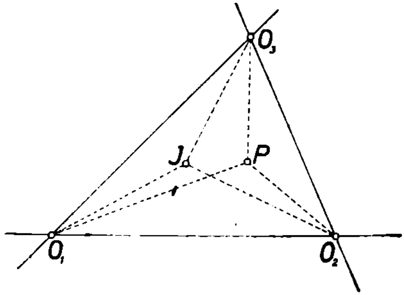
V.

PROJEKTIVNÍ SOUŘADNICE.

Souřadnice bodu. A. Definice. Zvolme tři základní body O_1, O_2, O_3, které neleží v jedné přímce (souřadnicové body nebo vrcholy) a další bod J v obecné poloze. Zvolme nyní další obecný bod P a promítněme jej z bodů O_1, O_2, O_3; totéž učiňme i s bodem J (viz obr. 12). Přímky svazků $(O_1), (O_2)$ určují dvojpoměry[23] $k_1 = O_1 (O_2O_3JP)$, $k_2 = O_2 (O_3O_1JP)$, které napsaným pořadím jsou stanoveny jednoznačně. Obráceně, jsou-li dána dvě čísla k_1, k_2, jakožto hodnoty prvního resp. druhého dvojpoměru, obdržíme obecně jediný bod P jednoduchou konstrukcí: jakožto průsečík obou odpovídajících přímek svazků (O_1) a (O_2). Bylo by tedy možné použíti již těchto čísel jako souřadnic bodu v rovině. Uvažme však, že disponujeme ještě třetím bodem O_3, a tedy i třetím dvojpoměrem $k_3 = O_3(O_1O_2JP)$!



Obr. 12.

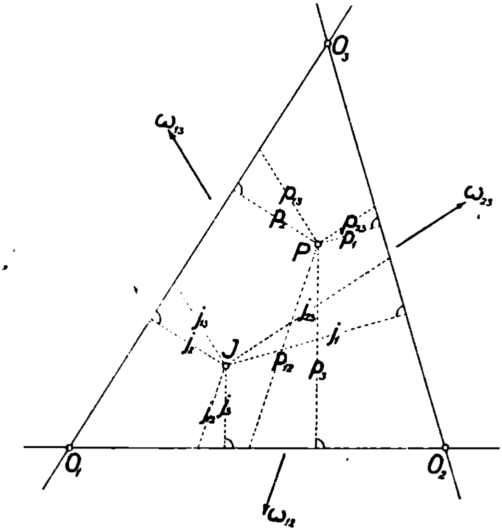
Hledejme nejprve geometrický význam dvojpoměrů k_i $(i = 1, 2, 3)$. Za tím účelem přiřaďme každé straně O_jO_k souřadnicového trojúhelníka určitý směr ω_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ a promítněme v tomto směru body J a P do protějších stran trojúhelníka $O_1O_2O_3$ (viz obr. 13). Dělicí poměr přímky O_1J vzhledem k přímkám O_1O_2 a O_1O_3 je podle definice

$$\frac{\sin (O_1O_2, O_1J)}{\sin (O_1O_3, O_1J)} = \frac{j_{12} \sin \omega_{12}}{j_{13} \sin \omega_{13}}, \text{ tedy úměrný } \frac{j_{12}}{j_{13}},$$

dělicí poměr přímky O_1P vzhledem k týmž přímkám

$$\frac{\sin(O_1O_2, O_1P)}{\sin(O_1O_3, O_1P)} = \frac{p_{12}\sin\omega_{12}}{p_{13}\sin\omega_{13}}, \text{ tedy úměrný } \frac{p_{12}}{p_{13}},$$

(O_1O_2, O_1J) značí úhel (lhostejno v tomto případě, zda je ostrý nebo tupý) přímek O_1O_2, O_1J atd., ω_{jk} jsou (ostré nebo tupé) úhly v obr. 13 stejně označených paprsků se



Obr. 13.

stranami souřadnicového trojúhelníka, j_{12} je délka úsečky jdoucí z bodu J ve směru ω_{12}, od tohoto bodu až k ose O_1O_2 atd. A tedy $k_1 = \frac{j_{12}}{j_{13}} : \frac{p_{12}}{p_{13}}$; obdobně pro k_2 a k_3. I poznáváme, že dvojpoměry k_i nejsou nezávislé, nýbrž že platí $k_1k_2k_3 = 1$: dvěma z těchto hodnot je určena i třetí, takže zavedení třetího dvojpoměru neznamená zavedení žádné podstatně nové veličiny.

Ale ani veličiny k_i nebereme ještě za souřadnice bodu P; místo nich zavádíme tři poměrná čísla x_i vztahy

$$k_1 = \frac{x_2}{x_3},\ k_2 = \frac{x_3}{x_1},\ k_3 = \frac{x_1}{x_2},$$

a nazýváme je **projektivní souřadnice** bodu. Je tedy, označíme-li $\varrho (\varrho \neq 0)$ faktor úměrnosti,

$$\varrho x_1 = \frac{p_{23}}{j_{23}},\ \varrho x_2 = \frac{p_{31}}{j_{31}},\ \varrho x_3 = \frac{p_{12}}{j_{12}}; \qquad (1)$$

projektivní souřadnice bodu jsou tři čísla úměrná vzdálenostem tohoto bodu, měřeným v určitých směrech, od stran daného trojúhelníka $O_1O_2O_3$, a děleným stejně měřenými vzdálenostmi jiného daného bodu J.

Položme $p_{ik} = j_{ik}$ pro každé i, k! Pak je $\varrho x_1 = \varrho x_2 = \varrho x_3 = 1$. Má tedy bod J vlastnost, že všechny jeho projektivní souřadnice jsou si rovny; je to bod **jednotkový**.

