Jak se studují útvary v prostoru? I. část

III. Útvary lineární. Rovina a přímka

In: Jiří Klapka (author): Jak se studují útvary v prostoru? I. část. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 37–79.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403022

III.

ÚTVARY LINEÁRNÍ. ROVINA A PŘÍMKA.

8. O rovnici roviny. Jak známo, každou rovinu lze určiti jedním jejím bodem a směrem její kolmice čili normály.

Buď tedy P' $(x'; y'; z')$ bod roviny ϱ s jeho pravoúhlými kartézskými souřadnicemi, $(l; m; n)$ směrové parametry její normály k. Je-li P $(x; y; z)$ jiný bod roviny ϱ, pak spojnice $\overline{PP'}$ je na k kolmá, což podle (7,3) vyjadřuje rovnice

$$l\,(x - x') + m\,(y - y') + n\,(z - z') = 0, \qquad (8,1)$$

neboť $(x - x';\ y - y';\ z - z')$ jsou [viz (6,1)] směrové parametry spojnice $\overline{PP'}$.

Rovnice (8,1) je nutná a postačující podmínka pro to, aby bod P ležel v rovině ϱ; nazýváme ji proto rovnicí roviny ϱ.

Uspořádáme-li (8,1) podle souřadnic x, y, z bodu P, čili podle běžných souřadnic, vychází rovnice

$$lx + my + nz + p = 0, \qquad (8,2)$$

kde ze směrových parametrů l, m, n je alespoň jeden různý od nuly a kde p je libovolná konstanta.

(8,2) je rovnice lineární čili prvého stupně; proto rovinu nazýváme algebraickou plochou prvého stupně.

Připomeneme-li ještě pro úplnost, že rovnice nevlastní roviny — ovšem v souřadnicích homogenních — je

$$x_4 = 0,$$

můžeme říci:

Rovnice kterékoliv roviny v homogenních (zatím kartézských pravoúhlých) souřadnicích je lineární rovnice tvaru

$$\varrho(x) \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \qquad (8,3)$$

kde alespoň jeden z koeficientů a_i je různý od nuly.

Při dané soustavě souřadnic přísluší každé rovnici (8,3) jediná rovina ϱ. Obráceně však každé rovině přísluší celé množství rovnic; je-li (8,3) jedna z nich, obdržíme z ní každou jinou násobením od nuly různým faktorem λ. Z množství těchto rovnic vytýkáme některé zvláštní volbou (normalisací) faktoru λ (tvar normální, tvar úsekový).

9. Normální tvar rovnice roviny. Na tento tvar je možno uvésti rovnici všech rovin vyjma roviny nevlastní, neboť rovnici (8,2) je nutno násobiti takovým faktorem λ, aby součet čtverců koeficientů při x, y, z v

$$\lambda lx + \lambda my + \lambda nz + \lambda p = 0 \tag{9,1}$$

byl roven $+1$. Odtud plyne $(\lambda l)^2 + (\lambda m)^2 + (\lambda n)^2 = 1$, a

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{9,2}$$

Je-li λ takto voleno, koeficienty při x, y, z v (9,1) nejsou pouhé směrové parametry, nýbrž směrové kosiny normály k roviny ϱ. Dvojí znaménko v (9,2) odpovídá dvojí možné orientaci této normály. Jsou-li α, β, γ její směrové odchylky, je tedy

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha = \pm \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos\beta = \pm \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \\ \cos\gamma = \pm \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{9,3}$$

Násobením rovnic (8,2), resp. (8,1) faktorem (9,2) vychází hledaný normální tvar rovnice roviny

$$\pm \frac{lx + ny + nz + p}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = 0 \tag{9,4}$$

resp.

$$(x - x')\cos\alpha + (y - y')\cos\beta + (z - z')\cos\gamma = 0. \tag{9,5}$$

Poslední rovnici uveďme na tvar

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d = 0, \tag{9,6}$$

kde

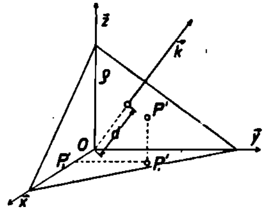
$$d = x' \cos \alpha + y' \cos \beta + z' \cos \gamma.$$

Lze ukázati, že d je vzdálenost počátku O od roviny ϱ.

Za tím účelem promítněme bod $P'(x'; y'; z')$ roviny ϱ kolmo (obr. 12) do souřadnicové roviny ζ do bodu P'_1, načež promítněme P'_1 kolmo do $\vec{x}$ do bodu P'_2. Pak kolmý průmět lomené čáry $OP'_2P'_1P'$ do (počátkem O procházející) normály k roviny ϱ je roven výrazu

$$x' \cos \alpha + y' \cos \beta + z' \cos \gamma;$$

na druhé straně je zřejmé, že tento průmět má celkovou délku d, což bylo dokázati.



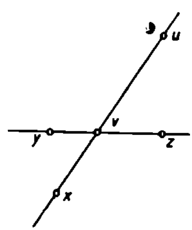
Obr. 12. Rovina a její normála počátkem.

Volbou znaménka faktoru λ lze dosáhnouti, aby v rovnici (9,6) číslo d bylo kladné (není-li ovšem nula, t. j. neprochází-li rovina ϱ počátkem O). Tím je odstraněna dvojznačnost normalisace a normální tvar (9,6) rovnice roviny je určen jednoznačně. Její geometrický význam je ten, že na normále k roviny ϱ byl za kladný zvolen smysl od O k ϱ.

10. Určení roviny třemi body. Úsekový tvar rovnice roviny. V souřadnicích rovnoběžkových homogenních buďtež dány tři body y, z, u neležící v přímce. Ke každému dalšímu bodu x jimi určené roviny ϱ lze dospěti takto (obr. 13):

Bod x spojen s u dává přímku, protínající (yz) v bodě v.

Je tedy v lineární kombinací bodů y a z tvaru $v = \lambda_1 y + \lambda_2 z$, ($\lambda_1$ a λ_2 nejsou současně nuly) a bod x lineární kombinací bodů u a v tvaru $x = \varkappa v + \mu_3 u$ ($\varkappa$ a μ_3 nejsou současně nuly); spojením obou symbolických rovnic vychází $x = \varkappa\lambda_1 y + \varkappa\lambda_2 z + \mu_3 u$. Klademe-li



Obr. 13. Lineární kombinace 3 bodů.

$\varkappa\lambda_1 = \mu_1$, $\varkappa\lambda_2 = \mu_2$, lze psáti

$$x = \mu_1 y + \mu_2 z + \mu_3 u, \tag{10,1}$$

při čemž — jak z učiněných předpokladů o číslech $\lambda_1, \lambda_2, \varkappa, \mu_3$ vyplývá — alespoň jedno z čísel μ_1, μ_2, μ_3 je různé od nuly.

Čísla uspořádané trojice $(\mu_1; \mu_2; \mu_3)$ se nazývají **homogenní trojúhelníkové souřadnice** bodu x **roviny** ϱ vzhledem k jejímu trojúhelníku yzu.

Jejich homogennost je patrná z okolnosti, že s bodem x (geometricky) totožný bod φx ($\varphi \neq 0$) má vzhledem k yzu souřadnice $(\varphi\mu_1; \varphi\mu_2; \varphi\mu_3)$, jak násobením rovnice (10,1) činitelem φ vychází. Přísluší tedy geometrickému bodu $\{x\}$ celé množství uspořádaných trojic homogenních trojúhelníkových souřadnic, jež označme opět $\{\mu_1; \mu_2; \mu_3\}$.

Vrcholům y, z, u souřadnicového trojúhelníka patrně náležejí množství $\{1; 0; 0\}$, resp. $\{0; 1; 0\}$, resp. $\{0; 0; 1\}$. Jsou-li tyto body v rovině ϱ dány a je-li x libovolný další bod roviny ϱ, není tím množství $\{\mu_1; \mu_2; \mu_3\}$ jeho trojúhelníkových souřadnic jednoznačně určeno! Skutečně, zaměníme-li v (10,1) trojici bodů y, z, u trojicí $\varphi_1 y, \varphi_2 z, \varphi_3 u$, kde $\varphi_1\varphi_2\varphi_3 \neq 0$, jsou vrcholy nového souřadnicového trojúhelníka geometricky totožné s vrcholy trojúhelníka původního. Trojúhelníkové souřadnice $(\mu_1; \mu_2; \mu_3)$ bodu x je však nutno zaměniti čísly

$$\left(\frac{\mu_1}{\varphi_1}; \frac{\mu_2}{\varphi_2}; \frac{\mu_3}{\varphi_3}\right). \tag{10,3}$$

Tato záměna je pouhou změnou faktoru homogenity trojúhelníkových souřadnic jen tehdy, když

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3; \tag{10,4}$$

jen tehdy skutečně je

$$\left\{\frac{\mu_1}{\varphi_1}; \frac{\mu_2}{\varphi_2}; \frac{\mu_3}{\varphi_3}\right\} = \{\mu_1; \mu_2; \mu_3\}.$$

Odtud vyplývá, že body v rovině ϱ a množství trojúhelníkových souřadnic $\{\mu_1; \mu_2; \mu_3\}$ jsou v korespondenci oboustranně jednoznačné tehdy, je-li dán v rovině ϱ kromě vrcholů y, z, u trojúhelníka souřadnic ještě bod $g \equiv y + z + u$, neležící na žádné z jeho stran. Protože jeho trojúhelníkové souřadnice jsou $\{1; 1; 1\}$, nazývá se **bodem jednotkovým.**

Skutečně, má-li jednotkový bod po záměně vrcholů y, z, u trojúhelníka body $\varphi_1 y, \varphi_2 z, \varphi_3 u$ zůstati jednotkovým, musí podle (10,3) býti

$$\left\{\frac{1}{\varphi_1}; \frac{1}{\varphi_2}; \frac{1}{\varphi_3}\right\} = \{1; 1; 1\},$$

což je podmínka rovnocenná s (10,4). Je tedy možno souřadnice bodů y, z, u násobiti pouze stejným, od nuly různým číslem, což má za následek, že trojúhelníkové souřadnice bodu x se tímto číslem dělí a jejich množství $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ zůstává nezměněno, c. b. d.

Rovnoběžkové homogenní souřadnice bodů roviny ζ, o kterých jsme uvažovali v odst. 1, zřejmě jsou zvláštním případem homogenních souřadnic trojúhelníkových. Vrcholy trojúhelníka souřadnic jsou zde nevlastní body os $\vec{x}$ a $\vec{y}$ a počátek O. Jednotkový bod se ztotožňuje s jednotkovým bodem $(1; 1)$ souřadnic nehomogenních.

Symbolická rovnice (10,1) je zkráceně napsaná soustava čtyř rovnic

$$x_i = \mu_1 y_i + \mu_2 z_i + \mu_3 u_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \qquad (10,5)$$

Pokládáme-li v ní μ_1, μ_2, μ_3 za neznámé, neexistuje při obecné vzájemné poloze bodů x, y, z, u žádné řešení této soustavy; existuje, jak je známo, jen tehdy, když

$$(x, y, z, u) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} = 0; \qquad (10,6)$$

což je nutná i postačující podmínka pro to, aby body x, y, z, u byly **lineárně závislé,** t. j. aby bylo možno vésti jimi rovinu. Je-li $(x, y, z, u) \neq 0$, body x, y, z, u jsou **lineárně nezávislé,** t. j. neleží v jedné rovině.

Rozvedeme-li determinant v rovnici (10,6) podle prvního řádku, obdržíme uspořádanou rovnici roviny určené body y, z, u. Je to lineární rovnice tvaru (8,3), takže i v obecných rovnoběžkových souřadnicích rovnice roviny je lineární.

Souřadnice, v kterých rovnice přímky v rovině, nebo roviny v prostoru je lineární, nazýváme též lineárními, bodovými souřadnicemi. Takovými jsou nejen rovnoběžkové souřadnice bodu v rovině nebo v prostoru, ale, jak snadno dokážeme, i trojúhelníkové souřadnice bodu v rovině. Skutečně, dosadíme-li za x_i podle (10,5) do (8,3), obdržíme tím rovnici obecně položené přímky v rovině (yzu) v trojúhelníkových souřadnicích μ_1, μ_2, μ_3. Tato rovnice zřejmě bude lineární, což bylo dokázati.

Dodejme, že v rovině trojúhelníkové souřadnice jsou nejobecnější souřadnice lineární.

Z rovnice roviny určené třemi body snadno odvodíme t. zv. úsekový tvar rovnice roviny, na který je možno upraviti rovnici kterékoliv roviny ϱ, která není nevlastní a neprochází počátkem soustavy rovnoběžkových souřadnic.

