Jak se studují geometrické útvary v prostoru. II. část

IV. O plochách, zejména o plochách druhého stupně v souřadnicích čtyřstěnových

In: Jiří Klapka (author): Jak se studují geometrické útvary v prostoru. II. část. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 4–27.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403058

IV.

O PLOCHÁCH, ZEJMÉNA O PLOCHÁCH DRUHÉHO STUPNĚ V SOUŘADNICÍCH ČTYRSTĚNOVÝCH.

18. Pojem plochy. Nejjednodušší plocha je rovina. Jak víme, rovnice roviny je v lineárních souřadnicích (čtyrstěnových, rovnoběžkových) lineární. Při tom rovnicí roviny — nebo plochy vůbec — rozumíme podmínku, kterou splňují souřadnice jen těch bodů, které náležejí ploše.

Je-li tato podmínka algebraická rovnice n-tého stupně, pak též plocha se nazývá algebraická n-tého stupně.

V homogenních souřadnicích rovnice algebraické plochy je vždy homogenní; v nehomogenních souřadnicích tomu tak obecně není.

Příkladem je plocha druhého stupně, čili stručně kvadrika, jejíž rovnice v jakýchkoliv homogenních souřadnicích zní

$$\left.\begin{aligned} f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \\ + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + \\ + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (18,1)$$

V nehomogenních rovnoběžkových souřadnicích rovnice kvadriky má tvar

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \end{aligned}\right\} (18,2)$$

kde alespoň jeden z koeficientů a_{ik}, které předpokládáme vesměs reálné, nesmí býti roven nule.

Kromě ploch algebraických existují též plochy nealgebraické. V lineárních souřadnicích je rozpoznáme snadno: jejich rovnice není algebraická. Příkladem na takovou plochu je na př. přímá plocha šroubová o rovnici

$$x \operatorname{tg} \frac{z}{a} - y = 0.$$

Plocha však nemusí býti dána přímo rovnicí; může býti udána některá charakteristická vlastnost jejích bodů (na př. vzdálenost jejích bodů od jiného bodu je rovna konstantní délce a — plocha je kulová o poloměru a), takže plocha je definována jako geometrické místo bodů. K tomuto druhu určení plochy náleží též udání způsobu vytvoření plochy, na př. translací čili posouváním křivky nebo jejím otáčením (plochy translační a rotační) a pod. Je-li taková definice plochy úplná, je možno z ní usouditi, jaká je rovnice plochy.

K dané ploše přísluší nikoliv konečné množství rovnic. Nehledíme-li ani k tomu, že v každé souřadnicové soustavě rovnice plochy obecně je jiná, obdržíme z jedné její rovnice $f(x, y, z) = 0$ v určité souřadnicové soustavě každou jinou její rovnici v téže soustavě a při nezměněné poloze ve tvaru

$$\lambda \, . \, f(x, y, z) = 0,$$

kde λ je od nuly různý faktor.

Povšimněme si nyní rovnic některých druhů ploch.

1) Chybí-li v nehomogenní rovnici plochy některá proměnná, na př. z, obdržíme — omezíme-li se na rovinu $(\vec{x}\,\vec{y})$ — rovinnou čáru. Ke každému jejímu bodu, t. j. ke každé dvojici $(x; y)$ jeho souřadnic, můžeme připojiti všechny možné hodnoty z a všechny tak vzniklé trojice čísel $(x; y; z)$ jsou souřadnice bodů plochy, jež vyplňují přímku rovnoběžnou s osou $\vec{z}$. Plocha je tudíž válec, jehož tvořící přímky jsou rovnoběžny s osou $\vec{z}$. Obdobný význam má, chybí-li v rovnici plochy x nebo y.

Podobně nevyskytuje-li se v homogenní rovnici plochy jedna souřadnice, na př. x_i, plocha je kužel (při rovnoběžkových souřadnicích event. válec) jehož vrchol se ztotožňuje s vrcholem $\xi_i = 0$ souřadnicového čtyrstěnu.

Těchto kuželů event. válců často užíváme při zkoumání průmětů čar s vrcholu souř. čtyrstěnu do protější jeho stěny. Je-li čára dána na př. v nehomogenních souřadnicích jako průsečná čára dvou ploch o rovnicích $f(x, y, z) = 0$ a $f'(x, y, z) = 0$, obdržíme z nich vyloučením jedné souřadnice, na př. z, rovnici válce promítajícího čáru ve směru $\vec{z}$ a současně rovnici průmětu čáry v témž směru do roviny $(\vec{x}\ \vec{y})$.

Zvláštní pozornost věnujeme **plochám rotačním** již pro jejich praktický význam, snadnou představitelnost a nemalý počet jejich modelů, které se vyskytují v často užívaných předmětech denního života (povrch předmětů soustruhovaných, vázy, isolátory, pneumatiky atd.).

Rotační plochy vznikají otáčením rovinných (ovšem i prostorových čar — můžeme se však beze ztráty obecnosti omeziti na rovinné čáry — proč?) čar. Předpokládejme, že tato **vytvořující čára** čili **poledník**, nebo **meridián** plochy leží v rovině $(\vec{x}\ \vec{z})$ pravoúhlého kartézského trojhranu; osou rotační buď $\vec{z}$. Jsou-li $y = 0$, $F(x; z) = 0$ rovnice meridiánu, $(x_0; 0; z_0)$ bod téže čáry, takže

$$F(x_0, z_0) = 0, \tag{18,3}$$

vznikne jeho otáčením **kružnice** plochy (t. zv. **rovnoběžka**) o rovnicích

$$z = z_0, \quad x^2 + y^2 = x_0^2. \tag{18,4}$$

Vyloučením x_0 a z_0 z rovnic (18,3) a (18,4) vychází hledaná rovnice plochy rotační ve tvaru

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0, \tag{18,5}$$

z níž zpravidla ještě odstraňujeme odmocninu jejím isolováním a umocněním (což ovšem vždy není prakticky proveditelné).

Na př. otáčením kružnice

$$y = 0, \quad x^2 + z^2 - a^2 = 0$$

okolo osy $\vec{z}$ vznikne — jak známo — **kulová plocha**, jejíž rovnice podle (18,5) zní

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Otáčením středové kuželosečky o rovnicích

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{n} + \frac{z^2}{p} - 1 = 0, \tag{18,6}$$

vznikají **rotační středové kvadriky** (**elipsoidy, kul. plocha, hyperboloidy**) o rovnici

$$\frac{x^2 + y^2}{n} + \frac{z^2}{p} - 1 = 0. \tag{18,7}$$

Podobně otáčením paraboly

$$y = 0, \quad x^2 - 2pz = 0 \tag{18,8}$$

okolo osy $\vec{z}$ vznikne **rotační paraboloid** o rovnici

$$x^2 + y^2 - 2pz = 0. \tag{18,9}$$

Rovina nikoliv s osou $\vec{z}$ rovnoběžná

$$z + ax + by + c = 0 \tag{18,10}$$

protíná paraboloid v kuželosečce (elipse nebo kružnici), jejíž kolmý průmět do roviny $(\vec{x}\,\vec{y})$ obdržíme vyloučením souřadnice z z rovnic (18,9) a (18,10), čímž vychází

$$x^2 + y^2 + 2p(ax + by + c) = 0.$$

Odtud plyne známá věta:

Rovina nikoliv rovnoběžná s osou rotačního paraboloidu protíná jej (není-li to tečná rovina) v kuželosečce, jejíž kolmý průmět na rovinu kolmou k jeho ose je kružnice.