Není nikterak na újmu obecnosti, jestliže předpokládáme, že směry ω_{jk} jsou kolmé k stranám O_jO_k. Pak místo rovnic (1) máme jednodušší (viz obr. 13)

$$\varrho x_i = \frac{p_i}{j_i} \text{ nebo jinak } \varrho x_i = \varkappa_i p_i,\ (i = 1, 2, 3). \qquad (2)$$

Vyslovte!

B. **Základní vlastnosti.** Je tedy soustava projektivních bodových souřadnic jednoznačně určena souřadnicovým trojúhelníkem a jednotkovým bodem. Geometrický význam těchto souřadnic je pak dán rovnicemi (2). Vybudování soustavy je opřeno jen o pojem dvojpoměru a není tudíž nijak vztaženo — jak tomu bylo u všech soustav posavadních — na pomocnou soustavu kartézskou. I hodí se tyto souřadnice především k vyšetřování geometrických vlastností, které souvisí s dvojpoměrem.[25])

Základní vlastnosti našich souřadnic vyvodíme snadno z jejich definice rovnicemi (2). Tak pro bod O_1 platí $\varrho x_1 = v_1 : j_1$, $x_2 = x_3 = 0$ (v_1 je délka výšky v trojúhelníku $O_1O_2O_3$ spuštěné z vrcholu O_1), a poněvadž záleží jen na poměru souřadnic, lze psáti nejjednoduseji

$$O_1\,(1; 0; 0), \text{ a podobně } O_2\,(0; 1; 0),\ O_3\,(0; 0; 1).$$

A také $J\,(1; 1; 1)$. Pro body na přímce O_1O_2 (souřadnicové ose) platí $p_{12} = 0$, i je její rovnice $x_3 = 0$; a pod. Proto neexistuje bod $(0; 0; 0)$, poněvadž by musil současně ležeti na všech souřadnicových osách, což při jejich obecné poloze je vyloučeno.

Geometrické místo bodů, jejichž souřadnice splňují lineární homogenní vztah

$$\sum_i a_i x_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{3}$$

je přímka. Obsahuje-li vrchol O_1, platí $a_1 = 0$, a obráceně (proč?); a pod. Obsahuje-li dva vrcholy O_i, jsou v její rovnici dva koeficienty a_i rovny nule, a rovnice pak vyjadřuje souřadnicovou osu; a obráceně (jak?). Na př. rovnice přímky, která prochází vrcholem O_3, je $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ ($a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$); z této rovnice plyne, že $x_1 = -\varrho a_2$, $x_2 = \varrho a_1$, x_3 je libovolné ($\varrho \neq 0$ je faktor úměrnosti). Má tedy každý bod této přímky souřadnice $(-a_2; a_1; x_3)$ [nebo $(a_2; -a_1; x_3)$], které se shodují ve dvou číslech. Obráceně dva body, které se shodují ve dvou souřadnicích a liší ve

[25]) Poněvadž oba základní metrické pojmy, délku a úhel, lze vyjádřiti také dvojpoměry (viz 7., 11. a 12. úlohu), nevyskytují se zásadní potíže ani při vyšetřování metrických vlastností v těchto souřadnicích (mluvíme pak o metrice v projektivních souřadnicích). Zpravidla však toho nečiníme; jde-li o takový druh úlohy (a je-li to vhodné), použijeme trimetrických souřadnic, které — jak víme — jsou geometricky interpretovány obdobně jako souřadnice projektivní.

třetí, leží na přímce jdoucí vrcholem, který má týž index jako souřadnice, v níž se oba body liší.

Přímka (3) obsahuje body $(y_1; y_2; y_3)$, $(z_1; z_2; z_3)$ [stručně: body (y), (z)], jestliže platí

$$\sum_i a_i y_i = 0, \quad \sum_i a_i z_i = 0.$$

Vyloučením koeficientů a_i z těchto dvou rovnic a z rovnice (3) nalezneme rovnici přímky, jdoucí dvěma body, ve tvaru

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

(odůvodněte!), a zároveň také podmínku, aby tři body (x), (y), (z) ležely v přímce. Jsou-li λ_1, λ_2 dvě libovolná čísla různá od nuly, ukazuje determinant (4), že platí

$$\varrho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i, \quad (i = 1, 2, 3); \tag{5}$$

souřadnice bodu na přímce lze tedy vyjádřiti jako lineární kombinaci souhlasných souřadnic dvou jejích libovolných bodů. Obráceně, tři body, z nichž souřadnice jednoho jsou lineární kombinací ostatních dvou, leží v přímce. I vyjadřují rovnice (5) parametricky přímku (s homogenními parametry λ_1, λ_2). Jak by byla přímka vyjádřena parametricky pomocí nehomogenního parametru Λ?