Za těchto předpokladů rovina ϱ protíná souřadnicové osy $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ v bodech $(p; 0; 0)$, $(0; q; 0)$, resp. $(0; 0; r)$, kde $pqr \neq 0$. Jimi je rovina ϱ jednoznačně určena a její rovnice podle (10,6) zní

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ p, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & q, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & r, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

t. j.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} - 1 = 0. \qquad (10,7)$$

Snadno bychom dospěli k tomuto úsekovému tvaru rovnice roviny též násobením rovnice roviny takovým faktorem λ, aby její prostý člen nabyl hodnoty -1.

Příklady k cvičení.

32. Napište rovnici roviny (v pravoúhl. kartézských souř.), která prochází bodem $(5; -6; 8)$ a stojí kolmo na přímku o parametrických rovnicích $x = 2 - t$, $y = 3 + 3t$, $z = -1 + 4t$! Určete průsečík dané přímky s onou rovinou! $[x - 3y - 4z + 9 = 0$, $t = \frac{3}{13}$, $(\frac{23}{13}; \frac{48}{13}; -\frac{1}{13})$.]

33. V týchž souřadnicích napište rovnici roviny souměrnosti úsečky $\overline{AB}$ $[A(-2; 5; 7)$, $B(6; -3; 1)]$! $[4x - 4y - 3z + 8 = 0.]$

34. Napište rovnice všech rovin, jejichž vzdálenost od počátku je 13 a jejichž odchylky od stěn kartézského pravoúhlého souřadnicového trojhranu jsou stejné! [8 rovin: $\pm x \pm y \pm z - 13\sqrt{3} = 0$.]

35. Jak zní úsekový tvar rovnice roviny, která je rovnoběžná s jednou nebo se dvěma osami souřadnic? [Souřadnice stejnojmenná s osou, která je s rovinou rovnoběžná, se v rovnici roviny nevyskytuje.]

36. Udejte rovnice přímek, v nichž rovina (3,3) protíná stěny souřadnicového trojhranu a rovinu nevlastní $[x_i = 0$, $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 - a_ix_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4]$.

37. Bodem $(-3; 0; 5)$ proložte rovinu, která protíná souřadnicovou rovinu ξ v přímce $2y - 6z + 9 = 0$! $[7x - 2y + 6z - 9 = 0.]$

38. Napište rovnici roviny, která obsahuje přímku o parametrických rovnicích (6,6) a je rovnoběžná se spojnicí bodů $(x_1; y_1; z_1)$ a $(x_2; y_2; z_2)$!
$$\left[\begin{vmatrix} x - x_0, & y - y_0, & z - z_0 \\ l, & m, & n \\ x_1 - x_2, & y_1 - y_2, & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0.\right]$$

39. Převeďte normální tvar rovnice roviny na úsekový a obráceně!

40. Určete průsečíky přímky P_1P_2 $[P_1(-1; 2; 6)$, $P_2(7; 8; 2)]$, s rovinou $2x - 3y + 4z - 5$! $[(\frac{35}{9}; \frac{17}{3}; \frac{32}{9})]$.

41. Udejte vzorec pro úhel rovin
$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0,$$
$$b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0!$$
$[\cos\omega = \pm (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) : \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}$.]

42. Určete úhel rovin $x - y + z - 2 = 0$, $2x - y + 3z - 6 = 0$. $[\cos\omega = \pm\sqrt{\frac{6}{7}}$.]

43. Bodem $(4; 5; -1)$ veďte rovinu rovnoběžnou s rovinou $14x - 2y + 9z - 11 = 0$! $[14x - 2y + 9z - 37 = 0.]$

44. Rovnici roviny dané body (1; 1; 0), (0; 2; 3), (3; 4; 0) uveďte na tvar a) úsekový, b) normální!

$$\left[\text{a) } \frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} + \frac{z}{\frac{3}{5}} - 1 = 0; \text{ b) } \frac{9x - 6y + 5z - 3}{\sqrt{142}} = 0.\right]$$

45. Určete rovinu procházející body (1; 2; 3) a (1; — 1; — 2) a stojící kolmo na rovinu $x - 2y + z - 5 = 0$! [$13x + 5y - 3z - 14 = 0$.]

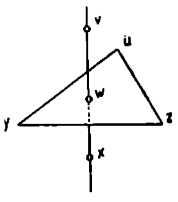
46. Jsou-li y, z, u vrcholy trojúhelníka souřadnic v rovině ϱ, $g = y + z + u$ bod jednotkový, $x = \mu_1 y + \mu_2 z + \mu_3 u$, pak $\mu_1 : \mu_2$ jest dvojpoměr čtveřiny paprsků $(uy)\,(uz)\,(ug)\,(ux)$. Dokažte a udejte obdobné významy poměrů $\mu_1 : \mu_3$ a $\mu_2 : \mu_3$! [Paprsky čtveřiny protínají stranu (yz) souř. trojúhelníka v čtveřici bodů $y, z, y + z, \mu_1 y + \mu_2 z$, jejíž dvojpoměr jest $\mu_1 : \mu_2$, c. b. d.]

11. Čtyrstěnové souřadnice bodu v prostoru. Rovnice roviny v rovnoběžkových souřadnicích je vždy lineární; přes to rovnoběžkové souřadnice nejsou nejobecnější lineární souřadnice. K těm dospějeme vycházejíce z této věty:

Jsou-li y, z, u, v čtyři body v prostoru, neležící v jedné rovině, pak každý další bod x je jejich lineární kombinací tvaru

$$x = \varkappa_1 y + \varkappa_2 z + \varkappa_3 u + \varkappa_4 v, \tag{11,1}$$

kde alespoň jedno z čísel $\varkappa_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ je různé od nuly.



Obr. 14 Lineární kombinace čtyř bodů v prostoru.

Čísla uspořádané čtveřice $(\varkappa_1; \varkappa_2; \varkappa_3; \varkappa_4)$ jsou homogenní čtyrstěnové souřadnice bodu x vzhledem k čtyrstěnu $yzuv$, který jmenujeme souřadnicový.

Na důkaz uvedené věty uvažme, že průsečík w spojnice (xv) s rovinou (yzu) je (obr. 14) podle odst. **10** lineární kombinace $w = \mu_1 y + \mu_2 z + \mu_3 u$, kde alespoň jedno z čísel μ_1, μ_2, μ_3 je různé od nuly. Bod x tedy leží na spojnici (wv) a je proto lineární kombinací $x = \varkappa w + \varkappa_4 v$, kde alespoň jedno z čísel $\varkappa, \varkappa_4$ je různé od nuly.

Klademe-li $\varkappa \mu_i = \varkappa_i$, $(i = 1, 2, 3)$, vychází spojením posledních dvou rovnic (11,1) a současně je patrna správnost celé dokazované věty.

Stejně jako v případě trojúhelníkových souřadnic bodu v rovině není vrcholy souřadnicového čtyrstěnu ještě definována oboustranně jednoznačná korespondence mezi body v prostoru a množstvími $\{\varkappa_1; \varkappa_2; \varkappa_3; \varkappa_4\}$ jeho homogenních čtyrstěnových souřadnice. I zde však postačí, je-li ještě dána poloha jednotkového bodu $g = y + z + u + v$, neležícího v žádné stěně čtyrstěnu. Jeho čtyrstěnové souřadnice tvoří množství čtyřčíslí $\{1; 1; 1; 1\}$.

Lineárnost čtyrstěnových souřadnic dokážeme takto:

Buď (8,3) rovnice libovolné roviny ϱ v týchž rovnoběžkových homogenních souřadnicích, jimiž jsou určeny vrcholy y, z, u, v čtyrstěnu. Její rovnici v souřadnicích čtyrstěnových obdržíme, dosadíme-li do (8,3) podle (11,1)

$$x_i = \varkappa_1 y_i + \varkappa_2 z_i + \varkappa_3 u_i + \varkappa_4 v_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \qquad (11,2)$$

čímž zřejmě vznikne rovnice lineární a homogenní v čtyrstěnových souřadnicích $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$, c. b. d.

V dalším, nebude-li výslovně uvedeno, že jde o souřadnice rovnoběžkové, budeme souřadnicemi bodu rozuměti souřadnice čtyrstěnové, které budeme označovati obvyklým způsobem, takže na př. $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ budou čtyrstěnové homogenní souřadnice bodu x, což stručně vyznačujeme symbolem $x\,(x_1; x_2; x_3; x_4)$ a t. p.

I v prostoru rovnoběžkové souřadnice jsou zvláštním případem souřadnic čtyrstěnových: vrcholy souř. čtyrstěnu jsou zde patrně nevlastní body os $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ a počátek O; bod jednotkový zde, jak víme, určuje měřítka na osách a teprve po jeho volbě souřadnicová soustava jest úplná.

12. Transformace souřadnic. V soustavě rovnic

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_{13}x'_3 + c_{14}x'_4, \\ x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_{23}x'_3 + c_{24}x'_4, \\ x_3 &= c_{31}x'_1 + c_{32}x'_2 + c_{33}x'_3 + c_{34}x'_4, \\ x_4 &= c_{41}x'_1 + c_{42}x'_2 + c_{43}x'_3 + c_{44}x'_4 \end{aligned}\right\} \qquad (12,1)$$

pokládejme $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ a $(x'_1; x'_2; x'_3; x'_4)$ za dvě čtyřčísli souřadnic téhož bodu vzhledem ke dvěma různým souřadnicovým čtyrstěnům. K tomu jsme skutečně oprávněni, neboť podle téže soustavy rovnic bod x (x_1; x_2; x_3; x_4), jehož souřadnice se vztahují na souřadnicový čtyrstěn (1; 0; 0; 0), (0; 1; 0; 0), (0; 0; 1; 0), (0; 0; 0; 1) je geometricky totožný s bodem x' (x'_1; x'_2; x'_3; x'_4), jehož souřadnice se vztahují na jiný čtyrstěn, a to (c_{11}; c_{21}; c_{31}; c_{41}), (c_{12}; c_{22}; c_{32} c_{42}), (c_{13}; c_{23}; c_{33}; c_{43}), (c_{14}; c_{24}; c_{34}; c_{44}). Pro jasnost výslovně uveďme, že poslední čtyři čtyřčíslí jsou souřadnice vrcholů druhého čtyrstěnu vzhledem k prvému čtyrstěnu. Odtud především vyplývá, že jen tehdy, když determinant

$$C = | c_{ik} | \neq 0, \tag{12,2}$$

druhý z obou čtyrstěnů je skutečný čtyrstěn, t. j. jeho vrcholy neleží v jedné rovině. Budeme v dalším stále předpokládati, že podmínka (12,2) je splněna.

Soustavou rovnic tvaru (12,1) lze transformovati souřadnice bodu vzhledem ke kterémukoliv souř. čtyrstěnu k bodu jednotkovému v souřadnice vzhledem ke kterékoliv jiné takové souřadnicové soustavě.

1. specialisace transformace (12,1) nastane, předpokládáme-li že obě souřadnicové soustavy jsou rovnoběžkové. Pro bod nevlastní je jak $x_4 = 0$ tak $x'_4 = 0$; z jedné z těchto rovnic musí pak vlivem rovnic (12,1) plynouti druhá. Tak tomu je, jen když

$$c_{41} = c_{42} = c_{43} = 0, \; c_{44} \neq 0. \tag{12,3}$$

Dělme pravé strany všech rovnic (12,1) koeficientem c_{44} — což znamená jen (geometricky bezvýznamnou) změnu faktoru úměrnosti homogenních souřadnic x_i bodu x — a současně položme

$$\frac{c_{ik}}{c_{44}} = d_{ik}, \; x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = 1,$$
$$x'_1 = x', x'_2 = y', x'_3 = z', x'_4 = 1.$$

Obdržíme tak soustavu rovnic

$$\left.\begin{aligned} x &= d_{11}x' + d_{12}y' + d_{13}z' + d_{14}, \\ y &= d_{21}x' + d_{22}y' + d_{23}z' + d_{24}, \\ z &= d_{31}x' + d_{32}y' + d_{33}z' + d_{34}, \\ 1 &= d_{44}. \end{aligned}\right\} \tag{12,4}$$

Z (12,2) vyplývá

$$\delta = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{12,5}$$

Určeme nyní geometrický význam koeficientů d_{ik} rovnic (12,4). Především počátek druhé soustavy ($x' = y' = z' = 0$) má podle (12,4) souřadnice (d_{14}; d_{24}; d_{34}). Položme $d_{14} = x_0$, $d_{24} = y_0$, $d_{34} = z_0$.