Jako poslední příklad na plochu rotační uvažme plochu vytvořenou rotací kružnice l v rovině $(\vec{x}\,\vec{z})$ a o rovnicích

$$y = 0, (x - m)^2 + z^2 - a^2 = 0 \tag{18,11}$$

$$m > a > 0,$$

otáčením okolo osy $\vec{z}$. Je to tak zv. **anuloid**, jehož rovnice podle (18,5) zní

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + m^2 - 2m\sqrt{x^2 + y^2} = 0,$$

a po odstranění odmocniny

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + m^2)^2 - 4m^2 (x^2 + y^2) = 0; \qquad (18,12)$$

je to tudíž **algebraická rotační plocha čtvrtého stupně** (podrobněji o anuloidu viz odst. 38).

Protože v jeho rovnici se vyskytují pouze sudé mocniny souřadnic, je anuloid plocha kolmo souměrná podle všech tří stěn souřadnicového trojhranu. Proto též počátek O je středem souměrnosti anuloidu.

Příklady k cvičení.

77. Jakou plochu vyjadřuje rovnice v pravoúhlých kartézských souřadnicích a) $x^2 + z^2 - 2x - 2z - 2 = 0$, b) $a^2x^2 + b^2y^2 - 2abxy = 0$, c) $x^2 - 2pz = 0$, d) $x_1^2 - 3x_1x_4 + 2x_4^2$? [a) Kruhový válec o ose $\parallel \vec{y}$. b) Rovinu procházející osou $\vec{z}$. c) Parabolický válec rovnoběžný s $\vec{y}$. d) Dvě roviny rovnoběžné s rovinou $(\vec{y}\,\vec{z})$].

78. Napište rovnici kužele o vrcholu v počátku a o řídicí křivce o rovnicích

$$z = m, \quad y^2 - 2px = 0! \quad [my^2 - 2pxz = 0.]$$

79. Napište rovnici kužele o vrcholu v bodě (1; 2; 3) a o řídicí křivce o rovnicích $z = 0$, $x^2 + y^2 - 25 = 0$! [$9x^2 + 9y^2 - 20z^2 - 6xz - 12yz + 150z - 225 = 0$.]

80. Jak se jeví na rovnici kvadriky, že plocha prochází a) všemi vrcholy souřadnicového čtyrstěnu, b) jednotkovým bodem? [a) $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0$, b) $a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + 2a_{12} + 2a_{13} + 2a_{14} + 2a_{23} + 2a_{24} + 2a_{34} = 0$.]

81. Jak zní rovnice rotačního válce resp. kužele vytvořeného rotací těchto přímek okolo osy $\vec{z}$: a) $y = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$, b) $y = 0$, $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$, c) $y = 0$, $x - a = 0$? [a), b) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, c) $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.]

82. Napište rovnici plochy vzniklé otáčením křivky o rovnicích $z = 0$, $xy - a^2 = 0$ okolo osy $\vec{x}$! [$x^2 (y^2 + z^2) - a^4 = 0$.]

83. Zkoumejte kuželosečku, ve které rovina $x + y + z = 0$ protíná kvadriku $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2yz - x - y - z + m = 0$! [Průměty do rovin $(\vec{x}\,\vec{y})$, $(\vec{x}\,\vec{z})$ a $(\vec{y}\,\vec{z})$ mají

rovnice: $4xy + 4y^2 + m = 0$, $4xz + 4z^2 + m = 0$, $4yz - m = 0$.]

84. Určete průsečíky kužele $x_1^2 + x_2^2 - x_4^2 = 0$ s přímkou o rovnicích a) $x_1 = 0$, $x_2 + x_3 + x_4 = 0$! b) $x_1 = 0$, $x_2 \pm x_4 = 0$! [a) body $(0; 1; -2; 1)$, $(0; 1; 0; -1)$, b) přímky leží na kuželi.]

19. Kvadriky singulární a nesingulární. Rovnici kvadriky (18,1) píšeme často stručněji ve tvaru

$$f(x, x) \equiv \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \qquad (19,1)$$

kde $a_{ik} = a_{ki}$ jsou čísla reálná (z čehož, jak později poznáme, neplyne, že kvadrika má reálné body). Zaveďme označení

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &\equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ f_2(x) &\equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ f_3(x) &\equiv a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \\ f_4(x) &\equiv a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4. \end{aligned}\right\} \qquad (19,2)$$

Determinant z koeficientů těchto čtyř lineárních forem

$$A \equiv |a_{ik}| \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad (19,3)$$

nazýváme diskriminantem rovnice kvadriky (19,1). Je to determinant souměrný, neboť jeho prvky, položené souměrně podle hlavní diagonály, jsou si navzájem rovny.

Platí identita

$$f(x, x) \equiv x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + x_3 f_3(x) + x_4 f_4(x). \qquad (19,4)$$

Každá rovina protíná kvadriku v kuželosečce. K důkazu stačí určiti řez kvadriky kteroukoliv stěnou souřadnicového čtyrstěnu, který má ke kvadrice polohu zcela obecnou. Tak na př. ve stěně $(0; 0; 0; 1)$ ležící kuželosečka kvadriky má rovnice

$$x_4 = 0, \ f^*(x, x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0. \qquad (19,5)$$

Rovnice kvadriky f obsahuje 10 různých koeficientů a_{ik}. K určení jejich poměrů stačí 9 nezávislých podmínek, na př. 9 bodů ležících na kvadrice, nebo plošná kuželosečka (která sama je určena 5 body jedné roviny) a 4 body.

Kvadrika se nazývá nesingulární, nebo singulární podle toho, je-li diskriminant

$$A \neq 0, \tag{19,6}$$

nebo

$$A = 0. \tag{19,7}$$

Jen v prvém případě čtyři mnohočleny (19,2) jsou lineárně nezávislé a čtyři rovnice $f_i(x) = 0$ nemají společné řešení (nehledě k triviálnímu řešení 0; 0; 0; 0). Čtyři roviny, definované těmito rovnicemi, nenáležejí témuž trsu rovin a tvoří v prostoru čtyrstěn.

V druhém případě — a jen tehdy — čtyři mnohočleny (19,2) jsou lineárně závislé a soustava čtyř rovnic $f_i(x) = 0$ má alespoň jedno nikoliv triviální řešení, t. j. čtyři roviny, rovnicemi této soustavy definované, mají alespoň jeden bod — označme jej y (y_1; y_2; y_3; y_4) — společný. Je tedy

$$f_i(y) = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

a — podle identity (19,4) —

$$f(y, y) \equiv y_1 f_1(y) + y_2 f_2(y) + y_3 f_3(y) + y_4 f_4(y) = 0,$$

t. j. bod y je bodem kvadriky. Nazýváme jej jejím **bodem singulárním**. Je vždy reálný, neboť jeho souřadnice, definované jako řešení soustavy lineárních rovnic o reálných koeficientech, mohou býti jen reálné.