Rovnice

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \sum_i a_i x_i + \lambda_2 \sum_i b_i x_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3); \\ \text{stručněji:} \\ \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0, \left(L_1 \equiv \sum_i a_i x_i = 0, \; L_2 \equiv \sum_i b_i x_i = 0\right), \end{array}\right\} \tag{6}$$

kde λ_1, λ_2 jsou dvě libovolná čísla, vyjadřuje **svazek přímek**; $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ jsou základní přímky svazku, λ_1, λ_2

homogenní parametry svazku, bod určený rovnicemi $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ (jaké má souřadnice?) je střed svazku (6).([24])

C. Souřadnice v přímé řadě bodové. V přímé řadě bodové (na přímce) zvolíme dva různé body O_1, O_2 a další bod J v obecné poloze vůči bodům O_1, O_2. Pak obecný bod P této řady určuje jediný dvojpoměr (O_1O_2JP) v tomto pořadí, a obráceně. Označme hodnotu tohoto dvojpoměru k nebo $\frac{x_2}{x_1}$; i platí podle definice

$$(O_1O_2JP) = \frac{\overline{O_2P} : \overline{O_2J}}{\overline{O_1P} : \overline{O_1J}} = \frac{p_2 : j_2}{p_1 : j_1} = k = \frac{x_2}{x_1}.$$

Projektivní souřadnice bodu v řadě jsou pak definovány rovnicemi

$$\varrho x_1 = \frac{p_1}{j_1}, \ \varrho x_2 = \frac{p_2}{j_2}. \tag{1'}$$

Splynou-li body J a P, je $p_i = j_i$ a $\varrho x_i = 1$, $(i = 1, 2)$; je tedy bod J opět bod jednotkový. A okamžitě vidíme, že rovnice (1′) lze psáti také ve tvaru (2) (ovšem jen pro $i = 1, 2$).

Takto definovány, jsou tyto souřadnice speciálním případem souřadnic v rovině. Můžeme tedy jejich základní vlastnosti uvésti již jen přehledně, přenechávajíce podrobnější prozkoumání čtenáři: Souřadnicovými vrcholy a jednotkovým bodem je projektivní soustava v přímé bodové řadě určena jednoznačně. Souřadnice bodu jsou čísla úměrná vzdálenostem tohoto bodu od souřadnicových vrcholů, měřeným dvěma různými měřítky, která jsou stanovena polohou jednotkového bodu vzhledem k souřadnicovým vrcholům, nebo čísla úměrná vzdálenostem tohoto bodu od souřadnicových vrcholů, násobeným dvěma různými (ale jinak pevnými) konstantami. Bod O_1 má souřadnice (1; 0); podobně O_2 (0; 1), J (1; 1). Lineární homogenní vztah

$$a \equiv \sum_i a_i x_i = 0, \ (i = 1, 2) \tag{3'}$$

vyjadřuje bod $(-a_2; a_1)$ [nebo $(a_2; -a_1)$].([25])

Další vlastnosti v úlohách: 1—8.

Použití bodových souřadnic. A. Vyjádření dvojpoměru souřadnicemi a parametrem. Buďtež dány čtyři body přímé řady bodové: X_i $(x_{1i}; x_{2i})$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Podle definice projektivních souřadnic v přímé řadě bodové je $(O_1 O_2 J \underset{i}{X}) = \underset{i}{x_2} : \underset{i}{x_1}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, takže (podle výsledku 4. úlohy) platí

$$(\underset{1\,2\,3\,4}{XXXX}) = \frac{\underset{1}{x_2}\underset{3}{x_1} - \underset{1}{x_1}\underset{3}{x_2}}{\underset{2}{x_2}\underset{3}{x_1} - \underset{2}{x_1}\underset{3}{x_2}} : \frac{\underset{1}{x_2}\underset{4}{x_1} - \underset{1}{x_1}\underset{4}{x_2}}{\underset{2}{x_2}\underset{4}{x_1} - \underset{2}{x_1}\underset{4}{x_2}}; \tag{7}$$

tímto způsobem je dvojpoměr čtyř bodů $\underset{i}{X}$ vyjádřen jejich souřadnicemi.

Podle předcházejícího odstavce vyjádřeme dva body A, B řady rovnicemi $a = 0$, $b = 0$, a uvažujme lineární kombinaci těchto rovnic, t. j. rovnici

$$c \equiv \lambda_1 a + \lambda_2 b = 0.$$

Tato rovnice opět vyjadřuje jiný bod řady (který?); nazýváme proto λ_1, λ_2 homogenní parametry v řadě. Obecný bod řady (x) lze však jinak vyjádřiti také pomocí dvou jiných bodů řady (y) a (z) rovnicemi

$$\varrho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i, \; (i = 1, 2). \tag{5'}$$

Jsou-li totiž body (x), (y), (z) dány svými souřadnicemi, lze [za předpokladu, že $y_1 z_2 - y_2 z_1 \neq 0$ (co značí?)] určiti z rovnic (5′) čísla λ_1, λ_2; obráceně, je-li dána dvojice čísel λ_1, λ_2, existuje jediný bod (x), jehož souřadnice jsou vyjádřeny rovnicemi (5′). Body (y), (z) slovou základní body řady; λ_1, λ_2 jsou opět homogenní parametry bodu v řadě.

Na základě rovnice (7) snadno dokážeme, že dvojpoměr čtyř bodů řady (pro jednoduchost se omezíme na nehomogenní parametry)

$$a + \Lambda_i b = 0 \text{ resp. } \underset{i}{\varrho_i} x_k = y_k + \Lambda_i z_k \; (i = 1, 2, 3, 4;\, k = 1, 2) \tag{8'}$$

je pomocí parametrů vyjádřen výrazem

$$\frac{\Lambda_1 - \Lambda_3}{\Lambda_2 - \Lambda_3} : \frac{\Lambda_1 - \Lambda_4}{\Lambda_2 - \Lambda_4}. \tag{8''}$$

Vyjádření s homogenními parametry přenecháváme čtenáři.