Hrana $\overrightarrow{x'}$ druhého souřadnicového trojhranu ($y' = z' = 0$) má v prvém trojhranu podle (12,4) parametrické rovnice

$$x = x_0 + d_{11}x',\ y = y_0 + d_{21}x',\ z = z_0 + d_{31}x', \tag{12,6}$$

kde x' je proměnný parametr. Jsou tedy koeficienty d_{11}, d_{21}, d_{31} směrové parametry osy $\overrightarrow{x'}$ vzhledem k souř. trojhranu $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$. Podobně d_{12}, d_{22}, d_{32} jsou směrové parametry osy $\overrightarrow{y'}$ a d_{13}, d_{23}, d_{33} směr. parametry osy $\overrightarrow{z'}$.

Kromě toho součty $\sum\limits_k d_{ik}$ ($i = 1, 2, 3,\ k = 1, 2, 3, 4$) jsou souřadnice jednotkového bodu druhé soustavy ($x' = y' = z' = 1$) vzhledem k prvé soustavě.

2. specialisace. Předpokládejme, že počátky obou soustav se ztotožňují. To nastane jen tehdy, když v (12,4) je $d_{14} = d_{24} = d_{34} = 0$.

3. specialisace záleží v předpokladu, že oba trojhrany jsou pravoúhlé, kartézské, shodné a tedy stejně orientované, takže je lze ztotožniti pootočením jednoho kolem společného počátku.

Pro větší přehlednost sestavme směrové kosiny os v tabulku

	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
$\vec{x}'$	$\cos\alpha_1$	$\cos\beta_1$	$\cos\gamma_1$
$\vec{y}'$	$\cos\alpha_2$	$\cos\beta_2$	$\cos\gamma_2$
$\vec{z}'$	$\cos\alpha_3$	$\cos\beta_3$	$\cos\gamma_3$

(12,7)

Parametrické rovnice osy $\vec{x}'$ jsou podle (6,5)

$$x = x' \cos\alpha_1, \quad y = x' \cos\beta_1, \quad z = x' \cos\gamma_1,$$

což, srovnáno s (12,6), dává

$$d_{11} = \cos\alpha_1, \quad d_{21} = \cos\beta_1, \quad d_{31} = \cos\gamma_1.$$

Obdobně vychází

$$\left.\begin{aligned} d_{12} &= \cos\alpha_2, \quad d_{22} = \cos\beta_2, \quad d_{32} = \cos\gamma_2, \\ d_{13} &= \cos\alpha_3, \quad d_{23} = \cos\beta_3, \quad d_{33} = \cos\gamma_3. \end{aligned}\right\} \qquad (12,8)$$

Směrové kosiny kterékoliv osy vyhovují rovnici (4,3), obě trojice směrových kosinů dvou os téhož trojhranu splňují podmínku kolmosti (7,2). Napíšeme-li tyto rovnice nejdříve pro směrové kosiny os $\vec{x}'$, $\vec{y}'$, $\vec{z}'$ v soustavě $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, po druhé pro směrové kosiny os $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ vzhledem k souř. soustavě $\vec{x}'$, $\vec{y}'$, $\vec{z}'$, obdržíme dvě skupiny po šesti rovnicích

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=3} d^2_{ik} - 1 = 0, \quad (k = 1, 2, 3), \\ &\sum_{i=1}^{i=3} d_{ik}\, d_{il} = 0, \quad (k \neq l;\; k, l = 1, 2, 3), \end{aligned}\right. \qquad (12,9)$$

a

$$\sum_{k=1}^{k=3} d_{ik}^2 - 1 = 0, \; (i = 1, 2, 3),$$
$$\sum_{k=1}^{k=3} d_{ik}\, d_{lk} = 0, \; (i \neq l;\; i, l = 1, 2, 3). \qquad (12,10)$$

Obě skupiny rovnic jsou závislé do té míry, že rovnice (12,10) jsou důsledkem rovnic (12,9) a obráceně.

Protože na př. osa $\overrightarrow{x'}$ je kolmá na $\overrightarrow{y'}$ i $\overrightarrow{z'}$, vychází podle (7,4)

$$d_{11} : d_{21} : d_{31} = \begin{Vmatrix} d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{Vmatrix}$$

t. j.

$$\left.\begin{aligned} d_{11} = \varepsilon\,(d_{22}d_{33} - d_{23}d_{32}),\; d_{21} = \varepsilon\,(d_{32}d_{13} - d_{12}d_{33}), \\ d_{31} = \varepsilon\,(d_{12}d_{23} - d_{13}d_{22}), \end{aligned}\right\} . \qquad (12,11)$$

kde ε je činitel úměrnosti. Za učiněných předpokladů je $\varepsilon = +1$.

Především dokažme, že $\varepsilon^2 = +1$. Za tím účelem napišme t. zv. identitu Lagrangeovu

$$(d_{22}d_{33} - d_{23}d_{32})^2 + (d_{32}d_{13} - d_{12}d_{33})^2 + (d_{12}d_{23} - d_{13}d_{22})^2 =$$
$$= (d_{12}^2 + d_{22}^2 + d_{32}^2)\,(d_{13}^2 + d_{23}^2 + d_{33}^2) -$$
$$- (d_{12}d_{13} + d_{22}d_{23} + d_{32}d_{33})^2,$$

kterou lze snadno ověřiti provedením naznačeného násobení a umocňování.

Její pravá strana má podle (12,9) hodnotu 1; umocněním a sečtením rovnic (12,11) vychází rovnice, jejíž levá strana podle (12,9) je též $+1$. Srovnáním obou výsledků skutečně vychází $\varepsilon^2 = +1$.

Zbývá tedy rozhodnouti o znaménku ε. Uvážíme-li, že v rovnicích transformace (12,4) je jako zvláštní obsažen případ, kdy obě soustavy se ztotožňují ($x = x'$, $y = y'$, $z = z'$) takže $d_{11} = d_{22} = d_{33} = 1$, ostatní d_{ik} rovnají se nule, pak pro tyto zvláštní hodnoty koeficientů již první z rovnic (12,11) dává $\varepsilon = +1$, c. b. d.

Z týchž rovnic — a z rovnic k nim analogických — je patrno, že každý prvek determinantu δ (viz 12,5) je roven svému minoru. Rozvádíme-li δ podle jeho prvního řádku, berouce ohled na tuto jeho vlastnost, vychází

$$\delta = d_{11}^2 + d_{12}^2 + d_{13}^2,$$

t. j. podle (12,10)

$$\delta = 1.$$

Na konec si všimněme další specialisace rovnic (12,4) předpokládajíce, že trojhran $\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'$ vzniká z trojhranu $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ rovnoběžným posunutím. Pak je $\vec{x}' \parallel \vec{x}$ a směrové parametry d_{21} a d_{31} v (12,6) jsou nuly. Připojíme-li obdobnou úvahu o osách $\vec{y}'$ a $\vec{z}'$, nalezneme šest rovnic

$$d_{21} = d_{31} = d_{12} = d_{32} = d_{13} = d_{23} = 0.$$

Kromě nich ještě rovnice $d_{11} = d_{22} = d_{33} = 1$ vyjadřují, že oba trojhrany jsou shodné.

Rovnice této jednoduché transformace souřadnicové soustavy tedy jsou

$$x = x' + x_0,\ y = y' + y_0,\ z = z' + z_0. \qquad (12,12)$$

Transformace (12,4), jejíž koeficienty splňují soustavu rovnic (12,9) a tudíž i (12,10), se nazývá **ortogonální** a vyjadřuje přemístění soustavy pohybem, je-li $\delta = +1$. Každý pohyb lze složiti z paralelního posunutí (translace), po němž následuje pootočení (rotace), nebo z nejdříve provedeného pootočení doplněného posunutím.

Je-li transformace ortogonální, vyplývá z (12,4) a z (12,9) nebo (12,10)

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \qquad (12,13)$$

což je vztah pro ortogonální transformace charakteristický.

13. Souřadnice roviny. Dualita. Vzhledem k soustavě souřadnic má rovina ξ o rovnici

$$S\xi x \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \qquad (13,1)$$

polohu jednoznačně určenu poměry koeficientů

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4, \tag{13,2}$$

z nichž, jak známo, alespoň jeden je od nuly různý. Obráceně každé rovině přísluší v této soustavě tyto poměry jednoznačně. Uspořádané čtyřčíslí $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$ můžeme tudíž prohlásiti za čtveřinu homogenních souřadnic roviny ξ vzhledem k uvažované soustavě souřadnic. Význam symbolů $\{\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4\}$ a $\{\xi\}$ buď obdobný k významu symbolů $\{x_1; x_2; x_3; x_4\}$ a $\{x\}$.

Zatím podáme geometrický význam poměrů (13,2) předpokládajíce, že souřadnice jsou rovnoběžkové a že rovina ξ neprochází počátkem O, takže $\xi_4 \neq 0$. Pak můžeme za nehomogenní souřadnice roviny ξ pokládati čísla

$$\xi = \frac{\xi_1}{\xi_4}, \quad \eta = \frac{\xi_2}{\xi_4}, \quad \zeta = \frac{\xi_3}{\xi_4}; \tag{13,3}$$

při současném zavedení běžných nehomogenních souřadnic bodových do rovnice (13,1), nabývá táž rovnice tvaru

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0. \tag{13,4}$$

Porovnáme-li jej s úsekovým tvarem (10,7) rovnice roviny, vychází

$$\xi = -\frac{1}{p}, \quad \eta = -\frac{1}{q}, \quad \zeta = -\frac{1}{r}.$$

Jsou tedy nehomogenní rovnoběžkové souřadnice roviny ξ, η, ζ záporně vzaté délky úseků, které rovina ξ utíná na osách souřadnic $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ a které jsou měřeny od počátku O na měřítkách těchto os.

$\xi = \eta = \zeta = 0$ jsou nehomogenní rovnoběžkové souřadnice roviny nevlastní.

Nyní je možno rovnici (13,1) dáti dvojí výklad:

Je-li ξ pevná rovina, jsou poměry (13,2) konstantní a (13,1) je rovnice roviny ξ.

Je-li x pevný bod, jsou poměry $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ konstantní, kdežto (13,2) jsou poměry proměnné, stejně jako rovina ξ, kterou může býti kterákoliv rovina procházející bodem x. Skutečně, (13,1) je nutná i postačující podmínka pro to, aby rovina ξ procházela bodem x. Proto říkáme, že (13,1) je rovnicí bodu x v souřadnicích rovinových nebo rovnicí trsu rovin o vrcholu x.

Tato dvojí interpretace rovnice (13,1) je proto tak jednoduchá, že rovnice (13,1) je *souměrná* vzhledem k řadám proměnných x_i a ξ_i, t. j. po záměně všech ξ_i za x_i a obráceně tato rovnice se nezmění.

Také její význam lze vyjádřiti způsobem, který nevytýká ani bod ani rovinu jako základní prvek prostoru, a to větou:

Rovnice $S\xi x = 0$ je nutná i postačující podmínka pro to, aby bod x a rovina ξ byly incidentní.

Proto ji v dalším budeme nazývati *podmínkou incidence bodu a roviny.*

Také soustava základních vět (*axiomů*), na nichž je vybudována ona část geometrie, která pojednává o incidenci bodů, přímek a rovin v prostoru (*geometrie polohy*), projevuje jistou souměrnost. Snadno lze zjistiti, že v této soustavě axiomů existuje ke každému z nich jiný, t. zv. *duální axiom*, který z původního obdržíme zcela mechanicky záměnou všech pojmů t. zv. *duálními pojmy*. Příkladem takové dvojice duálních axiomů jsou výroky:

Existuje jediná přímka procházející dvěma různými body.	Existuje jediná přímka ležící ve dvou různých rovinách.

Je zřejmé, že z jednoho z obou výroků obdržíme druhý, „přeložíme-li“ jej podle jakéhosi „slovníku“, v kterém si navzájem korespondují pojmy:

bod	rovina
přímka	přímka
přímka procházející bodem	přímka ležící v rovině

K nim připojme další dvojice korespondujících pojmů:

dvojpoměr čtyř bodů ležících na přímce	dvojpoměr čtyř rovin procházejících přímkou
řada bodů na přímce	svazek rovin procházejících přímkou
množství všech bodů v rovině (t. zv. pole bodové)	trs rovinový (množství všech rovin jdoucích bodem)
množství všech přímek v rovině (t. zv. pole přímkové)	trs přímkový (množství všech přímek bodem)
společný bod tří rovin	rovina tří bodů
útvary incidentní útvary neincidentní různoběžky mimoběžky	útvary incidentní útvary neincidentní různoběžky mimoběžky

atd.

Náš slovník je použitelný v obou směrech. „Přeložíme-li" podle něho některou větu dvakrát za sebou, obdržíme větu, z které jsme vyšli. Některé pojmy, na př. přímka nebo incidence, jsou k sobě duální (autoduální). Tak je tomu s celou přímkovou geometrií polohy, která je založena na incidenci přímek.