Je tedy nesingulární kvadrika prosta singulárních bodů a naopak, alespoň jeden bod singulární kvadriky jest singulární.

Je-li tento singulární bod pouze jediný, kvadrika je kužel nebo válec druhého stupně s vrcholem v onom bodě.

Nutná a postačující podmínka pro to je, aby čtyři roviny $f_i = 0$ náležely jedinému trsu, nikoli však svazku rovin,

t. j. aby alespoň jeden minor třetího řádu diskriminantu A byl různý od nuly, t. j. aby A byl hodnosti 3.

Skutečně, za tohoto předpokladu rovnice kvadriky f se redukuje na rovnici kužele nebo válce; pro jednoduchost předpokládejme, že souřadnice singulárního bodu y jsou $(0; 0; 0; 1)$. Ze soustavy rovnic $f_i(y) = 0$ pak vychází

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0, \tag{19,8}$$

takže rovnice kvadriky neobsahuje x_4 a je to tudíž kužel druhého stupně s vrcholem $(0; 0; 0; 1)$, jak bylo dokázati.

Kvadrikami s více než jedním singulárním bodem se nebudeme zabývati. Lze totiž dokázati, že takové kvadriky jsou složeny z rovin, takže jejich studium lze převésti na studium dvojice rovin. Skutečně, je-li jeden ze singulárních bodů opět bod $(0; 0; 0; 1)$, druhý bod $(0; 0; 1; 0)$, platí kromě (19,8) ještě rovnice

$$a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$$

a rovnice kvadriky se redukuje na

$$f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0;$$

lze ji nahraditi dvěma lineárními rovnicemi

$$\alpha_2x_1 - \alpha_1x_2 = 0 \quad \text{a} \quad \beta_2x_1 - \beta_1x_2 = 0,$$

což jsou rovnice dvou rovin, jak bylo dokázati. Tyto roviny — stejně jako koeficienty α_1, α_2, β_1, β_2 — nemusí býti reálné.

Hodnost diskriminantu A je v tomto případě 2 nebo 1, což je současně počet různých rovin, z nichž je kvadrika složena.

20. Kvadrika a přímka. Zaveďme další označení

$$\left.\begin{aligned} f(y, z) \equiv\ & a_{11}y_1z_1 + a_{22}y_2z_2 + a_{33}y_3z_3 + a_{44}y_4z_4 + \\ & + a_{12}(y_1z_2 + y_2z_1) + a_{13}(y_1z_3 + y_3z_1) + a_{14}(y_1z_4 + y_4z_1) + \\ & + a_{23}(y_2z_3 + y_3z_2) + a_{24}(y_2z_4 + y_4z_2) + a_{34}(y_3z_4 + y_4z_3). \end{aligned}\right\} \tag{20,1}$$

Zřejmě jest

$$f(y, z) \equiv f(z, y). \tag{20,2}$$

Snadno se přesvědčíme, že platí další identity

$$f(y, z) \equiv \sum_i y_i f_i(z) \equiv \sum_i z_i f_i(y), \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (20,3)$$

Hledejme nyní společné body kvadriky f a přímky, určené body y, z.

Bod této přímky

$$x = \lambda_1 y + \lambda_2 z \quad (20,4)$$

náleží kvadrice f jen tehdy, když

$$f(\lambda_1 y + \lambda_2 z, \lambda_1 y + \lambda_2 z) = 0,$$

t. j. když

$$\lambda_1^2 f(y, y) + 2\lambda_1\lambda_2 f(y, z) + \lambda_2^2 f(z, z) = 0. \quad (20,5)$$

Poslední rovnice obecně má dvě různá řešení, jež označme $\lambda_1 : \lambda_2$ resp. $\lambda'_1 : \lambda'_2$. Obecně tedy přímka (yz) protíná kvadriku f ve dvou různých bodech x a x', z nichž jeden je dán výrazem (20,4) a druhý je $x' = \lambda'_1 y + \lambda'_2 z$.

Jsou-li udavatelé obou poměrů, vypočtených z (20,5), reálné různé, totožné nebo sdružené komplexní, jsou takové i průsečíky x, x'.

Je-li současně — a jen tehdy —

$$f(y, y) = f(y, z) = f(z, z) = 0, \quad (20,6)$$

pak každý bod na (yz) náleží kvadrice f a přímka (yz) je tvořící čili plošnou přímkou kvadriky.

Nejsou-li splněny všechny 3 rovnice (20,6), je-li však

$$f^2(y, z) - f(y, y) f(z, z) = 0, \quad (20,7)$$

body x a x' se ztotožňují. Přímka (yz) se nazývá tečnou kvadriky f, bod x jejím dotykovým bodem; je-li to singulární bod kvadriky, je přímka (yz) její tečnou v širším smyslu.

Tvořící přímky kvadriky počítáme k jejím tečnám.

21. Tečny kvadriky, které procházejí daným bodem.

a) Zkoumejme nejdříve množství tečen kvadriky, které procházejí jejím nesingulárním bodem y.

V důsledku rovnice $f(y, y) = 0$, vyjadřující, že y je bod kvadriky f, redukuje se rovnice (20,7) na

$$f(y, z) = 0. \qquad (21,1)$$

Jen tehdy, vyhovují-li souřadnice bodu z ($\{z\} \neq \{y\}$) rovnici (21,1), je přímka (yz) tečnou kvadriky f.

V této rovnici y_i jsou konstanty, z_i souřadnice běžné. Podle (20,3), ve tvaru uspořádaném podle z_i, je to rovnice lineární

$$z_1 f_1(y) + z_2 f_2(y) + z_3 f_3(y) + z_4 f_4(y) = 0; \qquad (21,2)$$

rovina, kterou rovnice (21,2) vyjadřuje, nazývá se **tečná rovina kvadriky f v jejím bodě y.** Označme ji η; bod y je její dotykový bod a její rovinové souřadnice jsou dány jednoznačně úměrou

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = f_1(y) : f_2(y) : f_3(y) : f_4(y). \qquad (21,3)$$

Má tedy kvadrika ve svém nesingulárním bodě y jedinou a určitou rovinu tečnou η. Je to rovina svazku tečen plochy o dotykovém bodě y.

Je-li y bod singulární, je $f_i(y) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) a rovnice (21,2) a tudíž i (21,1) je splněna pro kterýkoliv bod z v prostoru. Všechny přímky procházející bodem y, které nejsou přímkami plošnými, jsou tečny kvadriky v širším smyslu.