B. Parametr v bodové řadě a ve svazku přímek. Bodová řada budiž vyjádřena rovnicí (s homogenními parametry λ_1, λ_2)

$$\varrho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i, \; (i = 1, 2, 3).$$

Pro bod (y) je $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, pro bod (z) je $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, pro bod (x) budiž $\lambda_1 = \underset{1}{\lambda_1}$, $\lambda_2 = \underset{1}{\lambda_2}$, pro jiný obecný bod řady $('x)$ budiž $\lambda_1 = \underset{2}{\lambda_1}$, $\lambda_2 = \underset{2}{\lambda_2}$. I je podle předcházejícího odstavce

$$(yz\,x\,'x) = \frac{\Lambda_1 - \Lambda_3}{\Lambda_2 - \Lambda_3} : \frac{\Lambda_1 - \Lambda_4}{\Lambda_2 - \Lambda_4},$$

čili — zavedeme-li homogenní parametry místo nehomogenních

$$(yzx\,'x) = \frac{\underset{2}{\lambda_1}}{\underset{2}{\lambda_2}} : \frac{\underset{1}{\lambda_1}}{\underset{1}{\lambda_2}};$$

dvojpoměr dvou bodů řady vzhledem k bodům základním se rovná podílu jejich parametrů.[26]) Speciálně bod (x^*), jehož souřadnice jsou

$$\varrho x_i^* = \lambda_1 y_i - \lambda_2 z_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

značí bod harmonicky sdružený s bodem (x) vzhledem k bodům (y), (z) (proveďte podrobněji!).

Body přímky (5) promítněme z obecného bodu (u)! Rovnice těchto promítajících přímek tedy zní

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1 & \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2 & \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

a lze ji upraviti na tvar $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$, kdež

$$L_1 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \quad L_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

jsou rovnice přímek, které promítají z bodu (u) základní body řady (5). Vidíme tedy, že přímky, které z obecného bodu promítají bodovou řadu, tvoří svazek (v němž základními jsou ony přímky, které promítají základní body řady), parametr ve svazku je týž, jako v bodové řadě. A to tedy znamená, že vlastnosti bodové řady, o nichž jsme mluvili na počátku tohoto odstavce, můžeme jednoduše přenésti i na svazek přímek. Tedy na př.: dvojpoměr dvou přímek svazku vzhledem k základním přímkám se rovná podílu jejich parametrů (dvojpoměr čtyř přímek svazku se rovná dvojpoměru jejich parametrů

[26]) A obecněji, dvojpoměr čtyř bodů řady rovná se dvojpoměru jejich parametrů v témž pořadí (dokažte!).

v témže pořadí), a speciálně přímka s rovnicí

$$\lambda_1 L_1 - \lambda_2 L_2 = 0$$

vyjadřuje přímku svazku, harmonicky sdruženou s přímkou $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$ vzhledem k základním přímkám $L_1 = 0$, $L_2 = 0$.

C. Harmonický pól a polára. Souřadnicová soustava budiž určena trojúhelníkem $O_1O_2O_3$ a jednotkovým bodem J. Označme J_i průměty bodu J z vrcholů O_i do protější osy; je tedy

$$J\,(1; 1; 1);\ J_1\,(0; 1; 1),\ J_2\,(1; 0; 1),\ J_3\,(1; 1; 0).$$

Poněvadž bod J_1 leží na přímce O_2O_3, lze jeho souřadnice vyjádřiti ve tvaru (5) takto:

$$\varrho\,.\,0 = \lambda_1\,.\,0 + \lambda_2\,.\,0, \varrho\,.\,1 = \lambda_1\,.\,1 + \lambda_2\,.\,0, \varrho\,.\,1 = \lambda_1\,.\,0 + \lambda_2\,.\,1,$$

takže

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \varrho;$$

pro bod J^*_1, s ním harmonicky sdružený vzhledem k bodům O_2, O_3 tedy platí: $J^*_1\,(0; \lambda_1; -\lambda_2)$ (odůvodněte!) čili

$$J^*_1\,(0; -1; 1),\ \text{a podobně}\ J^*_2\,(-1; 0; 1),\ J^*_3\,(-1; 1; 0).$$

Snadno se přesvědčíme, že body J^*_1, J^*_2, J^*_3 leží v přímce, jejíž rovnice zní

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Přímka ta se nazývá harmonickou polárou bodu J vzhledem k trojúhelníku $O_1O_2O_3$. Vyslovte větou její vlastnost! Dokažte větu obrácenou: Protneme-li příčkou p strany trojúhelníka $O_1O_2O_3$ v bodech J^*_1, J^*_2, J^*_3 a sestrojíme-li k těmto bodům body harmonicky sdružené J_1, J_2, J_3 vzhledem k vrcholům trojúhelníka, prochází spojnice těchto bodů s protilehlými vrcholy trojúhelníka jedním bodem (harmonickým pólem uvažovaného trojúhelníka vzhledem k příčce p)!

Úlohy k tomuto odstavci: 9—14.

Souřadnice přímky. A. Definice. Jako projektivní souřadnice přímky ξ_i definujeme čísla úměrná koeficientům a_i v rovnici přímky (3). Každou trojicí čísel x_i (s výjimkou trojice 0, 0, 0) nebo čísel jim úměrných je určen jediný bod; každou trojicí čísel a_i (opět s výjimkou trojice 0, 0, 0), nebo čísel jim úměrných, je určena jediná přímka. Obráceně — jak již ostatně víme — obecným bodem není určena jediná trojice čísel x_i, nýbrž nekonečně mnoho trojic navzájem úměrných; podobně obecnou přímkou není určena jediná trojice ξ_i, nýbrž nekonečně mnoho trojic navzájem úměrných. Jednotkový bod J má souřadnice (1; 1; 1), podobně jednotková přímka j má souřadnice [1; 1; 1]; odtud (a vzhledem k výsledkům předcházejícího odstavce) vidíme, že bod J a přímka j jsou harmonickými útvary vzhledem k souřadnicovému trojúhelníku.

