O souřadnicích v rovině

III. Trimetrické a tetracyklické souřadnice

In: Zdeněk Pírko (author): O souřadnicích v rovině. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 40–58.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403010

III.

TRIMETRICKÉ A TETRACYKLICKÉ SOUŘADNICE.

Vyjádření bodu (přímky) pomocí tří bodů (přímek). A. Souřadnice bodu. V základní soustavě pravoúhlé buďtež dány tři body rovnicemi

$$B_i \equiv a_i u + b_i v + c_i = 0, \quad i = 1, 2, 3; \tag{1}$$

jsou tedy jejich souřadnice $(a_i : c_i; b_i : c_i)$. Předpokládáme-li, že tyto body jsou v obecné poloze, pak determinant D soustavy (1) je různý od nuly (odůvodněte!) a rovnici každého dalšího bodu $B \equiv au + bv + c = 0$ lze vyjádřiti jako lineární kombinaci daných tří bodů, t. j. ve tvaru

$$B \equiv \sum_{k=1}^{3} l_k B_k = 0. \tag{2}$$

Jsou-li dána čísla l_i, je B bodem roviny; obráceně, jsou-li dány body B_i, pak po rozepsání této rovnice a po srovnání odpovídajících si členů obdržíme soustavu

$$\Sigma l_k a_k = \varrho a, \ \Sigma l_k b_k = \varrho b, \ \Sigma l_k c_k = \varrho c, \tag{3}$$

kde $\varrho \neq 0$ je koeficient úměrnosti, z níž lze vypočísti trojici l_1, l_2, l_3. Učiňte tak!

I určuje každá trojice l_i (s výjimkou trojice 0, 0, 0) a každá trojice s ní úměrná ϱl_i ($\varrho \neq 0$) jediný bod; obráceně, obecný bod určuje nekonečně mnoho trojic ϱl_i, navzájem úměrných [jsou to řešení soustavy (3), násobená libovolným koeficientem $\varrho \neq 0$]. Mají tedy čísla l_i vlastnosti homogenních bodových souřadnic; slují trojbodové souřadnice bodu.

Z rovnic (2) plyne

$$Dl_1 = \varrho \begin{vmatrix} a & a_2 & a_3 \\ b & b_2 & b_3 \\ c & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ a dva vztahy další,}$$

dále, označíme-li obsah trojúhelníka $B_1B_2B_3$ symbolem $(B_1B_2B_3)$ atd., je

$$2\,(B_1B_2B_3) = \frac{1}{c_1c_2c_3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Platí tedy

$$l_1 = \varrho\,\frac{c}{c_1}\,\frac{(BB_2B_3)}{(B_1B_2B_3)} \text{ a dva vztahy další,}$$

a poněvadž $(BB_2B_3) = \frac{1}{2}\overline{B_2B_3}\,.\,d_1$, kde d_1 je délka kolmice, spuštěné s bodu B na stranu B_2B_3 atd., je posléze

$$l_1 = \varrho\,\frac{c}{c_1}\,\frac{\overline{B_2B_3}}{2\,(B_1B_2B_3)}\,.\,d_1 \text{ a dva další vztahy,}$$

$$l_2 = \varrho\,\frac{c}{c_2}\,\frac{\overline{B_3B_1}}{2\,(B_1B_2B_3)}\,.\,d_2,$$

$$l_3 = \varrho\,\frac{c}{c_3}\,\frac{\overline{B_1B_2}}{2\,(B_1B_2B_3)}\,.\,d_3.$$

I jsou trojbodové souřadnice čísla úměrná vzdálenostem bodu od stran trojúhelníka, který tvoří základní body.