Máme-li na př. určiti tečnou rovinu kvadriky

$$f(x, x) \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1x_4 - 6x_2x_4 - x_4^2 = 0$$

v jejím bodě y (-2; 1; 3; 1), utvoříme nejdříve čtyřčleny

$$f_1(x) = x_1 + x_3 - 2x_4, \quad f_2(x) = x_2 + x_3 - 3x_4,$$
$$f_3(x) = x_1 + x_2, \quad f_4(x) = -2x_1 - 3x_2 - x_4$$

a

$$f_1(y) = -1, \quad f_2(y) = 1, \quad f_3(y) = -1, \quad f_4(y) = 0;$$

rovnice tečné roviny podle (21,2) zní

$$-z_1 + z_2 - z_3 = 0.$$

b) Nyní zkoumejme množství tečen kvadriky f, které procházejí bodem y, nenáležejícím kvadrice, takže $f(y, y) \neq 0$.

Přímka (yz) je tečnou kvadriky jen tehdy, splňují-li souřadnice bodu z rovnici (20,7), která je v nich homogenní a druhého stupně. Je tedy (20,7) s konstantními souřadnicemi y_i rovnicí kvadriky Q v běžných souřadnicích z_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Tvrdíme, že Q je kužel druhého stupně o vrcholu y, je-li f nesingulární.

Je-li f kužel, je Q složena ze dvou rovin, což pokládejme za známé.

Uvedené tvrzení dokážeme nejsnadněji, budeme-li předpokládati, že vrchol (0; 0; 0; 1) souřadnicového čtyrstěnu se ztotožňuje s bodem y.

Pak rovnice (20,7) kvadriky Q se redukuje podle (20,3) na

$$f_4^2(z) - a_{44}\, f(z, z) = 0. \tag{21,4}$$

Tato rovnice však neobsahuje z_4, je tedy Q kvadratický kužel o vrcholu y, což bylo dokázati.

Je-li z právě dotykový bod tečny (yz) kvadriky f, je též

$$f(z, z) = 0,$$

načež z (20,7) vychází

$$f(y, z) = 0; \tag{21,5}$$

to však je rovnice lineární v běžných souřadnicích z_i. Označíme-li rovinu o této rovnici opět η, platí věta:

Rovina η je buď tečná rovina plochy f v jejím nesingulárním bodě y nebo — nenáleží-li bod y kvadrice — rovina kuželosečky, podél které se kvadriky f dotýká kužel Q jejích tečen o vrcholu y.

Povšimněme si, že rovina η je vždy reálná, tedy i v těch případech, kdy její průsečná kuželosečka s f — a tedy i kužel Q — jsou imaginární. Kužel Q umožňuje zavedení pojmů „bod vně“ a „bod uvnitř“ kvadriky f. Je-li Q reálný kužel pravíme, že jeho vrchol leží vně kvadriky f, je-li Q imaginární, leží jeho vrchol uvnitř plochy f. Tyto definice neztrácejí smyslu je-li f kužel nebo válec, nahradíme-li v nich kužel tečen dvojicí rovin, vytvořených tečnami plochy f, které procházejí bodem y.

22. Polární rovina a čtyrstěn. Jak je patrno z (20,5), oba průsečíky x, x' přímky (yz) s kvadrikou f oddělují harmonicky dvojici bodů y, z jen tehdy, když

$$f(y, z) = 0, \tag{22,1}$$

t. j. když bod z leží v rovině η, příslušné k bodu y.

Pak body y, z nazýváme navzájem polárně sdruženými vzhledem ke kvadrice f.

Odtud vyplývá na tečném kuželi nezávislá definice roviny η, příslušné k bodu y.

Rovina η je místem bodů polárně sdružených s bodem y vzhledem ke kvadrice f. Nazýváme ji polární rovinou bodu y, který jest jejím pólem vzhledem k f.

Polární rovina nesingulárního bodu kvadriky (vzhledem k téže kvadrice) je jeho rovina tečná.

Rovinové souřadnice polární roviny η bodu y jsou dány úměrou (21,3). Je-li y singulárním bodem kvadriky, jeho rovina polární není definována.

Je-li kvadrika f nesingulární, je úměrou (21,3) definována oboustranně jednoznačná korespondence mezi body prostoru a jejich rovinami polárními; nazýváme ji polaritou nebo korrelací vzhledem ke kvadrice f, která je t. zv. základní kvadrikou polarity.

Z tvaru úměry (21,3) lze snadno usouditi, že přímé řadě bodové odpovídá rovinový svazek, tedy přímce přímka, trsu rovin bodové pole rovinné a obráceně. Útvary složené z bodů, přímek a rovin polaritou se transformují v útvary duální; podotkněme, že dvojpoměr čtyř prvků se při tom zachovává.

Transformuje-li se polaritou vzhledem k nesingul. kvadrice f útvar U v U' a U' znovu v U'', je $U'' \equiv U$, t. j. výsledek dvou po sobě následujících polárních transformací vzhledem k téže základní kvadrice je transformace identická, ponechávající prostor beze změny.

Rovina polární η prochází svým pólem y jen tehdy, je-li η tečná rovina a y její dotykový bod na základní kvadrice f.

Skutečně, z

$$S\eta y = 0$$

plyne podle (21,3)

$$f(y, y) = 0,$$

což bylo dokázati.

Spojnici p dvou bodů nesingulární základní kvadriky koresponduje průsečnice jejich tečných rovin jako t. zv. **sdružená polára** q. Obě přímky obecně jsou mimoběžny; mají-li společný bod y, je to nutně bod základní kvadriky, neboť všechny body jedné z obou polár jsou sdruženy se všemi body druhé a obráceně. Polární rovina η bodu y je tedy tečná rovina základní kvadriky v jejím bodě y a obsahuje jak p tak q, jež tvoří dvojici t. zv. **sdružených tečen plochy v jejím bodě** y. Je zřejmé, že tato dvojice tečen odděluje harmonicky dvojici obou tvořících přímek (reálných nebo sdruženě imaginárních), procházejících bodem y, ve kterých tečná rovina η protíná základní kvadriku. Je-li $p \equiv q$, náleží tato přímka základní ploše jako její přímka tvořící.

Je-li základní kvadrika singulární, nazývá se tak i polarita, která pak není korespondencí oboustranně jednoznačnou. Skutečně, je-li základní kvadrika na př. kužel, polární roviny všech bodů, ležících na přímce procházející vrcholem kužele, se ztotožňují v jediné rovině, c. b. d.

Čtyrstěn se nazývá **polárním čtyrstěnem** nesingulární kvadriky f, když každá jeho stěna je polární rovinou jeho protějšího vrcholu. Z toho plyne, že protější hrany polárního čtyrstěnu jsou sdružené poláry vzhledem k f.

Abychom v prostoru sestrojili polární čtyrstěn dané nesingulární kvadriky f, volme první jeho vrchol zcela libovolně v prostoru v bodě P_1, neležícím na f; jeho polární rovina π_1 obsahuje další tři vrcholy P_2, P_3, P_4, z nichž P_2 zvolme v ní libovolně, ovšem tak, aby neležel na f. Jeho polární rovina π_2 je další stěna čtyrstěnu, prochází bodem P_1 a protíná π_1 v hraně čtyrstěnu P_3P_4. Pouze jeden z obou těchto bodů, na př. P_3, můžeme na ní voliti libovolně, ovšem tak, aby nenáležel kvadrice f. Jeho polární rovina π_3 je další stěnou čtyrstěnu a protíná hranu P_3P_4 v bodě P_4, neboť, jak známo, obsahuje vrcholy $P_1P_2P_4$.

