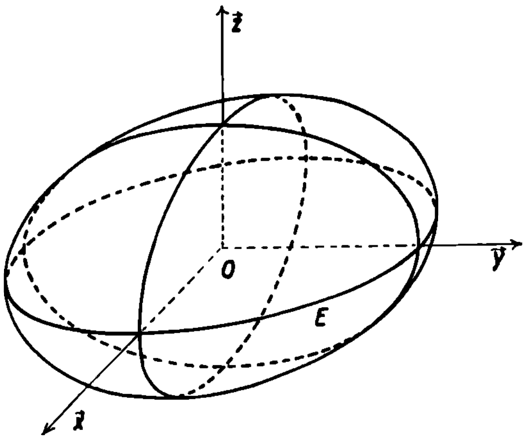
v rovině $(\vec{x}\ \vec{y})$ o rovnicích

$$z = 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

kdežto meridiány rotačního elipsoidu v rovinách $(\vec{Z}\vec{Y})$ resp.

$(\overrightarrow{Z}\overrightarrow{X})$ se transformují v další dvě hlavní elipsy trojosého elipsoidu. Posledně uvedený meridián zůstává transformací nezměněn, neboť leží v rovině invariantní, takže je to společná křivka obou ploch; kromě toho se obě plochy podél ní dotýkají.

Z vytvoření trojosého elipsoidu kolmou perspektivní afinitou vyplývá, že i trojosý elipsoid — stejně jako rotační — je plocha uzavřená; všechny její řezy rovinami nikoliv



Obr. 19. Trojosý elipsoid s hlavními elipsami.

tečnými jsou elipsy, reálné ovšem jen tehdy, leží-li pól jejich roviny vně elipsoidu, t. j. v opačné části prostoru než střed elipsoidu.

Z rovnice (35,1) vychází

$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \qquad (35,7)$$

Aby tedy z bylo reálné, musí býti

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1,$$

t. j. pouze bodům uvnitř elipsy E (obr. 19) přísluší reálné souřadnice z, což je patrno i z okolnosti, že hlavní elipsy jsou obrysy kolmých průmětů elipsoidu.

Každá rovina, procházející některou osou, na př. $\vec{z}$, protíná elipsoid v elipse, jejíž dva protější vrcholy se ztotožňují s vrcholy elipsoidu na $\vec{z}$, zatím co zbývající dva vrcholy průsečné elipsy leží na E. Soustava elips v těchto rovinách umožňuje představu plochy.

Je-li $a > b > c$, oba vrcholy elipsoidu na ose $\vec{x}$ ležící náleží kulové ploše o poloměru a, soustředné s elipsoidem, a všechny ostatní jeho body leží uvnitř téže kulové plochy. Obráceně, všechny body elipsoidu až na dva jeho vrcholy na $\vec{z}$ leží vně kulové plochy soustředné o poloměru c. Odtud plyne: Oba vrcholy na $\vec{x}$ resp. na $\vec{z}$ jsou ony body elipsoidu, jejichž vzdálenost od jeho středu je maximální resp. minimální.

b) Na trojosém elipsoidu existují dvě soustavy kružnic; protože $\frac{1}{b^2}$ je za již učiněného předpokladu o velikosti poloos kořen charakteristické rovnice prostřední velikosti, singulární kuželosečka charakteristického svazku

$$x_4 = 0, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - \frac{1}{b^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0 \qquad (35,8)$$

je složena z dvojice reálných nevlastních přímek cyklických rovin obou osnov. Odtud vyplývá, že každá z obou osnov je určena jednou z rovin

$$xc\sqrt{a^2 - b^2} \pm za\sqrt{b^2 - c^2} = 0. \qquad (35,9)$$

Obě kružnice v těchto rovinách leží též na kulové ploše, opsané ze středu elipsoidu poloměrem rovným poloose prostřední délky. Skutečně, vyloučením y z rovnice (35,1) a z rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 - b^2 = 0,$$

vychází rovnice (35,9), čímž tvrzení je dokázáno.