B. **Souřadnice přímky.** Jsou-li dány tři přímky v obecné poloze

$$p_i \equiv a_ix + b_iy + c_i = 0,\ i = 1, 2, 3,\ (D \neq 0), \qquad (1')$$

lze rovnici každé další přímky vyjádřiti jako lineární kombinaci

$$p \equiv \sum_{k=1}^{3} \lambda_k p_k = 0, \qquad (2')$$

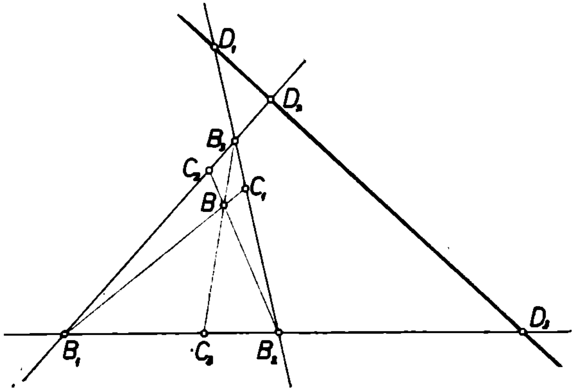
při čemž čísla λ_k jsou určena rovnicemi

$$\Sigma\lambda_k a_k = \varrho a,\ \Sigma\lambda_k b_k = \varrho b,\ \Sigma\lambda_k c_k = \varrho c,\ (\varrho \neq 0). \qquad (3')$$

Čísla λ_i slují **trojpřímkové souřadnice přímky.**

C. **Harmonická polára a harmonický pól.** Ukážeme si na příkladě, jak používáme trojbodových a trojpřímkových souřadnic.

Promítněme obecný bod $B\,(l_1\!:\!l_2\!:\!l_3)$ ze základních bodů B_i na přímky B_jB_k; vzniknou tak body C_i, $i, j, k = 1, 2, 3$ (viz obr. 7). Ke každému průmětu C_i stanovme na přímce B_jB_k harmonicky sdružený bod D_i vzhledem k bodům B_j, B_k. Poněvadž



Obr. 7.

bod C_1 leží na spojnici B_2B_3, je jeho rovnice tvaru $C_1 \equiv m_2B_2 + m_3B_3 = 0$, poněvadž leží na spojnici BB_1, je také tvaru $C_1 \equiv nB + n_1B_1 = 0$ čili $C_1 \equiv (nl_1 + n_1)\,B_1 + nl_2B_2 + nl_3B_3 = 0$. Musí tedy býti $nl_1 + n_1 = 0$ a dále $l_2 : l_3 = m_2 : m_3$, takže rovnice bodu C_1 je $C_1 \equiv l_2B_2 + l_3B_3 = 0$. Má tudíž bod D_1 rovnici[15])

$$D_1 \equiv l_2B_2 - l_3B_3 \equiv (l_2a_2 - l_3a_3)\,u + (l_2b_2 - l_3b_3)\,v + + (l_2c_2 - l_3c_3) = 0;$$

podobné výrazy nalezneme i pro body D_2 a D_3. Snadno se přesvědčíme, že determinant těchto tří rovnic je identicky

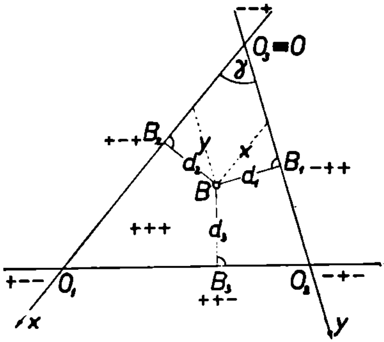
[15]) Bod, který je v přímé řadě bodové o základních bodech $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ harmonicky sdružen s obecným bodem řady $l_1B_1 + l_2B_2 = 0$ vzhledem k oběma základním, má rovnici $l_1B_1 - l_2B_2 = 0$. A duálně.

rovný nule; leží proto tři body D_i v jedné přímce, která sluje **harmonická polára** nebo stručně **harmonikála** bodu B vzhledem k trojúhelníku (třírohu) $B_1B_2B_3$. Vyslovte větou vlastnost této přímky; napište její rovnici!

Duální úvahou k úvaze právě provedené, kterou přenecháváme čtenáři, dospíváme k pojmu **harmonického pólu** poláry p vzhledem k trojstranu $p_1p_2p_3$.(11)

Úlohy k tomuto odstavci: 1—5.