Tím jsou všechny vrcholy čtyrstěnu určeny.

Z konstrukce je zřejmé, že existuje nekonečné množství polárních čtyrstěnů dané nesingulární kvadriky.

Podotkněme ještě, že každé dvě stěny polárního čtyrstěnu kvadriky f mají tu vlastnost, že každá z nich prochází pólem druhé. Takové dvě roviny budeme nazývati **polárně sdružené** vzhledem k f.

Všechny zde uvedené pojmy mají své obdoby v rovinné polaritě vzhledem k nesingulární kuželosečce. Prochází-li totiž rovina ϱ bodem P a je-li p průsečnice polární roviny π bodu P s rovinou ϱ, pak P a p jsou pól a polára vzhledem k průsečné kuželosečce f^* roviny ϱ se základní kvadrikou f. Je-li $\varrho \equiv P_1P_2P_3$ stěna polárního čtyrstěnu $P_1P_2P_3P_4$ plochy f, je $P_1P_2P_3$ polární trojúhelník kuželosečky f^*.

Je-li souřadnicový čtyrstěn polárním čtyrstěnem kvadriky f, projevuje se to na její rovnici charakteristickým způsobem. Pólu (1; 0; 0; 0) patrně koresponduje polární rovina (1; 0; 0; 0) a t. p.; z úměry (21,3) v důsledku toho vychází

$$a_{ik} = 0,$$

kdykoliv $i \neq k$. Proto rovnice kvadriky f se redukuje na rovnici

$$f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0. \quad (22,2)$$

Z ní plyne

$$A = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}, \quad (22,3)$$

takže žádný z koeficientů rovnice (22,2) není roven nule, je-li f kvadrika nesingulární.

Proto, **je-li souřadnicový čtyrstěn polární, obsahuje rovnice nesingulární kvadriky pouze čtverce všech čtyř souřadnic.**

Je-li jeden z koeficientů rovnice (22,2) roven nule, kvadrika je kužel (nebo válec), jejíž vrchol se ztotožňuje s jedním z vrcholů čtyrstěnu. Zbývající tři jeho vrcholy tvoří polární trojúhelník kuželosečky, v níž jeho rovina plochu f protíná.

Je zřejmé, že kvadrika (22,2) je reálná jen tehdy, když koeficienty a_{ii} $(i = 1, 2, 3, 4)$ nemají vesměs stejná znaménka.

Příklady k cvičení.

85. Dána rovnice kvadriky f; rozhodněte, je-li kvadrika singulární, kužel nebo válec (v tom případě určete jeho sing. bod!), nebo je-li složena z rovin (v kterémž případě určete jejich rovnice!)

a) $64x_1^2 + 75x_2^2 + 96x_1x_3 + 36x_3^2 + 30x_2x_3 - 297x_4^2 = 0$. [$A =$ $= 4\,276\,800$, kvadrika nesingulární.]

b) $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz + 30x + 20y - 10z + 25 = 0$. [Všechny čtyři mnohočleny f_1, f_2, f_3, f_4 se navzájem liší pouhým konstantním faktorem. Proto hodnost diskriminantu A je 1 a kvadrika f je dvakrát počítaná rovina $3x + 2y - z + 5 = 0$.]

c) $9x^2 + 9y^2 - 20z^2 - 6xz - 12yz + 150z - 225 = 0$. [$A = 0$, soustava rovnic $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$ má společné jediné řešení $(1; 2; 3)$; jsou to současně souřadnice vrcholu kvadriky f, která je kužel o řídicí kružnici $z = 0$, $x^2 + y^2 - 25 = 0$.]

d) $3x^2 - 5y^2 - z^2 - 2xy - 2xz + 6yz + 22x - 42y + 10z -$ $- 16 = 0$. [A je hodnosti 2, kvadrika je složena ze dvou rovin, a to $x + y - z + 8 = 0$, $3x - 5y + z - 2 = 0$.]

e) $my^2 - 2pxz = 0$ [$A = 0$, rovnice $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$ mají jediné spol. řešení $(0; 0; 0)$. Plocha f je kužel o vrcholu v počátku. Rovina $z = m$ $(m \neq 0)$ jej protíná v parabole $y^2 - 2px = 0$.]

f) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4\sqrt{2}xy + 2yz + 6x + 2y\,(2\sqrt{2} - 1) -$ $- 6z - 9 = 0$ [$A = 0$, rovnice $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$ v homog. souřadnicích mají jediné spol. řešení $(-4; 3\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$; jsou to současně homog. souřadnice nevlastního sing. bodu kvadriky, která je válec o řídicí kuželosečce (kružnici) $y = 0$, $x^2 + z^2 +$ $+ 2x - 2z - 3 = 0$.]

86. Přesvědčte se, že diskriminant A kvadriky $(a_1x_1 + a_2x_2 +$ $+ a_3x_3 + a_4x_4) \,.\, (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4) = 0$ je hodnosti nejvýše 2!

87. Plocha (18,2) prochází počátkem jen když $a_{44} = 0$. Napište rovnici její tečné roviny v počátku! [$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z =$ $= 0$.]

88. Napište rovnici tečného kužele kvadriky (22,2) o vrcholu v bodě jednotkovém! [$a_{11}a_{22}\,(z_1 - z_2)^2 + a_{11}a_{33}\,(z_1 - z_3)^2 +$ $+ a_{11}a_{44}\,(z_1 - z_4)^2 + a_{22}a_{33}\,(z_2 - z_3)^2 + a_{22}a_{44}\,(z_2 - z_4)^2 +$ $+ a_{33}a_{44}\,(z_3 - z_4)^2 = 0$.]

89. Dokažte, že daný polární čtyrstěn kvadriky zastupuje 6 daných podmínek! [Z rovnice (22,2) nebo z jeho konstrukce!]

90. V co se transformuje Pascalův šestiúhelník nesingulární kuželosečky f^* polaritou o základní kuželosečce f^*? [V její Brianchonův šestiúhelník.]

23. Kvadrika v souřadnicích rovinových a přímkových.

Předpokládejme, že kvadrika f je nesingulární a že souřadnicový čtyrstěn je polární, takže rovnice kvadriky je (22,2).

Odvoďme její rovnici v souřadnicích rovinových, t. j. odvoďme nutnou a postačující podmínku pro to, aby rovina ξ $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$ byla tečnou rovinou plochy f.