Z duálnosti axiomů geometrie polohy vyplývá i duálnost jejích vět (pouček, teorémů), které jsou, jak známo, všechny odvozeny z axiomů. Je tedy duálnost jedním z řídících principů, ovládajících celou soustavu geometrie polohy; proto se často nazývá principem duality.

Též v rovinné geometrii polohy existuje princip duality; pojmu bod zde však koresponduje pojem přímka a obráceně.

14. Vzdálenost bodu od roviny. Nejkratší vzdálenost a osa dvou mimoběžek.

Dokážeme větu:

Vzdálenost bodu P_0 o pravoúhlých kartézských souřadnicích $(x_0; y_0; z_0)$ od roviny ϱ o normální rovnici (9,6) je

$$d - x_0 \cos\alpha - y_0 \cos\beta - z_0 \cos\gamma, \qquad (14,1)$$

t. j. záporně vzatá levá strana normální rovnice roviny ϱ, do níž byly dosazeny za souřadnice běžné souřadnice bodu P_0.

Je-li P_0 počátek O, t. j. když $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, je správnost věty zřejmá, neboť podle odstavce 9 číslo $d \geqq 0$ je vzdálenost počátku O od roviny ϱ.

Výraz (14,1) rozděluje body prostoru, neležící v ϱ, na dvě množství: pro body jednoho množství je kladný, pro druhé záporný. K prvému množství zřejmě náleží počátek O (neprochází-li jím ϱ), a — jak snadno lze ověřiti — všechny body ležící na téže straně od ϱ jako počátek O. K druhému množství náležejí všechny body na opačné straně roviny ϱ.

Normální rovnice roviny σ, která je rovnoběžná s ϱ a prochází bodem P_0, je

$$\varepsilon (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) - d_1 = 0, \qquad (14,2)$$

kde $d_1 > 0$ a $\varepsilon = -1$ nebo $\varepsilon = +1$ podle toho, leží-li počátek O v části prostoru mezi rovinami ϱ a σ nebo mimo tuto část. V prvém případě totiž s počátku O na σ spuštěná kolmice k_1 je opačného smyslu než kolmice k na rovinu ϱ, takže směrové kosiny obou kolmic se liší znaménky. V druhém případě obě kolmice se shodují nejen ve směrech, ale i ve smyslech a tudíž i v směrových kosinech.

Bod P_0 leží v σ, proto jeho souřadnice vyhovují rovnici (14,2), takže jest

$$\varepsilon (x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma) - d_1 = 0. \qquad (14,3)$$

Vzdálenost roviny σ od ϱ lze složiti ze vzdáleností počátku O od těchto rovin a vyjádřiti ji výrazem

$$d - \varepsilon d_1;$$

dosadíme-li sem za d_1 podle (14,3), obdržíme (14,1), c. b. d.

Dodatkem k právě dokázané větě poznamenejme, že znaménko vzdálenosti bodu od roviny je kladné nebo záporné podle toho, leží-li daný bod na téže straně roviny ϱ jako počátek nebo na straně opačné.

Máme-li na př. určiti vzdálenost bodu P_0 (1; 1; 1) od roviny $\varrho \equiv 3x - 4y - 12z - 39 = 0$, musíme nejdříve rovnici roviny ϱ uvésti na tvar normální. Za tím účelem je nutno ji násobiti faktorem

$$\lambda = + \frac{1}{\sqrt{169}} = \frac{1}{13}.$$

Po tomto násobení záporně vzatá levá strana normální rovnice roviny ϱ je

$$-\frac{3x - 4y - 12z - 39}{13};$$

dosadíme-li do ní $x = y = z = 1$, vychází, že hledaná vzdálenost je $+ 4$, takže bod P_0 leží na téže straně roviny ϱ jako počátek.

Na výpočet vzdálenosti bodu od roviny lze též převésti úkol, vypočísti t. zv. nejkratší vzdálenost dvou navzájem mimoběžných přímek $\vec{p}$ resp. $\vec{q}$, jež předpokládejme dány parametrickými rovnicemi v pravoúhlých kartézských souřadnicích [srovnej s (6,5)], a to

$$x = x_1 + d_1 \cos \alpha_1, \;\; y = y_1 + d_1 \cos \beta_1, \;\; z = z_1 + d_1 \cos \gamma_1$$

resp.

$$x = x_2 + d_2 \cos \alpha_2, \;\; y = y_2 + d_2 \cos \beta_2, \;\; z = z_2 + d_2 \cos \gamma_2.$$

Přímka p patrně prochází bodem P_1 (x_1; y_1; z_1), a její směrové kosiny jsou $\cos \alpha_1$, $\cos \beta_1$, $\cos \gamma_1$. Podobně přímka q prochází bodem P_2 (x_2; y_2; z_2) a její směrové kosiny jsou $\cos \alpha_2$, $\cos \beta_2$, $\cos \gamma_2$.

Připomeňme, že nejkratší vzdálenost d obou mimoběžek se měří na jejich společné kolmici k, která obě protíná. Je-li její průsečík s $\vec{p}$ bod U, s $\vec{q}$ bod V, je $d = \overline{UV}$ hledaná nejkratší vzdálenost.

Abychom ji určili, uvažme rovinu ϱ, která prochází počátkem O soustavy souřadnic a je rovnoběžná s $\vec{p}$ i s $\vec{q}$. Pak kolmice k — nazývá se též osa obou mimoběžek — je normálou roviny ϱ (srovnej s odst. 8); protože je kolmá k $\vec{p}$ i k $\vec{q}$, splňují její směrové kosiny podle (7,4) úměru

$$\cos \alpha_3 : \cos \beta_3 : \cos \gamma_3 = \begin{Vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \end{Vmatrix}$$

a rovnici roviny ϱ lze psáti ve tvaru

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Není to ovšem normální rovnice roviny ϱ. Tu nalezneme snadno násobením předchozí rovnice faktorem $\dfrac{1}{\sqrt{H}}$, kde

$$H = (\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1\cos\beta_2)^2 + (\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \\ - \cos\alpha_1\cos\gamma_2)^2 + (\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2)^2.$$

Je však podle identity Lagrangeovy (odst. 12)

$$H = (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1)(\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2) - \\ - (\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2)^2.$$

Nazveme-li ω úhel přímek $\vec{p}$ a $\vec{q}$ je pak podle (4,3) a (7,1)

$$H = 1 - \cos^2\omega = \sin^2\omega$$

a normální rovnice roviny ϱ zní

$$\varrho(x, y, z) \equiv \frac{1}{\sin\omega}\begin{vmatrix} x & y & z \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

K určení nejkratší vzdálenosti d postačí nyní vypočísti vzdálenost libovolného bodu přímky $\vec{q}$ od ϱ — na př. bodu $P_2(x_2; y_2; z_2)$ — a odečísti od ní vzdálenost libovolného bodu přímky $\vec{p}$ od ϱ — na př. bodu $P_1(x_1; y_1; z_1)$. Je tedy

$$d = \varrho(x_1, y_1, z_1) - \varrho(x_2, y_2, z_2) = \varrho(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$

t. j.

$$d = \frac{1}{\sin\omega}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix}. \qquad (14,4)$$

K určení polohy osy k mimoběžek $\vec{p}$ a $\vec{q}$ v prostoru postačí udati rovnice rovin ε a φ, z nichž prvá prochází osou k a mimoběžkou $\vec{p}$, druhá osou k a mimoběžkou $\vec{q}$.

Rovnice roviny ε má tvar

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

kde koeficienty A, B, C vyhovují dvěma rovnicím

$$A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1 = 0$$

a

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix} = 0,$$

které vyjadřují, že normála roviny ε svírá pravé úhly s přímkami $\overrightarrow{p}$ i k. Z obou těchto rovnic vychází $A : B : C =$

$$= \begin{Vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1, \\ \cos\beta_1\cos\gamma_2 - & \cos\gamma_1\cos\alpha_2 - & \cos\alpha_1\cos\beta_2 - \\ -\cos\gamma_1\cos\beta_2, & -\cos\alpha_1\cos\gamma_2, & -\cos\beta_1\cos\alpha_2 \end{Vmatrix},$$

čili

$$A : B : C = (\cos\omega\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) : (\cos\omega\cos\beta_1 - \cos\beta_2) : (\cos\omega\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2).$$

Rovnice roviny ε proto zní

$$\varepsilon(x, y, z) \equiv [(x - x_1)\cos\alpha_1 + (y - y_1)\cos\beta_1 + (z - z_1)\cos\gamma_1] \,.\, \cos\omega - [(x - x_1)\cos\alpha_2 + (y - y_1)\cos\beta_2 + (z - z_1)\cos\gamma_2] = 0; \tag{14,5}$$

Výměnou indexů 1, 2 vychází z ní rovnice roviny φ

$$\varphi(x, y, z) \equiv [(x - x_2)\cos\alpha_2 + (y - y_2)\cos\beta_2 + (z - z_2)\cos\gamma_2] \,.\, \cos\omega - [(x - x_2)\cos\alpha_1 + (y - y_2)\cos\beta_1 + (z - z_2)\cos\gamma_1] = 0. \tag{14,6}$$

Souřadnice bodu U lze pak vypočísti jako souřadnice průsečíku přímky $\overrightarrow{p}$ s rovinou φ; obdobně V je průsečík přímky $\overrightarrow{q}$ s rovinou ε.

Je tedy možno nejkratší vzdálenost d určiti ze souřadnic bodů U, V přímo.

Nechť na př. dané body jsou $P_1(1; 3; 2)$, $P_2(1; -1; 2)$ a trojice směrových kosinů přímky $\overrightarrow{p}$, resp. $\overrightarrow{q}$ nechť je

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos\beta_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad \text{resp.}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos\beta_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Pak jest

$$\cos\omega = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = \tfrac{5}{6},$$

a odtud $\sin\omega = \frac{1}{6}\sqrt{11}$. Ze vzorce (14,4) pak vychází $d = \frac{4}{11}\sqrt{11}$

Rovnice rovin ε, φ podle (14,5) jsou

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y, z) &\equiv x - 7y - 4z + 28 = 0, \\ \varphi(x, y, z) &\equiv x + 4y + 7z - 11 = 0. \end{aligned}$$

Abychom určili souřadnice bodu U, vložme do rovnice roviny φ

$$x = 1 + \frac{d_1}{\sqrt{6}}, \quad y = 3 - \frac{d_1}{\sqrt{6}}, \quad z = 2 + \frac{2d_1}{\sqrt{6}},$$

což jsou parametrické rovnice přímky $\vec{p}$. Vypočteme tak $d_1 = -\frac{16\sqrt{6}}{11}$ a $U\left(-\frac{5}{11}; \frac{49}{11}; -\frac{10}{11}\right)$. Obdobným počtem nalezneme souřadnice bodu $V\left(-\frac{17}{11}; \frac{45}{11}; -\frac{6}{11}\right)$. Ze souřadnic obou bodů vychází

$$d^2 = \frac{176}{11^2} = \frac{16}{11}, \quad \text{t. j.} \quad d = \frac{4}{11}\sqrt{11},$$

jak též dříve bylo nalezeno.

15. Obsah trojúhelníka a objem čtyrstěnu. V pravoúhlé kartézské souřadnicové soustavě buďtež dány tři body $P_i(x_i; y_i; z_i)$, $(i = 1, 2, 3)$, svými souřadnicemi. Jejich kolmé průměty do roviny ζ tvoří trojúhelník o vrcholech $P'_i(x_i; y_i; 0)$, jehož obsah je

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \tfrac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right] = \\ &= \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Podobně průmět téhož trojúhelníka do roviny ξ, resp. η má obsah

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{resp.} \quad \Delta_2 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Jsou-li $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ směrové kosiny normály roviny $P_1P_2P_3$, ať již jakkoliv orientované, liší se od nich kosiny odchylek téže roviny od souřadnicových rovin ξ, η, ζ nanejvýše znaménky. Je totiž známo, že odchylka dvou rovin a odchylka jejich kolmic jsou dva úhly buď shodné nebo výplňkové.

Proto, značí-li Δ plošný obsah trojúhelníka $P_1P_2P_3$, je

$$|\Delta_1| = |\Delta\cos\alpha|,\quad |\Delta_2| = |\Delta\cos\beta|,\quad |\Delta_3| = |\Delta\cos\gamma|,$$

neboť plošný obsah kolmého průmětu rovinného obrazce je roven ploše onoho obrazce násobené kosinem odchylky jeho roviny od průmětny.