Incidence bodu (x) a přímky $[\xi]$ je vyjádřena rovnicí

$$\sum_i \xi_i x_i = 0, \ (i = 1, 2, 3); \tag{9}$$

tato rovnice je zároveň analytickým vyjádřením zákona duality v projektivních souřadnicích. Jsou-li čísla ξ_k pevná, pak ukazuje rovnice (9), že všechny body (x), jejichž souřadnice této rovnici vyhovují, leží na přímce vyjádřené rovnicí (9). Jsou-li čísla x_k pevná, ukazuje tato rovnice, že všechny přímky $[\xi]$, jejichž souřadnice této rovnici vyhovují, procházejí bodem vyjádřeným rovnicí (9). Při proměnných ξ_k otáčí se přímka $[\xi]$ kolem bodu (x) a rovnice (9) je rovnicí tohoto bodu. Při proměnných x_k je obdobně rovnice (9) rovnicí přímky jakožto spojnice všech bodů, které na ní leží.

B. Geometrická definice přímkových souřadnic. Projektivní souřadnice přímky lze definovati také geometricky. Zvolme tři základní přímky (souřadnicové osy) o_1, o_2, o_3 v obecné poloze (obr. 14) a další přímku j v obecné poloze k nim. I bude obecná přímka p určena, budeme-li znáti její průsečíky s dvěma základními přímkami, na př. s o_1 a o_2. Označme O_1, O_2, O_3 průsečíky os, průsečíky přímky j s osami J_1, J_2, J_3, průsečíky p s osami P_1, P_2, P_3! Průsečíky P_i jsou jednoznačně určeny dvojpoměry

$$P_1 \ldots o_1 (o_2 o_3 j p) = (O_3 O_2 J_1 P_1) \text{ atd.}$$

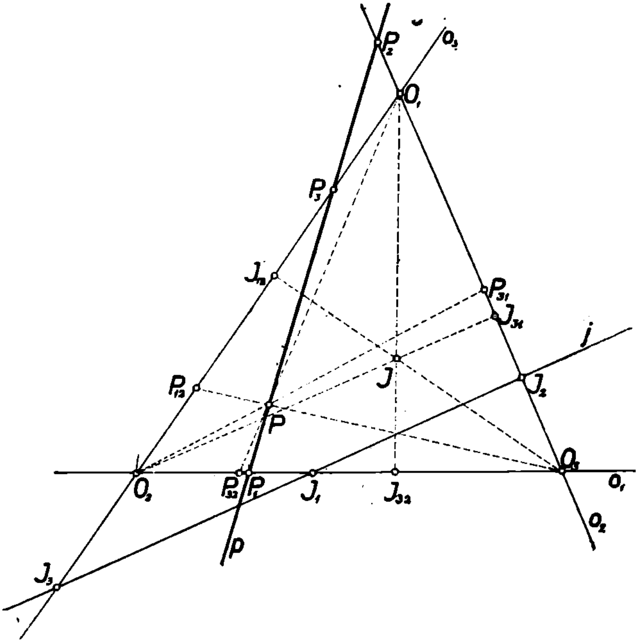
Označíme-li ι_i resp. π_i délky kolmic (měřené obvyklým měřítkem), spuštěných z bodů O_i na přímky j resp. p,[27]) pak vidíme, že platí

[27]) Jako u souřadnic bodových, tak i zde mohli bychom obecněji měřit tyto délky v jistých daných směrech.

$$o_1(o_2o_3jp) = (O_3O_2J_1P_1) = \frac{\overline{O_3J_1}}{\overline{O_2J_1}} : \frac{\overline{O_3P_1}}{\overline{O_2P_1}} = \frac{\iota_3}{\iota_2} : \frac{\pi_3}{\pi_2} = \frac{\pi_2}{\iota_2} : \frac{\pi_3}{\iota_3} \text{ atd.}$$

Položme nyní

$$\varkappa_1 = o_1(o_2o_3jp) = \frac{\pi_2}{\iota_2} : \frac{\pi_3}{\iota_3} = \frac{\xi_2}{\xi_3} \text{ atd.;}$$



Obr. 14.

pak veličiny ξ_i jsou projektivní souřadnice přímky. Jsou tedy definovány rovnicemi

$$\varrho\xi_i = \frac{\pi_i}{\iota_i}, \ (i = 1, 2, 3). \tag{10}$$

O dvojpoměrech $\varkappa_i$ platí opět $\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 = 1$.

Zbývá ovšem dokázati, že přímkové souřadnice, definované tímto způsobem geometricky, jsou tytéž, které jsme zavedli v předcházejícím odstavci definicí analytickou. Za tím účelem musíme předpokládati, že trojúhelník souřadnic bodových splyne s trojúhelníkem souřadnic přímkových (viz obr. 14). Vztah mezi J a j je určen dvojpoměry

$$(O_1O_2J_3J_{12}),\ (O_2O_3J_1J_{23}),\ (O_3O_1J_2J_{31}).$$

Zvolme nyní J a j v takové vzájemné poloze, aby tyto dvojpoměry byly harmonické, čili aby přímka j byla harmonickou polárou bodu J vzhledem k trojúhelníku $O_1O_2O_3$. Pak ale pro bod P platí

$$k_1 = O_1\,(O_2O_3JP) = (O_2O_3J_{32}P_{32}) = \frac{x_2}{x_3} \text{ atd.},$$

pro přímku p

$$\varkappa_1 = o_1\,(o_2o_3jp) = (O_2O_3J_1P_1) = \frac{\xi_2}{\xi_3} \text{ atd.}$$