Za učiněných předpokladů úměra (21,3) se redukuje na

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = a_{11}y_1 : a_{22}y_2 : a_{33}y_3 : a_{44}y_4$$

čili

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \frac{\eta_1}{a_{11}} : \frac{\eta_2}{a_{22}} : \frac{\eta_3}{a_{33}} : \frac{\eta_4}{a_{44}}. \qquad (23,1)$$

Rovina η je tečnou rovinou plochy jen tehdy, když

$$S\eta y = 0,$$

t. j. podle (23,1) když

$$\frac{\eta_1^2}{a_{11}} + \frac{\eta_2^2}{a_{22}} + \frac{\eta_3^2}{a_{33}} + \frac{\eta_4^2}{a_{44}} = 0.$$

Nazveme-li tečnou rovinu opět ξ, obdržíme hledanou rovnici kvadriky f v souřadnicích rovinových ve tvaru

$$F(\xi, \xi) \equiv a_{22}a_{33}a_{44}\xi_1^2 + a_{11}a_{33}a_{44}\xi_2^2 + a_{11}a_{22}a_{44}\xi_3^2 + a_{11}a_{22}a_{33}\xi_4^2 = 0. \qquad (23,2)$$

Podotkněme, že při obecné poloze souřadnicového čtyrstěnu rovnice kvadriky v souřadnicích rovinových je opět druhého stupně tvaru

$$F(\xi, \xi) \equiv \sum_{i,k} A_{ik}\xi_i\xi_k = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \qquad (23,3)$$

kde koeficienty A_{ik} mají vlastnost $A_{ki} = A_{ik}$ a alespoň jeden z nich je různý od nuly.

Jsou-li A_{ik} minory diskriminantu A, příslušné k prvkům a_{ik}, je (23,3) rovnicí kvadriky (19,1). Označíme-li k diskriminantu A obdobný diskriminant rovnice (23,3)

$$a = | A_{ik} |,$$

souvisejí oba diskriminanty rovnicí

$$a = A^3. \tag{23,4}$$

Vycházejíce z rovnice (22,2) nesingulární kvadriky f, odvoďme její rovnici v souřadnicích přímkových. Hledaná rovnice bude vyjadřovati nutnou a postačující podmínku pro to, aby přímka p (p_{12}; p_{13}; p_{14}; p_{34}; p_{42}; p_{23}) byla tečnou plochy f.

Kterýmkoliv bodem v prostoru procházející tečny kvadriky f vytvořují, jak známo, kvadratický kužel, který ve zvláštních případech může býti nahrazen dvojicí rovin různých anebo ztotožňujících se.

Množství přímek v prostoru o této vlastnosti se nazývá přímkový komplex druhého stupně.

Přímka p našeho komplexu buď určena body (17,7), t. j. kladme $p \equiv (yz)$, $y \equiv p_1$, $z \equiv p_2$. Podmínka, aby p byla tečnou kvadriky f vychází pak z (20,7) ve tvaru poněkud nesouměrném

$$(a_{33}p_{13}p_{23} + a_{44}p_{14}p_{24})^2 -$$
$$- (a_{22}p_{12}{}^2 + a_{33}p_{13}{}^2 + a_{44}p_{14}{}^2)(a_{11}p_{12}{}^2 + a_{33}p_{23}{}^2 + a_{44}p_{24}{}^2) = 0,$$

který však vlivem rovnice (17,4) se upravuje na tvar

$$\varphi(p, p) \equiv a_{11}a_{22}p_{12}{}^2 + a_{22}a_{33}p_{23}{}^2 + a_{44}a_{22}p_{42}{}^2 + a_{11}a_{33}p_{13}{}^2 +$$
$$+ a_{11}a_{44}p_{14}{}^2 + a_{33}a_{44}p_{34}{}^2 = 0. \tag{23,5}$$

Z (22,2), (23,2) a (23,5) je patrno, že jak v bodových, tak v rovinových i v přímkových homogenních souřadnicích rovnice kvadriky obsahuje pouze čtverce souřadnic, když (a jen tehdy) souřadnicový čtyrstěn je polární.

Mezi přímkami komplexu (23,5) jsou obsaženy též tvořící přímky kvadriky f, které vyhovují kromě (23,5) ještě dalším podmínkám, které určíme takto:

Polární roviny bodů p_1 a p_2 jsou roviny o souřadnicích $(0; a_{22}p_{12}; a_{33}p_{13}; a_{44}p_{14})$ resp. $(-a_{11}p_{12}; 0; a_{33}p_{23}; a_{44}p_{24})$; jejich průsečná přímka q je s p vzhledem k f sdružená polára q $(a_{33}a_{44}p_{34}; a_{44}a_{22}p_{42}; a_{22}a_{33}p_{23}; a_{11}a_{22}p_{12}; a_{11}a_{33}p_{13}; a_{11}a_{44}p_{14})$, kde v závorce je uvedena uspořádaná šestice bodových (nikoli osových!) souřadnic přímky q.

Jen tehdy, ztotožňují-li se přímky p, q, t. j. když

$$\{p\} = \{q\}, \tag{23,6}$$

je p tvořící přímkou kvadriky f. Z (23,6) plyne 5 rovnic mezi souřadnicemi p_{ik}; nejsou to však rovnice navzájem nezávislé a jest jim všem vyhověno tehdy, když rovnice

$$a_{11}a_{22}p_{12}^2 - a_{33}a_{44}p_{34}^2 = 0, \quad a_{22}a_{44}p_{42}^2 - a_{11}a_{33}p_{13}^2 = 0,$$
$$a_{11}a_{44}p_{14}^2 - a_{22}a_{33}p_{23}^2 = 0$$

jsou splněny tím způsobem, že jest

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{a_{11}a_{22}}p_{12} \mp \sqrt{a_{33}a_{44}}p_{34} = 0, \\ \sqrt{a_{22}a_{44}}p_{42} \mp \sqrt{a_{11}a_{33}}p_{13} = 0, \\ \sqrt{a_{11}a_{44}}p_{14} \mp \sqrt{a_{22}a_{33}}p_{23} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{23,7}$$

kde současně platí buď všechna horní, nebo všechna dolní znaménka.

Obě soustavy rovnic (23,7) určují dvě obecně různé soustavy přímek plochy f, jež nazýváme jejími reguly.

Je tedy regulus množství přímek společné třem lineárním komplexům (23,7); dva reguly náležející téže kvadrice nazývejme komplementární.

Je ovšem známo, že na ploše druhého stupně se nemusí vyskytovati žádné reálné přímky, jak tomu je na př. u koule, u rotačních elipsoidů nebo u paraboloidu.

Aby soustavy rovnic (23,7) měly (po eventuelním krácení číslem $+\sqrt{-1}$) koeficienty reálné, k tomu je nutno a stačí, aby diskriminant

$$A = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

byl kladný. Je-li $A < 0$, pak v (23,7) se vyskytují krácením neodstranitelné imaginární koeficienty.

V prvém případě nesingulární reálná kvadrika f má dva různé reguly reálných přímek, v druhém případě na f neexistuje žádná reálná přímka.

Podotkněme, že tento význam znaménka diskriminantu A je nezávislý na poloze souřadnicové soustavy k ploše (viz na př. Bydžovský, Úvod do anal. geometrie, str. 381); lze podle něho snadno rozhodnouti, je-li nesingulární reálná kvadrika, daná svou rovnicí, přímková, nebo nepřímková.