Umocníme-li poslední tři rovnice dvěma, vychází s ohledem na (4,3) po jejich sečtení

$$\Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2, \tag{15,1}$$

t. j.

$$\Delta = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}, \tag{15,2}$$

čímž je hledaný obsah určen až na znaménko.

Je však nutno určiti jednoznačně toto znaménko ve shodě s úmluvami, které jsme dříve učinili, alespoň pro takové trojúhelníky, jejichž rovina neprochází počátkem. Z těchto úmluv vyplývá, že znaménko obsahu Δ je totéž jako znaménko výrazu

$$K = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Podotkněme, že jest $K = 0$ jen tehdy, když body O, P_1, P_2, P_3 leží v jedné rovině; pak znaménko obsahu Δ můžeme voliti libovolně, aniž by tím vznikl spor.

Zbývají případy $K > 0$ a $K < 0$. Prvý z nich nastává jen tehdy, když trojhran $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ má orientaci shodnou s orientací soustavy souřadnic, druhý jen tehdy, jsou-li orientace obou trojhranů různé.

Vypočtěme ještě vzdálenost v počátku O od roviny trojúhelníka $(P_1P_2P_3)$! Tato rovina má podle (10,6) rovnici

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

po rozvedení determinantu podle prvního řádku vychází rovnice

$$2(\Delta_1 x + \Delta_2 y + \Delta_3 z) - K = 0. \qquad (15,3)$$

K jejímu převedení na tvar normální je nutno ji násobiti faktorem

$$\lambda = \pm \frac{1}{2\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} = \pm \frac{1}{2\,|\Delta|},$$

a to se znaménkem shodným se znaménkem výrazu K; rozumějme v dalším též pod Δ plošný obsah trojúhelníka $P_1P_2P_3$ s takto zvoleným znaménkem. Pak jest

$$v = \frac{K}{2\Delta} \qquad (15,4)$$

kladné číslo, což souhlasí s úmluvou odstavce 9, podle které v normálním tvaru rovnice roviny prostý člen je záporný (není-li nula).

Z vypočteného Δ a v můžeme dále snadno vypočísti objem V čtyrstěnu $OP_1P_2P_3$. Podle známé stereometrické poučky je

$$V = \tfrac{1}{3}\Delta \,.\, v,$$

t. j. podle (15,4)

$$V = \tfrac{1}{6}K$$

čili

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (15,5)$$

Je tedy determinant z devíti souřadnic bodů $P_1P_2P_3$ roven šestinásobku objemu čtyrstěnu $OP_1P_2P_3$. Znaménko tohoto determinantu je kladné či záporné podle toho, má-li trojhran $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ se souřadným trojhranem $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ orientaci souhlasnou nebo nesouhlasnou.

Objem V čtyrstěnu $P_0P_1P_2P_3$ [kde $P_0(x_0; y_0; z_0)$ je libovolný další bod] je dán výrazem

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}. \qquad (15,6)$$

Dokážeme to takto: Posuneme-li soustavu souřadnic rovnoběžně tak, aby počátek nové soustavy padl do P_0, jsou podle (12,12) nové souřadnice vrcholů čtyrstěnu vyjádřeny symbolem

$$P_i\,(x_i - x_0;\ y_i - y_0;\ z_i - z_0),\quad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (15,7)$$

Nyní je možno použíti k výpočtu objemu čtyrstěnu výrazu (15,15), kam ovšem za souřadnice vrcholů $P_1P_2P_3$ jest dosaditi podle (15,7), což bylo dokázati.

I z (15,6) objem čtyrstěnu vychází s určitým znaménkem, není-li $V = 0$ (což nastává jen tehdy, když body $P_0P_1P_2P_3$ leží v jedné rovině). Význam tohoto znaménka je patrný z věty:

Objem (15,6) čtyrstěnu $P_0P_1P_2P_3$ jest kladný nebo záporný podle toho, má-li trojhran $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}$ s trojhranem souřadnic $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ orientaci souhlasnou nebo nesouhlasnou.

Jsou-li vrcholy trojúhelníka dány souřadnicemi $P_1\,(1; 2; -3)$, $P_2\,(-3; -1; 2)$, $P_3\,(-2; -3; 1)$ je $K = 18$, $\Delta_1 = \frac{13}{2}$, $\Delta_2 = \frac{1}{2}$, $\Delta_3 = \frac{11}{2}$, $\Delta = -\frac{1}{2}\sqrt{291}$ a trojhran $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ má opačnou orientaci než trojhran $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Je-li dán čtvrtý bod $P_0\,(2; 3; 4)$, je objem čtyrstěnu $P_0P_1P_2P_3$

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1-2, & 2-3, & -3-4 \\ -3-2, & -1-3, & 2-4 \\ -2-2, & -3-3, & 1-4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1, & -1, & -7 \\ -5, & -4, & -2 \\ -4. & -6, & -3 \end{vmatrix} = -\frac{91}{6} = -15\tfrac{1}{6}$$

a trojhran $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}$ má opačnou orientaci než trojhran souřadnic.

16. Duální rovinové útvary. V čtyrstěnových homogenních souřadnicích buďtež $\eta\,(\eta_1; \eta_2; \eta_3; \eta_4)$ a $\zeta\,(\zeta_1; \zeta_2; \zeta_3; \zeta_4)$ dvě různé roviny, takže $\{\eta\} \neq \{\zeta\}$. Množství rovin, které procházejí společnou přímkou $r = (\eta\zeta)$ obou rovin se nazývá svazek rovin o ose r.

Rovina $\xi\,(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$ je rovinou svazku o ose r tehdy, když je lineární kombinací kterýchkoliv dvou jeho rovin, na př. η, ζ

$$\xi = \lambda_1\eta + \lambda_2\zeta, \tag{16,1}$$

kde λ_1 a λ_2 jsou dvě konstanty nikoliv současně rovné nule.

Skutečně, je-li x kterýkoliv bod osy r, pak jsou splněny obě podmínky incidence

$$S\eta x = S\zeta x = 0,$$

vyjadřující, že bod x leží v obou rovinách η a ζ.

Je podle (16,1)

$$S\xi x = S\,(\lambda_1\eta + \lambda_2\zeta)\,x = \lambda_1 S\eta x + \lambda_2 S\zeta x = 0,$$

odkud je patrno, že rovina ξ prochází každým bodem přímky r, čili že náleží svazku.

Obráceně, náleží-li ξ svazku o ose r, pak matice

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \end{Vmatrix} \tag{16,2}$$

je hodnosti *2*, což má za následek platnost symbol. rovnice (16,1).

Předpokládejme, že $\xi' = \lambda'_1\eta + \lambda'_2\zeta$ je čtvrtá rovina, různá od ξ, takže $\lambda_1\lambda'_2 - \lambda'_2\lambda_2 \neq 0$, pak výraz

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} : \frac{\lambda'_2}{\lambda'_1} = \frac{\lambda'_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda'_2} \tag{16,3}$$

opět nazýváme d v o j p o m ě r e m č t v e ř i c e r o v i n $(\eta\zeta\xi\xi')$.

Platí věta:

V š e c h n y p ř í m k y, n e p r o t í n a j í c í o s u s v a z k u r o v i n, p r o t í n a j í č t y ř i j e h o r o v i n y v č t v e ř i c í c h b o d ů, j e j i c h ž d v o j p o m ě r y j s o u s t e j n é a r o v n y d v o j p o m ě r u o n é č t v e ř i c e r o v i n.

Body každé z těchto čtveřic béřeme v témž pořádku jako roviny, v kterých leží.

Skutečně, je-li kterákoliv z uvedených přímek určena svými průsečíky y a z s rovinami η a ζ, takže $S\eta y = S\zeta z = 0$, $S\eta z \neq 0$, $S\zeta y \neq 0$, určíme průsečík $\mu_1 y + \mu_2 z$ přímky (yz) s rovinou ξ z rovnice

$$S\xi\,(\mu_1 y + \mu_2 z) = 0,$$

t. j. protože

$$\begin{aligned} S\xi\,(\mu_1 y + \mu_2 z) &= S\,(\lambda_1 \eta + \lambda_2 \zeta)\,(\mu_1 y + \mu_2 z) = \\ &= \lambda_1\mu_1 S\eta y + \lambda_1\mu_2 S\eta z + \lambda_2\mu_1 S\zeta y + \lambda_2\mu_2 S\zeta z = \\ &= \lambda_1\mu_2 S\eta z + \lambda_2\mu_1 S\zeta y, \end{aligned}$$

z rovnice

$$\lambda_1\mu_2 S\eta z + \lambda_2\mu_1 S\zeta y = 0. \qquad (16,4)$$

Podobně průsečík $\mu'_1 y + \mu'_2 z$ přímky (yz) s ξ' určíme řešením rovnice

$$\lambda'_1\mu'_2 S\eta z + \lambda'_2\mu'_1 S\zeta y = 0.$$

Z ní a z (16,4) vyplývá

$$\begin{vmatrix} \lambda_1\mu_2 & \lambda_2\mu_1 \\ \lambda'_1\mu'_2 & \lambda'_2\mu'_1 \end{vmatrix} = 0,$$

čili

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} : \frac{\mu'_2}{\mu'_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} : \frac{\lambda'_2}{\lambda'_1},$$

což bylo dokázati.

Protneme-li svazek rovinou, která neprochází jeho osou r, obdržíme paprskový svazek, pro který z věty právě dokázané plyne:

Přímky, které nenáležejí paprskovému svazku, ale leží v jeho rovině, protínají čtyři jeho paprsky v bodových čtveřicích téhož dvojpoměru. Nazýváme jej též dvojpoměrem oné čtveřice paprsků (srovnej s příkl. 22, 23 a 24).

Buď nyní m $(m_1; m_2; m_3; m_4)$ bod se svými čtyrstěnovými souřadnicemi. Geometrický význam poměrů těchto souřadnic vyjadřuje věta:

Poměr $m_i : m_k$ $(i \neq k)$ čtyrstěnových souřadnic bodu m je roven dvojpoměru těchto čtyř rovin svazku o ose v hraně $x_i = x_k = 0$ souřadnicového čtyrstěnu: 1. Souřadnicové roviny $x_i = 0$; 2. souř. roviny $x_k = 0$; 3. roviny svazku, která obsahuje bod m; 4. roviny svazku, obsahující jednotkový bod g.

Buď na př. $i = 2$, $k = 3$. Pak prvé dvě z uvedených rovin jsou η (0; 1; 0; 0) a ζ (0; 0; 1; 0). Další dvě jsou prvých dvou lineární kombinace

$$m_3\eta - m_2\zeta, \; \eta - \zeta.$$

takže dvojpoměr uvažované čtveřiny rovin jest

$$\frac{-m_2}{m_3} : \frac{-1}{1} = \frac{m_2}{m_3},$$

což bylo dokázati (srovnej s příkl. 46).

Jsou-li η, ζ, φ tři roviny nenáležející jednomu svazku, pak jejich lineární kombinace

$$\xi = \lambda_1\eta + \lambda_2\zeta + \lambda_3\varphi, \tag{16,5}$$

kde alespoň jeden z koeficientů $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ je různý od nuly, je čtvrtá rovina trsu, který má vrchol ve společném bodě rovin η, ζ, φ. Obráceně, každou rovinu téhož trsu lze vyjádřiti jako lineární kombinaci kterýchkoliv tří jeho rovin, nenáležejících témuž svazku. Důkaz je zcela analogický důkazu symbol. rovnice (16,1).

Konečně jsou-li $\eta, \zeta, \varphi, \psi$ čtyři roviny nenáležející témuž trsu, lze každou další rovinu ξ v prostoru vyjádřiti jako jejich lineární kombinaci

$$\xi = \lambda_1\eta + \lambda_2\zeta + \lambda_3\varphi + \lambda_4\psi, \tag{16,6}$$

kde alespoň jedno z čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ je různé od nuly.

Symbolické rovnice (16,1), (16,5) a (16,6) vyjadřují svazek, trs a prostor rovinový způsobem analogickým (duálním) k výrazům (6,9), (10,1) a (11,1) pro přímou řadu, rovinné pole a prostor bodový; útvary prvé trojice jsou duální k útvarům druhé trojice a obráceně.

Z (16,6) je patrno, že rovinové souřadnice čtyrstěnové lze definovati obdobným (duálním) způsobem k definici bodových čtyrstěnových souřadnic v odst. 11. Kromě stěn souř. čtyrstěnu η, ζ, φ, ψ by i zde bylo nutno vytknouti v prostoru jednotkovou rovinu Γ, neprocházející žádným z vrcholů souřadnicového čtyrstěnu. Roviny η, ζ, φ, ψ, Γ určují rovinovou souřadnicovou soustavu úplně a jednoznačně.