Z těchto vztahů odvodíme

$$(O_2O_3J_{32}P_{32}) \,.\, (O_3O_2J_1P_1) \,.\, (O_2O_3J_1J_{32}) =$$
$$= \frac{\overline{O_2P_1}}{\overline{O_3P_1}} : \frac{\overline{O_2P_{32}}}{\overline{O_3P_{32}}} = (O_2O_3P_1P_{32}),$$

a poněvadž podle naší volby je $(O_2O_3J_1J_{32}) = -1$, nalézáme tak vztahy

$$-\frac{x_2}{x_3} \,.\, \frac{\xi_2}{\xi_3} = (O_2O_3P_1P_{32}) \text{ atd.}$$

Bod P však leží na přímce p; tedy promítneme-li z bodu P body O_2, O_3, P_1, P_{32} na přímku o_2, platí

$$(O_2O_3P_1P_{32}) = (P_{31}O_3P_2O_1) \text{ atd.}$$

Dále je (podle známých vlastností dvojpoměru; viz také 1. úlohu!)

$$(P_{31}O_3P_2O_1) = 1 - (O_1O_3P_2P_{31}) = 1 - \frac{1}{(O_3O_1P_2P_{31})} \text{ atd.}$$

čili

$$-\frac{x_2}{x_3} \,.\, \frac{\xi_2}{\xi_3} = 1 + \frac{x_1}{x_3}\,\frac{\xi_1}{\xi_3}.$$

To však je podmínka incidence (9) útvarů p a P, jak jsme měli dokázati.

Obě definice souřadnic ξ_i jsou tedy identické, jestliže oba souřadnicové trojúhelníky splynou a jestliže jednotkové útvary jsou v harmonické poloze vzhledem k základnímu trojúhelníku. Pak je také $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ rovnice jednotkové přímky [1; 1; 1], $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$ rovnice jednotkového bodu (1; 1; 1).([26])

Úlohy k tomuto odstavci: 15.—19.

Transformace projektivních souřadnic. A. Transformace bodových souřadnic. Lineární substituce v proměnných x_1, x_2, x_3, která je vyjádřena rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, 'x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \varrho\, 'x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \varrho\, 'x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \\ (\text{stručně: } \varrho\, 'x_i &= \sum_k a_{ik}x_k, \quad i, k = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

převádí bod (x) v bod $('x)$. Má-li vyjadřovati transformaci projektivních souřadnic, musí obráceně převáděti bod $('x)$ jednoznačně v původní bod (x). Nutná a postačující podmínka pro to je, aby soustava (11) byla řešitelná i podle proměnných x_i, t. j., aby determinant soustavy (modul substituce) $A \equiv |a_{ik}|$ byl různý od nuly. Je-li tomu tak, pak je obráceně

$$\frac{A}{\varrho}\, x_i = \sum_k A_{ki}\, 'x_k, \tag{12}$$

při čemž A_{ki} značí doplněk prvku a_{ki} v determinantu A (proveďte podrobněji!).

Pak obecnému bodu (x) odpovídá jeden bod $('x)$, a obráceně. Souřadnicové osy původní soustavy, určené rovnicemi $x_i = 0$, transformují se v přímky $\sum_k A_{ki}\, 'x_k = 0$, nové souřadnicové osy $'x_i = 0$ jsou v původní soustavě vyjádřeny rovnicemi $\sum_k a_{ik}x_k = 0$.

B. Transformace přímkových souřadnic. Podle úvah předcházejícího odstavce transformují se body přímky $\sum_i \xi_i x_i = 0$ v body přímky $\sum_k {}'\xi_k\,{}'x_k = 0$. Abychom nalezli explicitní výrazy pro $'\xi_k$, dosaďme do rovnice původní přímky z rovnic (12). Obdržíme

$$\sum_i \left\{ \xi_i \sum_k A_{ki}\,{}'x_k \right\} = 0,$$

což lze také psáti (proveďte podrobněji!)

$$\sum_i \sum_k \xi_i A_{ki}\,{}'x_k \equiv \sum_k \sum_i \xi_i A_{ki}\,{}'x_k \equiv \sum_k \left\{ {}'x_k \sum_i \xi_i A_{ki} \right\} = 0.$$

Proto
$$\varrho\,{}'\xi_k = \sum_i \xi_i A_{ki}. \tag{13}$$

A obráceně (proveďte podrobněji!) nalezneme

$$\varrho \xi_i = \sum_k {}'\xi_k a_{ki}. \tag{14}$$

Rovnice (13), (14) vyjadřují transformaci přímkových souřadnic. Srovnáme-li je s rovnicemi (11), (12) pozorujeme, že transformace přímkových souřadnic vyplývá z transformace bodových souřadnic, když proměnné x nahradíme proměnnými ξ, a koeficienty a_{ik} doplňky A_{ik}, a obráceně. Dále vidíme, že veličiny x vyjadřují se veličinami $'x$ stejně, jako veličiny $'\xi$ veličinami ξ, až na to, že indexy u koeficientů jejich jsou vzájemně zaměněny. Pravíme stručně, že transformace přímkových souřadnic je kontragredientní k transformaci bodových souřadnic.([27])

Úlohy k tomuto odstavci: 20—29.

Úlohy ke cvičení.