Cyklické roviny, rovnoběžné s rovinou (35,9), protínají elipsoid v kružnicích, jejichž středy vyplňují jeho průměr o rovnicích

$$y = 0, \quad za\sqrt{a^2 - b^2} \mp xc\sqrt{b^2 - c^2} = 0, \tag{35,10}$$

při čemž v (35,9) a v (35,10) jest bráti současně buď horní nebo dolní znaménka. Oba průměry jsou sdruženy s průměry (35,9) hlavní elisy v rovině $(\vec{x}\,\vec{z})$ a protínají ji v čtyřech kruhových bodech elipsoidu o souřadnicích

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \tag{35,11}$$

V rovinách (35,9) ležící kružnice jsou shodné a mají ze všech největší poloměr. S rostoucí vzdáleností cyklické roviny od středu elipsoidu, klesá poloměr kružnice; tečná rovina v kruhovém bodě protíná plochu v dvojici sdružených isotropických přímek, cyklické roviny ještě vzdálenější od středu protínají elipsoid v kružnicích imaginárních.

Z rovnice polární (případně tečné) roviny

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1 = 0$$

a ze souřadnic kruhových bodů snadno lze napsati rovnice tečných rovin v kruhových bodech elipsoidu.

c) Je-li elipsoid rotační ($a = b$, rotační osa $\vec{z}$) obě osnovy cyklických rovin se ztotožňují v osnově rovnoběžkových kružnic plochy. Počet bodů kruhových se redukuje na 2 body, ztotožňující se s vrcholy plochy na rotační ose. Je-li $c > a = b$, všechny meridiány elipsy mají společná ohniska F, G na rotační ose $\vec{z}$. Elipsoid se pak nazývá prodloužený a body F, G jsou jeho ohniska.

Prodloužený elipsoid rotační lze definovati jako geometrické místo bodů v prostoru, jejichž vzdálenosti od dvou bodů F, G mají stálý součet $2c$.

Je-li $c < a = b$, nazývá se rotační elipsoid (35,1) zploštělý. Vzniká otáčením elipsy okolo její vedlejší osy. Ohniska jeho meridiánů vyplňují kružnici v rovině $\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y}$, s elipsoidem soustřednou, o poloměru $\sqrt{a^2 - c^2}$.

Příklady k cvičení:

135. Určete kruhové body elipsoidů:

a) $\frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{25}y^2 + \frac{1}{16}z^2 - 1 = 0$ $[\pm 6\sqrt{\frac{11}{20}}; 0; \pm 12\sqrt{\frac{1}{20}}]$.

b) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 - 1 = 0$ $[\pm 3\sqrt{\frac{5}{8}}; 0; \pm \sqrt{\frac{3}{8}}]$.

136. Dokažte, že rovnice tečné roviny elipsoidu (35,1), kolmé ke směru o kosinech $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ má tvar

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \pm \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma} = 0.$$

137. Dokažte: Geometrickým místem vrcholů pravoúhlého trojhranu, jehož stěny jsou tečnými rovinami elipsoidu (35,1), jest kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 0$. [Užijte rovnice tečné roviny udané v příkladě **136.**]

138. Vypočtěte souřadnice středu elipsy, ve které rovina $a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$ protíná elipsoid (35,1). [Střed leží na průměru s danou rovinou sdruženém, t. j. na poláře sdružené s její nevlastní přímkou.]

139. Ukažte, že elipsoid (35,1) lze parametricky vyjádřiti rovnicemi

$$x = a\sin\gamma\cos\varphi, \quad y = b\sin\gamma\sin\varphi, \quad z = c\cos\gamma$$

s parametry φ, γ. Jaké jsou čáry na ploše, pro něž jeden z obou parametrů je konstantní? [$\gamma =$ const. jsou elipsy v rovinách rovnoběžných s $(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y})$, $\varphi =$ const. jsou elipsy v rovinách procházejících osou $\overrightarrow{z}$.]