Podmínka, aby roviny ξ, η, ζ, φ náležely jednomu trsu, je podle (16,5)

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{16,7}$$

Pokládáme-li v (16,7) roviny η, ζ, φ za pevné, rovinu ξ za proměnlivou, je (16,7) rovnicí trsu, určeného rovinami η, ζ, φ v běžných souřadnicích ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4. Minor prvku ξ_i v determinantu v (16,7) označme x_i; pak bod x (x_1; x_2; x_3; x_4) je vrchol trsu.

Příklady k cvičení.

47. Identitu (12,13) dokažte podle návodu v textu!

48. Odvoďte znovu větu o výpočtu vzdálenosti bodu P_0 od roviny ϱ transformací pravoúhlých kartézských souřadnic (translací, při níž počátek nové soustavy se ztotožňuje s P_0)!

49. V rovnoběžných souřadnicích dány vrcholy čtyrstěnu. y (0; 0; 0; 1), z (4; 0; 0; 1), u (0; 6; 0; 1), v (0; 0; 8; 1) a bod g (1; 2; 3; 1). Určete čtyrstěnové souřadnice bodu x (— 6; 4; — 2; 1) vzhledem k souř. čtyrstěnu $yzuv$ a jednotkovému bodu g! [Nejdříve se přesvědčte, že žádné čtyři z bodů $yzuvg$ neleží v jedné rovině! Potom určete faktory homogenity rovnoběžkových souřadnic daných bodů tak, aby bod g skutečně byl jednotkový, t. j. aby bylo $g = y + z + u + v$! Naleznete, že je nutno psáti: y (0; 0; 0; 1), z (24; 0; 0; 6), u (0; 48; 0; 8), v (0; 0; 72; 9), g (24; 48; 72; 24). Hledané čtyrstěnové souřadnice bodu $x \equiv x'$ označme x'_1, x'_2, x'_3, x'_4; vypočtou se ze symbol. rovnice $x = x'_1 y + x'_2 z + x'_3 u + x'_4 v$, t. j. z úměry $24x'_2 : 48x'_3 : 72x'_4 : (x'_1 + 6x'_2 + 8x'_3 + 9x'_4) = —6 : 4 : —2 : 1$, odkud $x'_1 = — 75$, $x'_2 = 9$, $x'_3 = — 3$, $x'_4 = 1$!]

50. Jaké jsou rovnice rovin $(\overrightarrow{x}\ \overrightarrow{y})$, $(\overrightarrow{y}\ \overrightarrow{z})$, $(\overrightarrow{z}\ \overrightarrow{x})$ a roviny nevlastní v čtyrstěnových, souřadnicích minulého příkladu? [$x'_4 = 0$, $x'_2 = 0$, $x'_3 = 0$ $x'_1 + 6x'_2 + 8x'_3 + 9x'_4 = 0$.]

51. Jak zní transformační rovnice (12,1) pro přechod od původních k novým souřadnicím příkladu 49? [$x_1 = 24x'_2$, $x_2 = 48x'_3$, $x_3 = 72x'_4$, $x_4 = x'_1 + 6x'_2 + 8x'_3 + 9x'_4$.]

52. Jaký je význam této transformace pravoúhlých kartézských souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= m + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,\\ y &= n + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,\\ z &= p + z' \end{aligned}$$

[Posunutí počátku do bodu $(m; n; p)$ a pootočení o úhel α kolem osy $\overrightarrow{z'}$.]

53. Jak zní duální věta k větě:

Tři různé rovinové trsy, jejichž vrcholy neleží v téže přímce, mají jedinou rovinu společnou.

[Tři bodová pole, jejichž roviny neprocházejí touž přímkou, mají jediný bod společný.]

Vymyslete jiné příklady dvojic duálních vět!

54. Vyslovte větu *Brianchonovu* jako duální větu k *Pascalově* větě o šesti bodech kuželosečky!

55. Určete vzdálenost bodu P_0 od roviny ϱ!

a) $P_0\,(2; 6; 1)$, $\varrho \equiv 12x + 4y + 3z - 12 = 0$, [$-3$].

b) $P_0\,(2; -2; -3)$, $\varrho \equiv 3x - 4y - 5z = 0$, [$\pm 2{,}9\sqrt{2}$].

c) $P_0\,(0; -1; -4)$, $\varrho \equiv 2x - 5y = 0$, $\left[\pm\dfrac{5\sqrt{29}}{29}\right]$.

56. Vypočtěte obsah trojúhelníka $P_1P_2P_3$!

a) $P_1\,(-4; 1; 8)$, $P_2\,(2; 3; -4)$, $P_3\,(5; 4; -6)$, [$-4\sqrt{2}$].

b) $P_1\,(-3; -2; -1)$, $P_2\,(3; 5; 2)$, $P_3\,(6; -2; 0)$, [$\pm \frac{7}{2}\sqrt{91}$).

57. Dokažte, že vzorec pro objem čtyrstěnu

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

je totožný s (15,6)! [Odčítejte prvý řádek ode všech ostatních!]

58. Určete objem čtyrstěnu $P_0P_1P_2P_3$!

a) $P_0\,(1; 2; 3)$, $P_1\,(4; 5; 6)$, $P_2\,(3; 3; 3)$, $P_3\,(4; 8; 9)$, $\left[\dfrac{-3}{2}\right]$.

b) $P_0\,(1; 2; 3)$, $P_1\,(-1; 0; 0)$, $P_2\,(0; -2; 0)$, $P_3\,(0; 0; -3)$, [$+4$].

c) $P_0\,(-1; 2; 3)$, $P_1\,(1; -2; 3)$, $P_2\,(1; 2; -3)$, $P_3\,(1; 2; 3)$, [-8].

59. Jak zní rovnice roviny, procházející průsečnicí rovin $5x + 6y - 7z - 3 = 0$, $4x + 2y + 4z - 1 = 0$ a bodem $(5; 6; 7)$? [$14x + 42y - 43z - 21 = 0$.]

60. Ve svazku rovin

$$ax + by + c + \lambda(by + az + c) = 0$$

jest nalézti rovinu kolmou na rovinu $ax + by + cz - 7d = 0$! $\left[\lambda = \dfrac{a^2 + b^2}{ac + b^2}\right]$.

61. Napište rovnice obou rovin, které půlí úhly dvou rovin nikoliv rovnoběžných! [Jsou-li $\varrho(x, y, z) = 0$ a $\sigma(x, y, z) = 0$ normální tvary rovnic obou rovin, mají hledané roviny rovnice $\varrho(x, y, z) \pm \sigma(x, y, z) = 0$].

62. Dokažte, že obě dané roviny minulého příkladu oddělují harmonicky obě roviny souměrnosti svých úhlů!

63. V příkladě 61 jsou rovnice daných rovin $x - 2y + z - 1 = 0$ a $4x + 3y - 4 = 0$. Jak zní rovnice obou rovin půlících jejich úhly? [$(5 \pm 4\sqrt{6})\,x + (-10 \pm 3\sqrt{6})\,y + 5z - (5 \pm 4\sqrt{6}) = 0$.]

64. Určete vzdálenost rovnoběžných rovin $x - 2y + 3z - 6 = 0$ a $x - 2y + 3z + 24 = 0$! $\left[15\dfrac{\sqrt{14}}{7}\right]$.

65. V trsu rovin určete rovinu a) rovnoběžnou s danou rovinou; b) kolmou k dané přímce; c) procházející danou přímkou!

Předpokládejte, že trs je dán rovnicemi $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\varphi = 0$ tří svých rovin v souř. kartézských pravoúhlých! [Udejte rovnice pro λ_1, λ_2, λ_3 hledané roviny (16,5)!]

66. Dokažte, že roviny

$$\begin{aligned}
-2y + 3z - 4x + 11 &= 0,\\
-7z + 6y + 8x - 23 &= 0,\\
12x - 10y + 11z + 5 &= 0,\\
14y + 15z - 16x - 9 &= 0,
\end{aligned}$$

náleží jednomu trsu, jehož vrchol určete! [(4; 2; 3)].

67. Použijte čtyrstěnových souřadnic k důkazu věty:

Buď g bod neležící v žádné stěně čtyrstěnu $yzuv$. Rovina (yzg) protíná hranu (uv) v bodě g_{34}. Buď g'_{34} onen bod, který spolu s g_{34} odděluje harmonicky vrcholy u, v. Obdobným způsobem je definováno dalších 5 bodů g'_{ik}, tedy celkem 6 bodů na šesti hranách čtyrstěnu. Všechny tyto body leží v jediné rovině, v t. zv. harmonikální rovině Γ bodu g vzhledem k čtyrstěnu $yzuv$.

[Předpokládejme, že daný čtyrstěn $yzuv$ je souřadnicový s jednotkovým bodem $g = y + z + u + v$! Bod $g_{34} = u + v$, $g'_{34} = u - v$; čtyrstěnové souř. posledně uvedeného bodu jsou $(0; 0; -1; 1)$; další body jsou $g'_{12}(-1; 1; 0; 0)$, $g'_{13}(-1; 0; 1; 0)$, $g'_{14}(-1; 0; 0; 1)$, $g'_{23}(0; -1; 1; 0)$, $g'_{24}(0; -1; 0; 1)$. Z jejich souřadnic snadno zjistíme správnost věty.]

68. Vyslovte větu duální k větě příkladu 67! [Je jejím obrácením!]

69. Mají-li čtyrstěnové bodové i rovinové souřadnice za podklad týž souřadnicový čtyrstěn $yzuv$, takže $\xi_i = 0$ a $x_i = 0$ jsou rovnice protilehlého vrcholu a stěny, platí věta: Rovnice $S\xi x = 0$ vyjadřuje incidenci bodu x s rovinou ξ jen tehdy, když jednotková rovina Γ je harmonikální rovinou jednotkového bodu g vzhledem k souř. čtyrstěnu. Je-li tomu tak, pak obě uvažované souřadnicové soustavy, t. j. bodovou a rovinovou, budeme nazývati přidruženými. Dokažte!

70. Udejte význam poměrů homogenních čtyrstěnových rovinových souřadnic duální k významu poměrů bodových souřadnic, jak byl uveden v odst. 16!

17. Přímkové souřadnice. Lineární útvary přímkové. Vzdálenost bodu od přímky.

a) Buďtež $y(y_1; y_2; y_3; y_4)$ a $z(z_1; z_2; z_3; z_4)$ dva různé body se svými homogenními souřadnicemi. Z nich utvořená matice

$$\left\| \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{matrix} \right\| \tag{17,1}$$

je hodnosti 2, takže alespoň jeden z jejích minorů druhého řádu

$$p_{ik} = (yz)_{ik} \equiv y_i z_k - y_k z_i, \quad (i \neq k, i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{17,2}$$

je různý od nuly.

6 minorů p_{ik} můžeme prohlásiti za homogenní souřadnice přímky $p \equiv (yz)$. Jen tolik jich je totiž lineárně nezávislých, neboť

$$p_{ki} = -p_{ik}.$$

Že jsme byli k uvedené definici souřadnic přímky p oprávněni, je patrno z okolnosti, že při záměně bodů y, z přímky p jinými různými jejími body y', z', které s původními souvisí rovnicemi

$$y = \lambda_1 y' + \lambda_2 z', \quad z = \mu_1 y' + \mu_2 z', \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

jest

$$(yz)_{ik} = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\,(y'z')_{ik},$$

t. j. původní souřadnice se od nových liší pouhým faktorem homogenity.

Buď q přímka různá od p, u, v buďte dva její body, takže souřadnice přímky $q \equiv (uv)$ jsou minory matice

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{Vmatrix}.$$

Aby přímky p a q měly společný bod, ať již vlastní nebo nevlastní, k tomu je nutno a stačí, aby body $yzuv$ ležely v jedné rovině, t. j. aby podle (10,6) bylo

$$(yzuv) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozvedeme-li determinant v této rovnici (nejlépe podle Laplaceovy věty podle prvních dvou řádků — stačí však postupné rozvedení nejdříve podle prvního řádku, po němž následuje rozvedení vzniklých minorů opět podle jejich prvních řádků), vychází odtud podmínka incidence přímek p a q ve tvaru

$$Spq \equiv p_{12}q_{34} + p_{13}q_{42} + p_{14}q_{23} + p_{34}q_{12} + p_{42}q_{13} + p_{23}q_{14} = 0 \qquad (17,3)$$

Tato rovnice je zajisté splněna pro $p \equiv q$, t. j. souřadnice p_{ik} nejsou nezávislé, nýbrž splňují rovnici druhého stupně

$$\tfrac{1}{2}Spp \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0. \qquad (17,4)$$

Protože souřadnice každé přímky ji splňují, je rovnice (17,4) základní důležitosti pro přímkovou geometrii. Je to nutná i postačující podmínka pro to, aby uspořádanému šestičíslí

$$p_{12};\ p_{13};\ p_{14};\ p_{34};\ p_{42};\ p_{23}, \qquad (17,5)$$

z jehož čísel alespoň jedno je od nuly různé, náležela jediná přímka o přímkových souřadnicích (17,5) v dané soustavě souřadnic.

b) Z okolnosti, že základní rovnice (17,4) je druhého stupně, kdežto podmínka incidence (17,3) je lineární v p_{ik}, lze vyvoditi tento důsledek:

Existují dvě přímky (příčky, transversály), protínající čtyři dané přímky, které nemají žádnou zvláštní vzájemnou polohu.