1. Napište hodnoty všech dvojpoměrů, které lze vytvořiti ze čtyř různých bodů ležících v přímce!

[$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = k$; $(ABDC) = (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = \frac{1}{k}$ (t. zv. reciproký dvojpoměr); $(ACBD) = (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = 1 - k$ (komplementární dvojpoměr); $(ACDB) = (CABD) = (BDCA) = (DBAC) = \frac{1}{1-k}$ (dvojpoměr reciproký ke komplementárnímu); $(ADCB) = (DABC) = (CBAD) = (BCDA) = \frac{k}{k-1}$; $(ADBC) = (DACB) = (CBDA) = (BCAD) = \frac{k-1}{k}$ (dvojpoměr komplementární k reciprokému). Vyslovte tyto vlastnosti dvojpoměru větami!]

2. Jak se zjednoduší výsledek předcházející úlohy, jestliže $(ABCD)$ je rovno a) 1, b) -1. c) Jak je tomu v případě, když žádáme, aby základní dvojpoměr byl rovný dvojpoměru reciprokému ke komplementárnímu nebo rovný dvojpoměru komplementárnímu k reciprokému?

[a) 6 hodnot se redukuje na 3 $(1, 0, \infty)$; body A, B, C, D nejsou již vesměs různé, b) 3 hodnoty $(-1, 2, \frac{1}{2})$; body A, B, C, D tvoří harmonickou čtveřinu v pořadí $(ABCD)$ [nebo $(CDAB)$]. c) $(ABCD) = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) = \sqrt[3]{-1}$, čtveřina je ekvianharmonická; body A, B, C, D nejsou ovšem všechny reálné.]

3. Ukažte, že platí $(ABCD) = -\mathrm{tg}^2 \frac{\varkappa}{2}$, $(ABDC) = -\mathrm{cotg}^2 \frac{\varkappa}{2}$, $(ACBD) = -\sec^2 \frac{\varkappa}{2}$, $(ACDB) = \cos^2 \frac{\varkappa}{2}$, $(ADCB) = \sin^2 \frac{\varkappa}{2}$, $(ADBC) = \mathrm{cosec}^2 \frac{\varkappa}{2}$ (udal Casey)!

[Ve výsledcích 1. úlohy položte $k = -\mathrm{tg}^2 \frac{\varkappa}{2}$!]

4. Dvojpoměr $(DEFG)$ vyjádřete hodnotami dvojpoměrů $(ABCD)$, $(ABCE)$, $(ABCF)$, $(ABCG)$!

[Jsou-li hodnoty daných dvojpoměrů k_1, k_2, k_3, k_4, je $(DEFG) = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4}$. (29)]

5. Vyšetřete souřadnice v přímé řadě bodové, jestliže jednotkový bod je nevlastním bodem přímky O_1O_2!

[$\varrho x_i = \overline{O_iP}$; dvojpoměr se redukuje na dělicí poměr.]

6. Touž úvahu proveďte v případě, že jednotkový bod půlí úsečku $\overline{O_1O_2}$!

[$\varrho x_1 = -\overline{O_1P}$, $\varrho x_2 = \overline{O_2P}$; po vyloučení ϱ plyne odtud $\sum_i \overline{O_iP} \cdot \mu_i = 0$ ($i = 1, 2$), kde $\mu_i = x_i^{-1}$ (barycentrické souřadnice).]

7. Touž úvahu proveďte pro případ, že jeden souřadnicový vrchol je nevlastním bodem přímky O_1O_2. Na základě výsledku vyjádřete eukleidovský pojem délky dvojpoměrem!

[$\varrho x_1 = \overline{O_2J}$, $\varrho x_2 = \overline{O_2P}$; zvolíme-li $\overline{O_2J} = 1$, je $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{\overline{O_2P}}{1} = x$, kartézské souřadnici bodu na přímce. A tedy $x = (\infty, 0, 1, x)$.]

8. Úlohy 6. a 7. rozšiřte na případ rovinných souřadnic!

[Je-li těžiště souřadnicového trojúhelníka jednotkovým bodem, přejdou projektivní souřadnice na barycentrické. Jestliže osa O_1O_2 leží v nekonečnu, je $p_{12} : \bar{p}_{12} = 1$, a pro $\varrho = 1$ dospíváme ke kartézským souřadnicím bodu v rovině.]

9. Dokažte, že parametry bodu v řadě [vyjádřené rovnicí (5′)] jsou projektivní souřadnice tohoto bodu vzhledem k základním bodům řady jakožto souřadnicovým vrcholům a vzhledem k bodu $(y_1 + z_1;\ y_2 + z_2)$ jako bodu jednotkovému!

10. Ukažte, že okolnost, že dvojice bodů v řadě nebo dvojice přímek ve svazku jsou základními útvary, není podstatná, t. j. že za základní body nebo za základní přímky můžeme zvolit dvojice libovolné!

11. Napište výraz pro dvojpoměr čtyř přímek $x^2 + y^2 = 0$ čili $x \pm iy = 0$ $(i = \sqrt{-1})$ a $y - k_1x = 0$, $y - k_2x = 0$, vzatých v tomto pořadí!

[Považujte pro okamžik x, y za projektivní souřadnice bodu v řadě! Pak $\left(i, -i, -\dfrac{1}{k_1}, -\dfrac{1}{k_2}\right) = [1 + k_1k_2 + i\,(k_1 - k_2)] :$ $: [1 + k_1k_2 - i\,(k_1 - k_2)]$.]