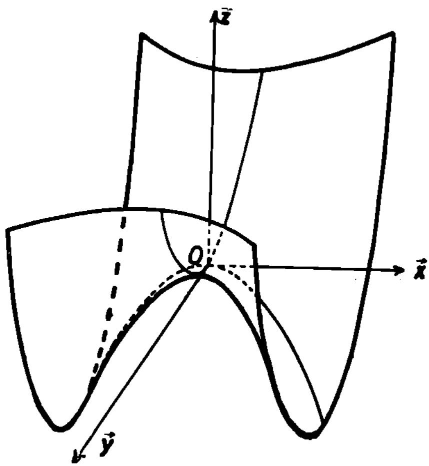
140. Napište rovnice středových kvadrik v souřadnicích rovinových a přímkových, vycházejíce z normálních tvarů jejich rovnic [podle (23,2) resp. (23,5)].

36. O hyperbolickém paraboloidu.

a) Z rovnice plochy ve tvaru normálním

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0, \tag{36,1}$$

je zřejmé, že pouze souřadnicové roviny $(\vec{x}\,\vec{z})$ a $(\vec{y}\,\vec{z})$ jsou hlavní roviny, t. j. roviny kolmé souměrnosti plochy (obr. 20),



Obr. 20. Hyperbolický paraboloid s hlavními parabolami.

která má proto jedinou osu $\vec{z}$. Rovina $(\vec{x}\,\vec{y})$ se plochy dotýká v jejím vrcholu, který se ztotožňuje s počátkem O; nazýváme ji proto vrcholovou tečnou rovinou paraboloidu. Osy $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou sdružené a současně kolmé tečny paraboloidu v jeho vrcholu.

To vše zůstává v platnosti i pro paraboloid eliptický, máme-li na mysli normální tvar jeho rovnice.

Nevlastní kuželosečka hyperbolického paraboloidu (36,1) je složena ze dvou reálných nevlastních tvořících přímek t_1, t_2 o rovnicích

$$x_4 = 0, \quad \sqrt{q}\,x_1 \pm \sqrt{p}\,x_2, \tag{36,2}$$

jejichž průsečík je nevlastní bod osy paraboloidu.

Každá rovina protíná nevlastní kuželosečku plochy reálně, proto na hyperbolickém paraboloidu není ani elips ani kružnic, takže každá nikoliv tečná rovina jej protíná v hyperbole, nebo v parabole. Poslední případ nastává patrně jen tehdy, když rovina řezu je rovnoběžná s osou paraboloidu. Na př. obě jeho roviny hlavní jej protínají v t. zv. hlavních parabolách o rovnicích

$$y = 0, \quad x^2 - 2pz = 0, \tag{36,3}$$

resp.

$$x = 0, \quad y^2 + 2qz = 0. \tag{36,4}$$

Je zřejmé, že body hlavní paraboly (36,3) mají souřadnice $z \geqq 0$, kdežto body hlavní paraboly (36,4) naopak mají $z \leqq 0$. Leží tedy hlavní paraboly na opačných stranách tečné roviny vrcholové.

Roviny kolmé na osu paraboloidu jej protínají v hyperbolách o rovnicích

$$z - k = 0, \quad \frac{x^2}{2pk} - \frac{y^2}{2qk} - 1 = 0 \tag{36,5}$$

$$(k = \text{konst.} \neq 0).$$

Tyto hyperboly tvoří soustavu o asymptotách v rovinách

$$\sqrt{q}\,x \pm \sqrt{p}\,y = 0, \tag{36,6}$$

určených osou paraboloidu a jeho tvořícími přímkami v tečné rovině vrcholové $z = 0$. Každá z hyperbol soustavy (36,5) má své vrcholy na hlavní parabole (36,3) resp. (36,4) podle toho, je-li $k > 0$ nebo $k < 0$.

Z těchto vztahů je možno si učiniti představu o tvaru plochy. K ještě názornějšímu vytvoření hyperbolického paraboloidu vede studium řezů plochy rovinami rovnoběžnými s hlavními rovinami plochy.