Skutečně, jsou-li q, q', q'', q''' dané přímky, p jejich příčka, splňují její souřadnice p_{ik} rovnici (17,3) a tři rovnice téhož druhu, v nichž koeficienty q_{ik} jsou nahrazeny souřadnicemi q'_{ik} resp. q''_{ik} a q'''_{ik}. Kromě toho souřadnice přímky p splňují ještě základní rovnici (17,4), celkem tedy čtyři rovnice lineární a jednu stupně druhého. Protože souřadnice p_{ik} jsou homogenní, stačí tato soustava pěti rovnic k jejich určení. Obecně existují dvě její řešení, což bylo dokázati.

Je tedy přímková geometrie polohy charakteru kvadratického.

Podotkněme, že rovnice (17,3), v které q_{ik} jsou souřadnice pevné přímky (takže $\frac{1}{2}Sqq = 0$), je rovnicí množství přímek, protínajících přímku q. Souřadnice p_{ik} jsou při tom souřadnice běžné.

Toto množství přímek nazývejme specielním komplexem lineárním, přímku q jeho osou.

Je-li v (17,3) $\frac{1}{2}Sqq \neq 0$, takže čísla q_{ik} nejsou souřadnice přímky, je (17,3) opět rovnicí množství přímek, jež se nazývá obecný lineární komplex přímek.

c) Průsečík přímky p o souřadnicích (17,5) — z nichž na př. $p_{12} \neq 0$ — se stěnou $x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) souřadnicového čtyrstěnu je bod

$$p_i\,(p_{i1};\ p_{i2};\ p_{i3};\ p_{i4};),\ (i = 1; 2; 3; 4,\ p_{ii} = 0). \qquad (17,6)$$

Skutečně, utvoříme-li ze souřadnic kterýchkoliv dvou z těchto čtyř bodů, souřadnice jimi určené přímky, je patrno, že to jest přímka p. Na př. body

$$\left.\begin{array}{l} p_1\,(0;\,p_{12};\,p_{13};\,p_{14}) \\ p_2\,(p_{21};\,0;\,p_{23};\,p_{24}) \end{array}\right\} \qquad (17,7)$$

určená přímka p' má souřadnice:

$$p'_{12} = p_{12}^2;\; p'_{13} = p_{12}p_{13};\; p'_{14} = p_{12}p_{14};$$
$$p'_{34} = p_{12}p_{34};\; p'_{42} = p_{12}p_{42};\; p'_{23} = p_{12}p_{23},$$

odkud je patrno, že $p' = p_{12} \cdot p$, nebo při známém smyslu těchto symbolů, rozšířeném na souřadnice přímky, $\{p'\} = \{p\}$, což bylo dokázati.

Kterékoliv tři z bodů (17,6) leží na téže přímce p. Nemohou tudíž jejich souřadnice býti voleny libovolně, neboť matice z nich utvořená musí míti hodnost nejvýše *2*.

Snadno však vychází, že nutná i postačující podmínka pro to je základní rovnice (17,4), která je splněna pro každou přímku.

Z této úvahy vyplývá, že dva z bodů (17,6) lze vyjádřiti jako lineární kombinace zbývajících dvou bodů, jsou-li ovšem různé. Skutečně, je-li $p_{12} \neq 0$, je

$$p_3 = -\frac{p_{23}}{p_{12}}\,p_1 + \frac{p_{13}}{p_{12}}\,p_2,\quad p_4 = -\frac{p_{24}}{p_{12}}\,p_1 + \frac{p_{14}}{p_{12}}\,p_2.$$

Odtud vyplývá, že dvojpoměr d čtveřice bodů $p_1p_2p_3p_4$ je

$$d = \frac{p_{13}p_{24}}{p_{14}p_{23}}. \qquad (17,8)$$

Předpokládejme, že $\eta\,(\eta_1;\,\eta_2;\,\eta_3;\,\eta_4)$ a $\zeta\,(\zeta_1;\,\zeta_2;\,\zeta_3;\,\zeta_4)$ jsou dvě roviny procházející přímkou $p \equiv (yz)$. Předpokládáme-li, jak v dalším stále budeme činiti, že používané souřadnice bodové a rovinové jsou navzájem přidružené (viz př. 69), je

$$S\eta y = S\eta z = S\zeta y = S\zeta z = 0. \qquad (17,9)$$

Duální úvaha vede k tomu, abychom z minorů matice

$$\left\| \begin{array}{cccc} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \end{array} \right\|,$$

jež označme $\pi_{ik} = \eta_i\zeta_k - \eta_k\zeta_i$, $(i, k = 1, 2, 3, 4)$, (a o nichž platí rovnice $\pi_{ki} = -\pi_{ik}$, $\pi_{ii} = 0$), utvořené uspořádané šestičíslí

$$\pi_{12};\pi_{13};\pi_{14};\pi_{34};\pi_{42};\pi_{23}$$

prohlásili za t. zv. osové souřadnice přímky p (název vznikl z toho, že přímka p je zde definována jako osa $(\eta\zeta)$ svazku rovin určeného rovinami η a ζ).

Jsou to pouze zdánlivě nové souřadnice přímky p, neboť platí úměra

$$\pi_{34}:\pi_{42}:\pi_{23}:\pi_{12}:\pi_{13}:\pi_{14} = p_{12}:p_{13}:p_{14}:p_{34}:p_{42}:p_{23}, \qquad (17,10)$$

takže

$$S\pi\pi \equiv Spp. \qquad (17,11)$$

K důkazu úměry (17,10) utvořme součet $(k = 1; 2; 3; 4)$

$$\sum_k p_{ik}\,\pi_{jk} = \sum_k (y_iz_k - y_kz_i)(\eta_j\zeta_k - \eta_k\zeta_j) =$$
$$= y_i\eta_jS\zeta z - y_i\zeta_jS\eta z - z_i\eta_jS\zeta y + z_i\zeta_jS\eta y.$$

V důsledku rovnic (17,9) je však poslední výraz roven nule, kdežto první se vlivem rovnic $p_{ii} = \pi_{jj} = 0$ redukuje na dvojčlen, takže vychází

$$p_{ir}\pi_{jr} + p_{is}\pi_{js} = 0,$$

kde $ijrs$ je jakákoli permutace skupiny cifer 1, 2, 3, 4. Na př. pro permutaci 1, 4, 2, 3 vychází odtud

$$p_{12}\pi_{42} + p_{13}\pi_{43} = 0,$$

t. j.

$$\pi_{34}:\pi_{42} = p_{12}:p_{13},$$

čímž je první část úměry (17,10) dokázána. Z dalších permutací indexů vychází důkaz celé úměry.

Obdobně k čtveřici průsečíků p_i přímky p se stěnami souřadnicového čtyrstěnu, tvoří roviny

$$\pi_i\,(\pi_{i1};\pi_{i2};\pi_{i3};\pi_{i4}),\ (i = 1, 2, 3, 4),\ \pi_{ii} = 0, \qquad (17,12)$$

čtveřici, jejíž rovina π_i prochází přímkou p a vrcholem souřadnicového čtyrstěnu o rovnici $\xi_i = 0$; všechny souřadnice tohoto vrcholu jsou nuly, pouze $x_i \neq 0$. Je-li $\pi_{12} \neq 0$, jsou roviny π_1 a π_2 různé a roviny π_3 a π_4 je možno vyjádřiti jako jejich lineární kombinace

$$\pi_3 = \frac{\pi_{32}}{\pi_{12}}\pi_1 - \frac{\pi_{31}}{\pi_{12}}\pi_2, \quad \pi_4 = \frac{\pi_{42}}{\pi_{12}}\pi_1 - \frac{\pi_{41}}{\pi_{12}}\pi_2.$$

Dvojpoměr čtveřice rovin $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$ je tudíž

$$\delta = \frac{\pi_{31}\,\pi_{42}}{\pi_{32}\,\pi_{41}}.$$

S ohledem na úměru (17,10) vyplývá srovnáním se (17,8) rovnice

$$d = \delta$$

a věta:

Je-li p_i průsečík přímky p se stěnou čtyrstěnu a π_i rovina procházející přímkou p a protějším vrcholem čtyrstěnu, pak dvojpoměr čtveřiny průsečíků $p_1p_2p_3p_4$ je roven dvojpoměru čtveřiny rovin $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$.

Věta je k sobě duální.

d) Je-li rovina ξ $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$ dána svými souřadnicemi rovinovými a kromě jí přímka p $(p_{12}; p_{13}; p_{14}; p_{34}; p_{42}; p_{23})$, lze jejich společný bod snadno vyjádřiti jako lineární kombinaci bodů p_i $(i = 1; 2; 3; 4)$.

Platí věta:

Průsečík přímky p a roviny ξ je bod

$$p_\xi \equiv \xi_1p_1 + \xi_2p_2 + \xi_3p_3 + \xi_4p_4. \qquad (17,13)$$

Skutečně bod p_ξ leží α) na přímce p, neboť jest lineární kombinací čtyř jejích bodů p_i, β) v rovině ξ, neboť jest podle (17,6) a (17,13)

$$S\xi p_\xi = \sum_{i,k} \xi_i\xi_k p_{ik} = 0, \quad (i, k = 1; 2; 3; 4)$$

v důsledku vztahů $p_{ik} = -p_{ki}$, $p_{ii} = 0$.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby přímka p ležela v rovině ξ, je

$$\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3 + \xi_4 p_4 = 0. \qquad (17,14)$$

Skutečně z ní plyne $S\xi p_1 = S\xi p_2 = S\xi p_3 = S\xi p_4 = 0$, takže všechny čtyři body p_i leží v ξ, čímž tvrzení je dokázáno.

Duálně, jsou-li π_{ik} osové souřadnice přímky p, π_i ($i = 1; 2; 3; 4$) roviny určené přímkou p a vrcholy souřadnicového čtyrstěnu [srovnej se (17,12)!] a je-li dále x (x_1; x_2; x_3; x_4) bod na $p$neležící, pak rovina π_x určená přímkou p a bodem x je lineární kombinace rovin π_i

$$\pi_x = x_1\pi_1 + x_2\pi_2 + x_3\pi_3 + x_4\pi_4. \qquad (17,15)$$

Rovnice

$$x_1\pi_1 + x_2\pi_2 + x_3\pi_3 + x_4\pi_4 = 0 \qquad (17,16)$$

je nutná a postačující podmínka pro to, aby bod x ležel na přímce p.

Doplňme předchozí úvahu řešením úkolu určiti společnou rovinu ξ, resp. společný bod x dvou různoběžných přímek p, r daných přímkovými, resp. osovými souřadnicemi. Různoběžnost obou přímek je zde vyjádřena podmínkou incidence [viz (17,3)] $Spr = 0$.

Rovina ξ obsahuje všechny body p_i ($i = 1; 2; 3; 4$) přímky p stejně jako všechny body r_i přímky r, takže platí všech 8 rovnic $S\xi p_i = 0$ a $S\xi r_i = 0$. Na př. pro $i = 1$ jsou to s ohledem na (17,6) rovnice

$$\begin{aligned} \xi_2 p_{12} + \xi_3 p_{13} + \xi_4 p_{14} &= 0, \\ \xi_2 r_{12} + \xi_3 r_{13} + \xi_4 r_{14} &= 0, \end{aligned}$$

z nichž vychází

$$\xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \begin{Vmatrix} p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ r_{12} & r_{13} & r_{14} \end{Vmatrix}. \qquad (17,17)$$

Stejným způsobem při $i = 2$ vychází

$$\xi_1 : \xi_3 : \xi_4 = \begin{Vmatrix} p_{21} & p_{23} & p_{24} \\ r_{21} & r_{23} & r_{24} \end{Vmatrix}, \qquad (17,17)$$

při $i = 3$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_4 = \left\| \begin{matrix} p_{31} & p_{32} & p_{34} \\ r_{31} & r_{32} & r_{34} \end{matrix} \right\| \tag{17,17}$$

a konečně při $i = 4$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \left\| \begin{matrix} p_{41} & p_{42} & p_{43} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \end{matrix} \right\|. \tag{17,17}$$

K skutečnému výpočtu souřadnic ξ_i roviny ξ patrně postačují kterékoliv *2* z úměr (17,17).