Z (23,7) snadno vyplývá věta:

Dvě přímky, z nichž každá náleží jinému z obou (navzájem komplementárních) regulů kvadriky, jsou incidentní, t. j. protínají se.

Skutečně, vyhovuje-li prvá z obou přímek, jež označme p, q, svými souřadnicemi soustavě rovnic (23,7) s horními znaménky, druhá téže soustavě s dolními znaménky, je i $p_{34}q_{12} + p_{12}q_{34} = 0$, $p_{42}q_{13} + p_{13}q_{42} = 0$, $p_{14}q_{23} + p_{23}q_{14} = 0$; sečtením těchto rovnic vychází $Spq = 0$, což bylo dokázati.

24. Jiné zjednodušení rovnice kvadriky. Předpokládejme nyní, že dva vrcholy V (0; 0; 0; 1) a S_3 (0; 0; 1; 0) souřadnicového čty stěnu leží na kvadrice f, která je nesingulární a reálná. Jeho stěny zvolme takto: stěna $x_3 = 0$ resp. $x_4 = 0$ buď tečná rovina kvadriky f v bodě V resp. v bodě S_3, stěny $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$, procházející hranou (VS_3), nechť tvoří dvojici rovin polárně sdružených vzhledem k ploše f.

Z této volby plyne, že hrana (VS_3) je sdruženou polárou s protější hranou souřadnicového čtyrstěnu a že pól roviny $x_1 = 0$ resp. $x_2 = 0$ je jeho protější vrchol (1; 0; 0; 0) resp. (0; 1; 0; 0). Hrany e_1 a e_2 o rovnicích $x_1 = x_4 = 0$ resp. $x_2 = x_4 = 0$ jsou dvě sdružené tečny plochy f v jejím bodě S_3, podobně hrany $x_1 = x_3 = 0$ a $x_2 = x_3 = 0$ jsou sdružené tečny v bodě V.

Při této volbě souřadnicového čtyrstěnu v rovnici (19,1) kvadriky f jest

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{14} = a_{24} = a_{33} = a_{44} = 0.$$

Tato rovnice se proto redukuje na

$$f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{34}x_3x_4 = 0, \qquad (24,1)$$

čili, jsou-li souřadnice rovnoběžkové, takže $x_4 = 0$ je nevlastní rovina, na tvar nehomogenní

$$f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0. \qquad (24,2)$$

Diskriminant rovnice kvadriky pak je

$$A = -a_{11}a_{22}a_{34}^2 \neq 0. \qquad (24,3)$$

Tečná rovina $x_4 = 0$ protíná plochu v singulární kuželosečce

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0,$$

která je složena ze dvou tvořících přímek t_1 a t_2, protínajících se v S_3, o rovnicích

$$x_4 = 0, \quad \sqrt{a_{11}}x_1 + \sqrt{-a_{22}}x_2 = 0, \qquad (24,4)$$

a

$$x_4 = 0, \quad \sqrt{a_{11}}x_1 - \sqrt{-a_{22}}x_2 = 0. \qquad (24,5)$$

Podle (24,3) jsou tyto přímky různé a — protože se liší jen ve znaménkách koeficientů při x_2 — skutečně oddělují harmonicky hrany e_1, e_2 souřadnicového čtyrstěnu, jež, jak víme, jsou sdružené tečny v S_3.

Tvořící přímky t_1, t_2 jsou reálné zřejmě jen tehdy, když $a_{11}a_{22} < 0$, t. j. podle (24,3) když $A > 0$, jak jsme zjistili již dříve.

Tečná rovina $x_3 = 0$ protíná kvadriku též v singulární kuželosečce, složené ze dvou přímek, procházejících bodem V, o rovnicích

$$\left.\begin{aligned} x_3 = 0, \quad \sqrt{a_{11}}\,x_1 + \sqrt{-a_{22}}\,x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \quad \sqrt{a_{11}}\,x_1 - \sqrt{-a_{22}}\,x_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (24,6)$$

Tyto přímky jsou různé, reálné nebo sdruženě imaginární za těchže podmínek jako přímky t_1, t_2. Odtud lze usouditi, že platí věta:

Procházejí-li jedním bodem P kvadriky dvě její přímky reálné, (sdruženě imaginární), je tomu tak ve všech bodech plochy.

Předpokládejme, že plocha je přímková, takže přímky t_1, t_2 jsou reálné. Jeden z obou regulů pak obdržíme jako místo přímek, ve kterých — k t_1 nehledě — kvadriku f protínají roviny, procházející přímkou t_1 a vytvářející svazek rovin o rovnici

$$\lambda_1 (\sqrt{a_{11}}\, x_1 + \sqrt{-a_{22}}\, x_2) - 2\lambda_2 x_4 = 0. \qquad (24,7)$$

V rovině (24,7) ležící a od t_1 různá tvořící přímka leží podle (24,1) též v rovině

$$\lambda_2 (\sqrt{a_{11}}\, x_1 - \sqrt{-a_{22}}\, x_2) + \lambda_1 a_{34} x_3 = 0. \qquad (24,8)$$

Mění-li se poměr $\lambda_1 : \lambda_2$ bez omezení, vytvořuje průsečná přímka rovin (24,7) a (24,8) jeden z obou regulů plochy f, k němuž t_1 nenáleží.

Obdobně svazek rovin o ose t_2

$$\mu_1 (\sqrt{a_{11}}\, x_1 - \sqrt{-a_{22}}\, x_2) - 2\mu_2 x_4 = 0 \qquad (24,9)$$

spolu se svazkem

$$\mu_2 (\sqrt{a_{11}}\, x_1 + \sqrt{-a_{22}}\, x_2) + \mu_1 a_{34} x_3 = 0 \qquad (24,10)$$

vytvořují druhý regulus plochy f.

Větu odst. *23* o incidenci přímek dvou komplementárních regulů můžeme nyní doplniti větou:

Dvě přímky jednoho regulu jsou mimoběžky.

Abychom ji dokázali, předpokládejme, že obě přímky náležejí na př. prvému z obou regulů; jedna nechť koresponduje poměru $\lambda_1 : \lambda_2$, druhá jinému poměru $\lambda'_1 : \lambda'_2$, takže

$$\lambda_1 \lambda'_2 - \lambda_2 \lambda'_1 \neq 0. \qquad (24,11)$$

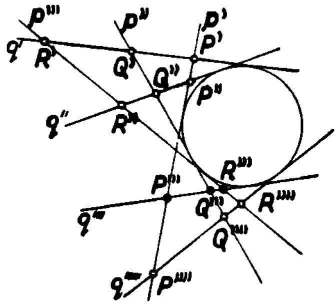
Nyní stačí ukázati, že 4 roviny, z nichž dvě mají rovnice (24,7) a (24,8) a zbývající dvě tytéž rovnice, v nichž pouze λ_1 bylo zaměněno za λ'_1, λ_2 za λ'_2, nenáležejí témuž trsu. Jen v opačném případě totiž obě uvažované přímky mají společný bod ve vrcholu trsu. Máme tedy, jak z algebry je známo, dokázati, že determinant z koeficientů rovnic všech čtyř rovin je různý od nuly. Tak tomu však podle (24,11) skutečně jest, neboť hodnota téhož determinantu jest

$$4\sqrt{A}\,(\lambda_1\lambda'_2 - \lambda_2\lambda'_1)^2,$$

čímž je uvedená věta dokázána.