Na př. rovina $y - d = 0$, rovnoběžná s hlavní rovinou $(\vec{x}\,\vec{z})$ protíná hyperbolický paraboloid (36,1) v parabole o rovnicích

$$y - d = 0, \qquad \frac{x^2}{p} - 2z - \frac{d^2}{q} = 0, \tag{36,7}$$

jejímž vrcholem jest bod

$$W\left(0;\, d;\, -\frac{d^2}{2q}\right),$$

ležící na hlavní parabole (36,4).

Průsečná parabola (36,7) má týž parametr p jako hlavní parabola (36,3), je s ní tedy shodná, vznikajíc z ní rovnoběžným posunutím, po němž vrchol O hlavní paraboly (36,3) se ztotožní s bodem W hlavní paraboly (36,4). Platí tedy věta:

Hyperbolický paraboloid lze vytvořiti rovnoběžným posouváním kterékoliv z jeho hlavních parabol, při kterém její vrchol opisuje druhou jeho hlavní parabolu.

b) Tvořící přímky hyperbolického paraboloidu jsou uspořádány do dvou regulů, které — na rozdíl od regulů hyperboloidických — obsahují po jedné z nevlastních přímek t_1, t_2 paraboloidu. Jinak řečeno, přímky každého z těchto regulů, jež nazýváme paraboloidickými, jsou rovnoběžny s jistou rovinou, t. zv. řídicí rovinou regulu.

Podle (24,7) a (24,8) přímky jednoho z obou regulů jsou průsečnice rovin

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) - 2\lambda_2 &= 0, \\ \lambda_2\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) - \lambda_1 z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{36,8}$$

a řídicí rovina σ_1 téhož regulu zřejmě má rovnici $x\sqrt{q} + y\sqrt{p} = 0$ a ztotožňuje se s jednou z rovin (36,6).

Přímky komplementárního regulu jsou podle (24,9) a (24,10) průsečnice rovin

$$\left.\begin{aligned} \mu_1\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) - 2\mu_2 = 0, \\ \mu_2\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) - \mu_1 z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{36,9}$$

a jeho řídicí rovina σ_2 je druhá z rovin (36,6).

Nevlastní přímky řídicích rovin σ_1, σ_2 jsou nevlastní tvořící přímky t_1, t_2 hyperbolického paraboloidu. Průsečnice obou řídicích rovin, které jsou souměrně položeny podle kterékoliv roviny hlavní, je osa paraboloidu.

Rovnice polární roviny bodu $(x_0; y_0; z_0)$ zní (podle odst. 22)

$$\frac{xx_0}{p} - \frac{yy_0}{q} - z - z_0 = 0; \tag{36,10}$$

je-li to bod plochy, je (36,10) rovnice tečné roviny, obsahující obě tvořící přímky obou regulů, které procházejí jejím dotykovým bodem $(x_0; y_0; z_0)$.

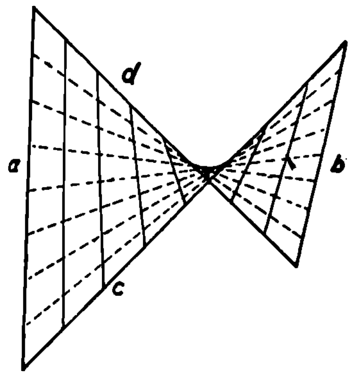
Dvě různé přímky a, b jednoho regulu a dvě jiné různé přímky c, d komplementárního regulu tvoří t. zv. prostorový čtyřúhelník, jímž je hyperbolický paraboloid jednoznačně určen. Každá z dvojic jeho protějších stran určuje směr řídicí roviny jednoho z obou regulů, čímž i směr osy je určen.

Je-li na př. řídicí rovina σ_1 rovnoběžna s a i s b, pak každá rovina s ní rovnoběžná protíná přímky c, d v dvojici bodů, jejichž spojnice je tvořící přímkou onoho regulu, k němuž náležejí a a b.

Odtud je patrno, že trojice přímek jednoho regulu vytíná na všech přímkách druhého regulu bodové trojice stejných dělících poměrů.