Duálně, souřadnice x_i společného bodu x přímek p, r lze vypočísti z jejich osových souřadnic π_{ik} a ϱ_{ik} podle úměr

$$x_2 : x_3 : x_4 = \left\| \begin{matrix} \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \varrho_{12} & \varrho_{13} & \varrho_{14} \end{matrix} \right\|, \tag{17,18}$$

$$x_1 : x_3 : x_4 = \left\| \begin{matrix} \pi_{21} & \pi_{23} & \pi_{24} \\ \varrho_{21} & \varrho_{23} & \varrho_{24} \end{matrix} \right\|, \tag{17,18}$$

atd.

V souvislosti s právě rozřešeným úkolem uvažme množství všech přímek procházejících bodem x a ležících v rovině ξ. Toto množství, jak je známo, je t. zv. **svazek přímek**; je jednoznačně určeno kterýmikoliv dvěma ze svých přímek, na př. přímkami p, r.

Dokažme, že lineární kombinace těchto dvou přímek

$$s = \lambda p + \mu r, \tag{17,19}$$

kde λ a μ nejsou současně nuly, je též přímka svazku.

Především nutno dokázati, že s je přímka, t. j. že $Sss = 0$. Skutečně, protože $Sss = \lambda^2 Spp + 2\lambda\mu Spr + \mu^2 Srr$, je tomu tak, neboť $Spp = Spr = Srr = 0$.

Přímka s náleží svazku, protože ze symbolických rovnic $\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3 + \xi_4 p_4 = 0$, $\xi_1 r_1 + \xi_2 r_2 + \xi_3 r_3 + \xi_4 r_4 = 0$ resp. $x_1\pi_1 + x_2\pi_2 + x_3\pi_3 + x_4\pi_4 = 0$, $x_1\varrho_1 + x_2\varrho_2 + x_3\varrho_3 + x_4\varrho_4 = 0$ plyne $\xi_1 s_1 + \xi_2 s_2 + \xi_3 s_3 + \xi_4 s_4 = 0$, resp. $x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3 + x_4\sigma_4 = 0$, neboť podle (17,19) je $s_i = \lambda p_i + \mu r_i$ (v souřadnicích osových $\sigma_i = \lambda\pi_i + \mu\varrho_i$).

Podobně jsou-li p, r, s tři přímky, z nichž každé dvě jsou různoběžny, takže jest

$$Spp = Srr = Sss = Spr = Sps = Srs = 0 \qquad (17{,}20)$$

je i každá jejich lineární kombinace

$$t = \lambda p + \mu r + \varkappa s, \qquad (17{,}21)$$

kde alespoň jedno z čísel $\lambda, \mu, \varkappa$ je od nuly různé, opět přímka. Skutečně, rovnice $Stt = 0$, t. j. rovnice

$$\lambda^2 Spp + \mu^2 Srr + \varkappa^2 Sss + 2\lambda\mu Spr + 2\lambda\varkappa Sps + 2\mu\varkappa Srs = 0,$$

je v důsledku rovnice (17,20) splněna při jakýchkoliv hodnotách $\lambda, \mu, \varkappa$.

Množství všech přímek (17,21) jest buď rovinné přímkové pole nebo trs přímek. Prvý případ nastává tehdy, když přímky p, r, s jsou různoběžné tím způsobem, že leží v téže rovině ξ, aniž však náleží jedinému paprskovému svazku, kdežto druhý případ, k prvému duální, nastává, procházejí-li přímky p, r, s týmž bodem x, avšak neleží v jedné rovině.

V prvém případě souřadnice roviny ξ lze vypočísti ze souřadnic prvých dvou přímek, p a r, podle (17,17). V této rovině leží též přímka s, jsou-li splněny rovnice

$$S\xi s_1 = S\xi s_2 = S\xi s_3 = S\xi s_4 = 0$$

čili

$$\begin{vmatrix} p_{12} p_{13} p_{14} \\ r_{12} r_{13} r_{14} \\ s_{12} s_{13} s_{14} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{23} p_{24} p_{21} \\ r_{23} r_{24} r_{21} \\ s_{23} s_{24} s_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{31} p_{32} p_{34} \\ r_{31} r_{32} r_{34} \\ s_{31} s_{32} s_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{41} p_{42} p_{43} \\ r_{41} r_{42} r_{43} \\ s_{41} s_{42} s_{43} \end{vmatrix} = 0, \qquad (17{,}22)$$

z nichž však pouze kterékoliv dvě obecně jsou nezávislé, neboť body s_1, s_2, s_3, s_4 náležejí téže přímce s.

Pokládáme-li v rovnicích (17,22) souřadnice přímky s za běžné, zatím co souřadnice různoběžek p, r jsou konstantní, lze je pokládati za rovnice rovinného pole přímkového, určeného svými dvěma přímkami p, r, v souřadnicích přímkových.

Duálně, rovnice trsu přímek, určeného svými dvěma přímkami p, r, jejichž osové souřadnice jsou π_{ik}, ϱ_{ik}, jsou rovnice (17,22), změněné tím způsobem, že místo p, resp. r, resp. s je všude psáno π, resp. ϱ, resp. σ. V těchto rovnicích

σ_{ik} jsou běžné rovinové souřadnice přímky s, vytvořující trs.

Jsou-li p, r dvě mimoběžné přímky, pak žádná z lineárních kombinací (17,19) není přímka, neboť v takovém případě je $Sss = 2\lambda\mu \,.\, Spr$, kde $\lambda\mu \neq 0$, $Spr \neq 0$, takže i $Sss \neq 0$.

Jsou-li p, r, s tři přímky, z nichž každé dvě jsou mimoběžné, pak v množství jejich lineárních kombinací (17,21) se vyskytují přímky, tvořící t. zv. *regulus* přímek. Skutečně, za učiněných předpokladů, podmínka, aby lineární kombinace (17,21) byla přímka, t, j. podmínka $Stt = 0$, nabývá tvaru

$$\lambda\mu Spr + \lambda\varkappa Sps + \mu\varkappa Srs = 0. \qquad (17,23)$$

Tato rovnice je rovnicí druhého stupně v $\lambda, \mu, \varkappa$, jež jsou souřadnicemi přímek regulu v užším smyslu.

Regulus přímek je útvar k sobě duální; kdybychom užili osových souřadnic, dospěli bychom k rovnici totožné s rovnicí (17,23).

Je zřejmé, že přímky t, tvořící regulus, vyhovují svými souřadnicemi trojici lineárních rovnic a podmínce $Stt = 0$. Obráceně, tři nezávislé lineární rovnice mezi přímkovými souřadnicemi definují regulus.

e) Dosavadní naše úvahy o přímkových a osových souřadnicích náležejí do t. zv. projektivní přímkové geometrie. S prospěchem se však užívá těchto souřadnic k řešení otázek metrických stejně jako v četných aplikacích ve statice a dynamice.

V těchto případech se ovšem užívá souřadnicové soustavy rovnoběžkové. Pak bod $p_4\,(p_{41}; p_{42}; p_{43}; 0)$ je zřejmě bod nevlastní a tři ze souřadnic přímky p, t. j. souřadnice p_{41}, p_{42}, p_{43} jsou její *směrové parametry*. Je-li souřadnicová soustava kartézská pravoúhlá, lze předpokládati, že faktor úměrnosti homogenních souřadnic přímky p byl zvolen tak, aby bylo

$$p_{41}^2 + p_{42}^2 + p_{43}^2 = 1, \qquad (17,24)$$

neboť pouze pro nevlastní přímky je současně $p_{41} = p_{42} = p_{43} = 0$.

Požadavkem (17,24) je faktor úměrnosti určen až na znaménko. Jeho dvojí možné volbě koresponduje dvojí orientace přímky p, jejíž směrové kosiny za předpokladu (17,24) jsou

$$\cos\alpha = p_{41},\ \cos\beta = p_{42},\ \cos\gamma = p_{43}. \qquad (17,25)$$

Ze (17,4) plyne, že zbývající tři přímkové souřadnice jsou s jejími směrovými kosiny vázány vztahem

$$p_{23}\cos\alpha + p_{31}\cos\beta + p_{12}\cos\gamma = 0. \qquad (17,26)$$

Jako příklad užití přímkových souřadnic k řešení úloh metrických uvedeme určení vzdálenosti bodu $P_0\,(x_0; y_0; z_0)$ od přímky p, dané přímkovými souřadnicemi, za předpokladu, že souřadnicová soustava je kartézská pravoúhlá a že jsou splněny vztahy (17,24), (17,25), (17,26).

Bodem P_0 procházející rovina ξ, kolmá na p, má normální rovnici

$$(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma = 0,$$

t. j.

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d = 0, \qquad (17,27)$$

kde

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma \qquad (17,28)$$

je vzdálenost počátku O od roviny ξ.

Průsečík P_1 této roviny s přímkou p, čili pata kolmice spuštěné s P_0 na p, je podle (17,13) bod

$$P_1 \equiv p_1\cos\alpha + p_2\cos\beta + p_3\cos\gamma - dp_4,$$

t. j. podle (17,6) bod

$$\begin{aligned} P_1\,(&d\cos\alpha - p_{21}\cos\beta - p_{31}\cos\gamma;\\ &d\cos\beta - p_{12}\cos\alpha - p_{32}\cos\gamma;\\ &d\cos\gamma - p_{13}\cos\alpha - p_{23}\cos\beta).\end{aligned}$$

Ze souřadnic bodů P_0 a P_1 snadno vypočteme čtverec hledané vzdálenosti $\overline{P_0P_1} = v$ bodu P_0 od přímky p. Po jednoduchém počtu vychází

$$v^2 = p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{12}^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - d^2 + 2\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ p_{23} & p_{31} & p_{12} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}. \qquad (17,29)$$

Na př. k výpočtu vzdálenosti bodu $P_0(1; 2; 3)$ od přímky $p(-3; -2-\sqrt{2}; -1; -\sqrt{2}; -1; 4\sqrt{2}+2)$ [srovnej se (17,5) a přesvědč se, že je splněna základní rovnice (17,4)] je nutno nejdříve násobiti souřadnice přímky p faktorem $\pm \frac{1}{\sqrt{p_{41}^2 + p_{42}^2 + p_{43}^2}} = \pm \frac{1}{2}$, aby byly splněny vztahy (17,24), (17,25), (17,26). Rozhodneme-li se pro horní znaménko, nové souřadnice přímky p jsou $p_{41} = \cos \alpha = \frac{1}{2}$, $p_{42} = \cos \beta = -\frac{1}{2}$, $p_{43} = \cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $p_{23} = 2\sqrt{2} + 1$, $p_{31} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $p_{12} = -\frac{3}{2}$. Dosazením těchto hodnot a souřadnic daného bodu do (17,29) snadno nalezneme

$$v^2 = \tfrac{1}{2}(9 - 4\sqrt{2}).$$

Příklady k cvičení.

71. Udejte přímkové souřadnice hrany $x_1 = x_2 = 0$ souřadnicového čtyrstěnu jakož i ostatních hran! [(1; 0; 0; 0; 0; 0) atd.]

72. Napište rovnici speciálního lineárního komplexu, jehož osou je v minulém příkladě uvedená hrana; napište tyto rovnice i pro ostatní hrany souř. čtyrstěnu! [$p_{34} = 0$ atd.]

73. Dokažte, že všechny přímky obecného (i speciálního) komplexu, procházející jedním bodem (který v případě spec. komplexu neleží na jeho ose), tvoří svazek přímek! [Jsou-li q_{ik} v (17,3) pevná čísla, y pevný bod, jest rovnice 17,3 lineární v z_1, z_2, z_3, z_4.]

74. Kolika svými přímkami je určen lineární komplex a) obecný, b) speciální? [a) pěti přímkami jednoznačně, b) čtyřmi přímkami dvojznačně.] Kolika svými přímkami je určen regulus? [Třemi.] Jaké jsou každé dvě přímky regulu navzájem? (Mimoběžné.)

75. Dokažte, že dvě rovnoběžné přímky $p \parallel q$ splňují podmínku incidence (17,3)! [Jsou-li souřadnice rovnoběžkové, je

$$p_{41} : p_{42} : p_{43} = q_{41} : q_{42} : q_{43},$$

odkud podle (17,4) platí (17,3), c. b. d.]

76. Jsou-li souřadnice rovnoběžkové, přímka je nevlastní, když $p_{41} = p_{42} = p_{43} = 0$. [Z těchto rovnic plyne $y_4 = z_4 = 0$.]