Z obou vět o incidenci tvořících přímek nesingulární kvadriky lze vyvoditi několik důležitých důsledků.

Regulus je třemi svými navzájem mimoběžnými přímkami p', p'', p''' jednoznačně určen. Všechny jejich společné příčky — jichž je nekonečné množství — vytvořují regulus komplementární k danému; naopak, všechny přímky daného regulu protínají všechny přímky regulu komplementárního.



Obr. 15. Dvojpoměr čtveřice přímek q', q'', q''', q'''' regulu hyperboloidu.

Každým bodem P' přímky p' prochází jedna z přímek q' regulu komplementárního, určujíc s p' tečnou rovinu $\pi' \equiv (p'q')$ plochy f v bodě P'. Mění-li P' na p' svou polohu, vytvořuje π' svazek rovin o ose p'.

Přímky p'' a p''' protíná (obr. 15) rovina π' v těchže bodech jako tvořící přímka q'. Čtveřice rovin π', π'', π''', π'''', dotýkajících se plochy f v bodech P' resp. P'', P''', P'''' na přímce p', protíná přímky p'' a p''' v čtveřicích bodů Q',

Q'', Q''', Q'''', resp. R', R'', R''', R'''', jejichž dvojpoměry jsou podle známé věty (odst. 16) stejné. Avšak spojnice $(Q'R')$, $(Q''R'')$, $(Q'''R''')$, $(Q''''R'''')$ jsou tvořící přímky q', q'', q''', q'''' komplementárního regulu, takže platí věta:

Čtveřice přímek jednoho regulu protíná všechny přímky komplementárního regulu v bodových, čtveřicích stejného dvojpoměru δ. (Tento dvojpoměr jmenujeme dvojpoměr čtveřice přímek regulu.)

Přímky q', q'', q''', q'''' procházejí také čtveřicí bodů P' P'', P''', P'''' na p', jejíž dvojpoměr δ je tudíž roven dvojpoměru čtveřice rovin $\pi', \pi'', \pi''', \pi''''$. Tedy:

Dvojpoměr čtveřice rovin, dotýkajících se nesingulární kvadriky v bodech jedné tvořící přímky, je roven dvojpoměru čtveřice jejich bodů dotykových.

Připojme ještě stručnou úvahu o změně diskriminantu A při transformaci souřadnic (12,1). Nechť po provedení této transformace, t. j. po dosazení za x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ do rovnice kvadriky (19,1) vznikne nová rovnice téže kvadriky

$$f'(x', x') \equiv \sum_k a'_{ik} x'_i x'_k = 0, \qquad (24,12)$$

kde $i, k = 1, 2, 3, 4$, $a'_{ik} = a'_{ki}$, a jejíž diskriminant je $A' \equiv$ $\equiv | a'_{ik} |$. Protože koeficienty a'_{ik} nové rovnice kvadriky zřejmě jsou homogenní mnohočleny prvého stupně v a_{ik} a druhého stupně v c_{ik}, je i A' homogenní mnohočlen, a to stupně čtvrtého v a_{ik} a osmého v c_{ik}.

Z okolnosti, že rovnice $A = 0$ má význam nezávislý na souřadnicové soustavě (kvadrika je singulární), vyplývá, že současně s $A = 0$ je i $A' = 0$ a obráceně. Proto musí býti

$$A' = MA,$$

kde M je od nuly různý faktor za předpokladu, že takový je i determinant $C \equiv |c_{ik}|$ rovnic transformace (12,1).

Protože však A' i A jsou homogenní mnohočleny čtvrtého stupně v koeficientech a_{ik}, může M obsahovati pouze koeficienty c_{ik} transformace (12,1), takže je homogenním mnohočlenem stupně osmého v c_{ik}.

Přihlédneme-li ještě k tomu, že znaménko diskriminantu A též má význam nezávislý na poloze souřadnicové soustavy vzhledem ke kvadrice a že M se anuluje současně s determinantem transformace C (při $C = 0$ je totiž $f'(x', x')$ rovnice kvadriky singulární), můžeme usouditi, že platí vztah

$$A' = C^2 \,.\, A, \qquad (24,13)$$

který lze stvrditi dvojnásobným použitím věty o násobení determinantů*). Vyslovíme jej větou:

Při lineární transformaci souřadnic diskriminant rovnice kvadriky se násobí čtvercem determinantu transformace.

Příklady k cvičení.

91. Napište rovnice středových ploch rotačních (18,7) v souřadnicích rovinových i přímkových! [$n(\xi^2 + \eta^2) + p\zeta^2 - 1 = 0$, $pp_{12}^2 + n(p_{23}^2 + p_{13}^2) - pn(p_{42}^2 + p_{14}^2) - n^2p_{34}^2 = 0$.]

92. Napište rovnici kvadriky (24,1) v souřadnicích rovinových! $\left[\frac{\xi_1^2}{a_{11}} + \frac{\xi_2^2}{a_{22}} + 2\frac{\xi_3\xi_4}{a_{34}} = 0.\right]$

93. Jak zní rovnice kvadriky, která se dotýká všech čtyř stěn souřadnicového čtyrstěnu, v souřadnicích rovinových? [V (23,3) je $A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{44} = 0$.]

94. Daná přímka p kvadriky f svými souřadnicemi vzhledem k souřadnicovému čtyrstěnu, který je polární pro kvadriku f. Napište rovnici kvadriky! [$p_{34}p_{42}p_{23}x_1^2 + p_{34}p_{14}p_{13}x_2^2 + p_{14}p_{42}p_{12}x_3^2 + p_{12}p_{13}p_{23}x_4^2 = 0$; k odvození použijte soustavy rovnic (23,7).]

95. Jak zní rovnice přímkové nesing. kvadriky, jsou-li dvě její přímky jednoho regulu protějšími hranami souřadnicového čtyrstěnu a jiné dvě přímky komplementárního regulu též protějšími hranami téhož čtyrstěnu? [$a_{ik}x_ix_k + a_{lm}x_lx_m = 0$, kde i, k, l, m je jakákoliv permutace prvků 1, 2, 3, 4.]

96. Přímky protínající stěny čtyrstěnu v bodových čtveřicích daného dvojpoměru d, tvoří t. zv. tetraedrální komplex druhého stupně. Napište jeho rovnici předpokládajíce, že zmíněný čtyrstěn je souřadnicový. [Podle (17,8) hledaná rovnice je $p_{13}p_{24} - dp_{14}p_{23} = 0$.]

*) Viz na př. J. Vojtěch, Projektivní geometrie, str. 614 nebo Staude, Anal. Geometrie atd. str. 773.