Na tomto vztahu jsou založeny t. zv. **niťové modely** hyperbolického paraboloidu (obr. 21). Dvě protější strany prostorového čtyrúhelníka rozdělíme na stejný počet dílů; spojením dělících bodů nitěmi obdržíme model jednoho paraboloidického regulu.

Jsouli všechny strany prostorového čtyrúhelníka stejně dlouhé, je to t. zv. *prostorový kosočtverec*. Na každém hyperbolickém paraboloidu existuje množství prostorových kosočtverců. Kolmá příčka (osa) dvou protějších stran kosočtverce je patrně jedna z obou tvořících přímek paraboloidu, které leží v jeho tečné rovině vrcholové. Tak lze určiti vrchol paraboloidu, jakož i tečnou rovinu vrcholovou, osu a řídicí roviny. Roviny souměrnosti jejich úhlů jsou hlavní roviny paraboloidu.



Obr. 21. Reguly hyperbolického paraboloidu daného prostorovým čtyrúhelníkem.

37. O eliptickém paraboloidu.

Z rotačního paraboloidu (31,23) [viz též (18,8) a (18,9)] vzniká eliptický paraboloid

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0 \qquad (37,1)$$

kolmou perspektivní afinitou ($p > 0$, $q > 0$)

$$X = x, \quad Y = \sqrt{\frac{p}{q}} \cdot y, \quad Z = z. \qquad (37,2)$$

Ať jsou x, y jakákoliv reálná čísla, přísluší k nim podle (37,1) souřadnice $z \geqq 0$. Leží tudíž všechny reálné body paraboloidu na téže (positivní) straně roviny $(\vec{x}\,\vec{y})$, t. j. tečné roviny vrcholové. Z jeho vytvoření afinitou z rotačního paraboloidu plyne, že tomu tak jest i pro kteroukoliv jinou tečnou rovinu plochy. Je zde $A = -\frac{1}{pq}$, takže na ploše není reálných přímek.

Nevlastní kuželosečka eliptického paraboloidu (37,1)

$$x_4 = 0, \quad f^*(x, x) \equiv \frac{x_1^2}{p} + \frac{x_2^2}{q} = 0 \qquad (37,3)$$

je složena ze dvou sdruženě imaginárních nevlastních přímek

$$x_4 = 0, \quad \sqrt{q}\,x_1 \pm i\sqrt{p}\,x_2 = 0, \qquad (37,4)$$

jejichž společný bod je reálný nevlastní bod osy paraboloidu.

Na eliptickém paraboloidu není proto jiných kuželoseček než elipsy, kružnice a paraboly, z nichž poslední leží v rovinách rovnoběžných s osou plochy.

Rovina rovnoběžná s tečnou rovinou vrcholovou ve vzdálenosti k protíná plochu (37,1) v elipse o rovnicích

$$z - k = 0, \quad \frac{x^2}{2pk} + \frac{y^2}{2qk} - 1 = 0, \qquad (37,5)$$

odkud je patrno, že všechny elipsy soustavy (37,5) jsou podobné a že se do roviny $(\vec{x}\,\vec{y})$ kolmo promítají do soustavy homotetických elips o osách $\vec{x}, \vec{y}$.

Vrcholy všech elips soustavy (37,5) leží na obou hlavních parabolách v hlavních rovinách paraboloidu o rovnicích

$$y = 0, \quad x^2 - 2pz = 0, \qquad (37,6)$$

a

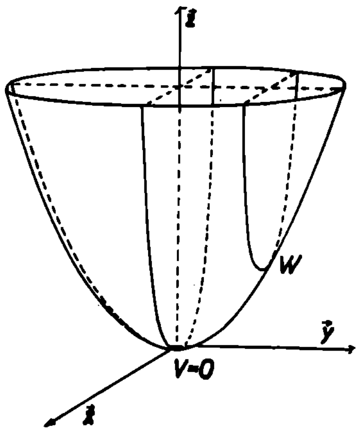
$$x = 0, \quad y^2 - 2qz = 0; \qquad (37,7)$$

obě tyto paraboly jsou též obrysy kolmých průmětů paraboloidu do hlavních rovin. Z uvedených vztahů je možno si učiniti představu o tvaru plochy (obr. 22). Kromě toho v odst. 36 uvedená věta o vytvoření paraboloidu translací hlavní paraboly platí i pro eliptický paraboloid a dokazuje se stejným způsobem.