12. Na základě výsledku předcházející úlohy dokažte, že úhel φ dvou přímek, jejichž směrnice jsou k_1, k_2, lze vyjádřiti vzorcem (Laguerreovým)

$$\varphi = \frac{i}{2} \log\,(i, -i, k_1, k_2)!$$

[Dokážeme nejprve, že $\left(i, -i, -\frac{1}{k_1}, -\frac{1}{k_2}\right) = (1 - i \operatorname{tg} \varphi) : (1 + i \operatorname{tg} \varphi) = \cos 2\varphi - i \sin 2\varphi = e^{-2i\varphi}$ (podle vzorce Eulerova). A tedy $\varphi = \frac{i}{2} \log \left(i, -i, -\frac{1}{k_1}, -\frac{1}{k_2}\right)$, což — až na malou úpravu — je již Laguerreův vzorec.([29])]

13. Dokažte: Spojíme-li obecný bod P s vrcholy trojúhelníka $O_1O_2O_3$ a sestrojíme-li k těmto spojnicím harmonicky sdružené přímky vzhledem k příslušným stranám trojúhelníka, leží průsečíky těchto přímek s protilehlými stranami trojúhelníka v jedné přímce (harmonické poláře čili harmonikále uvažovaného trojúhelníka vzhledem k bodu P)!

14. Analyticky potvrďte harmonické vlastnosti úplného čtyřrohu: a) Každým diagonálním rohem čtyřrohu procházejí dvě strany čtyřrohu a dvě strany diagonálního třírohu; tyto čtyři přímky tvoří v uvedeném pořadí harmonickou čtveřinu. b) Každé dva diagonální rohy tvoří harmonickou čtveřinu s těmi body čtyřrohu, které leží na jejich spojnici!([30])

15. Jaké souřadnice mají souřadnicové osy? Napište rovnice souřadnicových vrcholů!

[O_2O_3 [1; 0; 0] atd. Vrchol O_i má rovnici $\xi_i = 0$ atd.]

16. Vyslovte větu duální k větě: Dvě přímky $\sum_i a_i x_i = 0$, $\sum_i b_i x_i = 0$ se protínají v bodě

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} !$$

Rovnice průsečíku těchto přímek zní

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0!$$

18. Totéž pro větu: Souřadnice bodu v řadě jsou vyjádřeny rovnicemi

$$\varrho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i, \ (i = 1, 2, 3)!$$

[Souřadnice přímky ve svazku $\lambda_1 \sum_i a_i x_i + \lambda_2 \sum_i b_i x_i = 0$ jsou $\varrho \xi_i = \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i$.]

19. Totéž pro větu: Tři body (a), (b), (c) leží v přímce, jestliže

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0!$$

20. Jak se lineární substitucí (11) a (12) transformují jednotkové body?

21. Dokažte, že dvojpoměr čtyř bodů přímky je invariant projektivní transformace (lineární regulární substituce)!

[Přímka $\varrho x_k = \lambda_1 y_k + \lambda_2 z_k$ přejde transformací (11) v přímku $\varrho' x_i = \lambda_1 ' y_i + \lambda_2 ' z_i$, v jejíž rovnici jsou tytéž parametry, jako v původní. Dvojpoměr čtyř bodů přímky však závisí pouze na hodnotách λ_1, λ_2.]

22. Obdobně dokažte, že dvojpoměr čtyř přímek svazku je invariant projektivní transformace!

23. Kterými rovnicemi je vyjádřena identická transformace?

$$[\varrho' x_i = x_i]$$

24. Napište rovnice, jimiž se transformuje pouze jednotkový bod!

$$[\varrho' x_i = a_{ii} x_i]$$

25. Dokažte, že dvě projektivní transformace po sobě jdoucí můžeme nahraditi jedinou transformací!

[Z rovnic $\varrho' x_i = \sum\limits_k a_{ik} x_k$, $\varrho'' x_i = \sum\limits_k b_{ik} x_k$ plyne $\varrho' x_i = \sum\limits_{k,j} a_{ik} B_{jk} '' x_j$, $\varrho'' x_i = \sum\limits_{k,j} b_{ik} A_{jk} ' x_j$]

26. Projektivní transformace tvoří grupu. Dokažte! Jaký invariant má tato grupa?

[Věta vyplývá z výsledků 23. a 25. úlohy a z existence inversní transformace. Dvojpoměr (viz 21. a 22. úlohu). [37]]

27. Napište transformaci, která převádí obecnou kartézskou soustavu v obecnou soustavu projektivní!

[Kartézská soustava — jako zvláštní případ soustavy projektivní (viz 8. úlohu) — budiž určena body O_1 $(x_2 = x_3 = 0)$, O_2 $(x_3 = x_1 = 0)$, O_3 $(x_1 = x_2 = 0)$ (počátek), J $(x_1 = x_2 = x_3)$; projektivní soustava budiž určena body $'O_i$ $(\lambda_{1i}; \lambda_{2i}; \lambda_{3i})$ $(i = 1, 2, 3)$, $'J$ $(j_1; j_2; j_3)$. Transformace, která převádí O_i v $'O_i$, splňuje vztahy $a_{ik} = \tau_k \lambda_{ik}$ (9 rovnic), transformace, která provádí J v $'J$ splňuje vztahy $\varrho j_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$ (3 rovnice). Má tedy hledaná transformace tvar

$$\varrho\, 'x_i = \sum_k \tau_k \lambda_{ik} x_k. \text{ (}^{32}\text{)]}$$

28. Co vytvořují průsečíky odpovídajících si přímek ve svazcích $\lambda_1 \sum_i a_i x_i + \lambda_2 \sum_i b_i x_i = 0$, $\lambda_1 \sum_i a_i\, 'x_i' + \lambda_2 \sum_i b_i\, 'x_i = 0$?

[Za předpokladu, že oba svazky jsou různé, dostaneme vyloučením parametrů kuželosečku. Vyšetřete některé její vlastnosti!]

29. Obdobnou úlohu proveďte pro souřadnice přímkové!

[Kuželosečka jako obálka svých tečen!]