Charakteristická rovnice plochy (37,1)

$$\varrho\left(\varrho - \frac{1}{p}\right)\left(\varrho - \frac{1}{q}\right) = 0 \qquad (37,8)$$

má kořeny 0, $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$. Je-li na př. $p < q$ je $\frac{1}{q}$ kořen střední



Obr. 22. Eliptický paraboloid s hlavními parabolami.

velikosti, takže jediná reálná singulární kuželosečka charakteristického svazku plochy (37,1) je

$$x_4 = 0, \quad \frac{x_1^2}{p} + \frac{x_2^2}{q} - \frac{1}{q}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0,$$

t. j.

$$x_1^2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{q}\,x_3^2 = 0. \qquad (37,9)$$

Proto obě roviny

$$x\sqrt{q-p} \pm z\sqrt{p} = 0 \tag{37,10}$$

jsou cyklické a určují svými směry dvě osnovy cyklických rovin paraboloidu. Místem středů kružnic jsou dva průměry paraboloidu v rovině $(\vec{x}\ \vec{z})$

$$y = 0, \quad x \pm \sqrt{p(q-p)} = 0. \tag{37,11}$$

Kruhové body plochy jsou obecně dva. Každý z nich leží na jednom z průměrů (37,11), takže jejich souřadnice jsou

$$\left(\mp \sqrt{p(q-p)};\quad 0;\quad \frac{q-p}{2}\right).$$

Polární resp. tečná rovina bodu $(x_0; y_0; z_0)$ má rovnici

$$\frac{xx_0}{p} + \frac{yy_0}{q} - z - z_0 = 0, \tag{37,12}$$

proto rovnice obou tečných rovin v kruhových bodech jsou

$$\mp x\sqrt{\frac{q-p}{p}} - z - \frac{q-p}{2} = 0. \tag{37,13}$$

Jen ty cyklické roviny protínají plochu v reálných kružnicích, které leží na téže straně tečné roviny (37,13) jako paraboloid. S rostoucí vzdáleností cyklické roviny od této roviny tečné roste i poloměr průsečné kružnice bez omezení.

Příklady k cvičení.

141. Je-li v rovnici (36,1) $p = q$, jsou obě řídicí roviny hyperbolického paraboloidu, t. zv. rovnostranného, navzájem kolmé. Dokažte, že po otočení souřadnicové soustavy kolem osy $\vec{z}$ o úhel $-45°$ rovnice (36,1) se transformuje v rovnici $x'y' - pz' = 0$!

142. Napište normální tvar rovnice hyperbolického paraboloidu, jehož řídicí roviny svírají úhel 60° a jehož hlavní parabola v rovině $(\vec{x}\ \vec{z})$ má parametr $p = 1$! [$x^2 - 3y^2 - 2z = 0$.]

143. Je dán hyperbolický paraboloid $x^2 - 3y^2 - 2z = 0$. Jak zní rovnice jeho a) tečné roviny v bodě $(1; 1; -1)$, b) polární roviny bodu $(1; 1; 1)$? [a) $x - 3y - z + 1 = 0$, b) $x - 3y - z - 1 = 0$.]

144. Určete kruhové body eliptického paraboloidu $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{6}y^2 - 2z = 0$ [$\pm\sqrt{5}; 0; \frac{1}{2}$].

145. Jak zní rovnice a) hyperbolického paraboloidu (36,1), b) eliptického paraboloidu (37,1) v souřadnicích rovinových? [Podle (23,3) $\frac{1}{q}\,\xi_1^2 \mp \frac{1}{p}\,\xi_2^2 - \frac{2}{pq}\,\xi_3\xi_4 = 0$.]