Normální souřadnice. A. **Absolutní souřadnice bodu.** Geometrická interpretace trojbodových souřadnic vede nás k tomuto určení polohy bodu: Zvolíme tři body O_1, O_2, O_3, které neleží v jedné přímce (symboly a, b, c, α β, γ atd. označíme příslušné veličiny trojúhelníka $O_1O_2O_3$, tedy $a = \overline{O_2O_3}$, $\alpha = O_2\widehat{O_1}O_3$ atd.). Pak obecný bod B určuje tři čísla $d_1 = \overline{BB_1}$, $d_2 = \overline{BB_2}$, $d_3 = \overline{BB_3}$ (viz obr. 8). Jednojednoznačná korespondence mezi bodem B a trojicí čísel d_i vyžaduje ovšem, abychom vzdálenosti d_i orientovali. To činíme takto: Trojúhelník $O_1O_2O_3$ dělí rovinu v sedm polí; bodům ve vnitřním poli přisuzujeme čísla d_i vesměs kladná, v ostatních polích jsou čísla d_i kladná a záporná podle toho, zda bod B leží vzhledem k odpovídající straně trojúhelníka $O_1O_2O_3$ na téže straně jako protilehlý vrchol nebo na straně opačné. Je však ihned patrno, že obráceně je poloha obecného bodu již určena, známe-li jen dvě z tří čísel d_i. I musí platit mezi čísly d_i nějaký vztah; ten vyplývá z rovnice [symboly $(O_1O_2O_3)$ atd. mají týž význam,



Obr. 8.

jako v předcházejícím odstavc

$$(O_1O_2O_3) = (BO_2O_3) + (O_1BO_3) + (O_1O_2B),$$

která platí pro každý bod B (odůvodněte!), a zní tedy

$$ad_1 + bd_2 + cd_3 = 2\Delta.\text{[16]} \qquad (4)$$

Čísla d_i, která splňují vztah (4), nazývají se **absolutní normální souřadnice bodu**; trojúhelník $O_1O_2O_3$ sluje základní (nebo souřadnicový), jeho strany základní přímky (nebo souřadnicové osy), O_1, O_2, O_3 jsou souřadnicové vrcholy. Kde leží body, jejichž jedna nebo dvě souřadnice d_i jsou rovny nule? Existuje bod (0; 0; 0)?

Základní vztah (4) umožňuje nám, abychom každou algebraickou rovnici mezi proměnnými d_i uvedli na homogenní tvar. Neboť každou takovou rovnici lze především psáti ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(d_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

když symbolem $u_k(d_i)$ jsme označili členy, v nichž se vyskytuje d_i v mocnině k. Násobíme-li nyní tuto rovnici výrazem $(ad_1 + bd_2 + cd_3)^n$, obdržíme po úpravě vzhledem k rovnici (4) **homogenní** rovnici

$$u_0(d_i)(ad_1+bd_2+cd_3)^n + 2\Delta u_1(d_i)(ad_1+bd_2+cd_3)^{n-1} + \dots$$
$$\dots + 2^n\Delta^n u_n(d_i) = 0.$$

Můžeme tedy předpokládati, že každá rovnice, která obsahuje proměnné d_i, je již homogenní.

B. **Relativní souřadnice bodu.** Snadno nahlédneme, že za souřadnice bodu B můžeme vzíti také čísla x_i, úměrná číslům d_i, t. j. čísla, o nichž platí

$$\varrho x_i = d_i, \; i = 1, 2, 3, \; \varrho \neq 0. \qquad (5)$$

---

[16]) Nebo jinak

$$d_1 \sin\alpha + d_2 \sin\beta + d_3 \sin\gamma = \frac{\Delta}{r} = 2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

$$\frac{d_1}{v_a} + \frac{d_2}{v_b} + \frac{d_3}{v_c} = 1; \text{ dokažte!}$$

Čísla x_i, definovaná těmito rovnicemi, nazývají se **relativní normální souřadnice bodu**. Jejich vztah k absolutním souřadnicím udávají rovnice (4) a (5), z nich plyne

$$d_i = \frac{2\Delta x_i}{ax_1 + bx_2 + cx_3}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Podrobnější vyšetření těchto souřadnic necháváme čtenáři.

C. **Transformace na kartézské souřadnice.** Zvolme kartézskou soustavu tak, jak ukazuje obr. 8. I platí

$$d_1 = x \sin\gamma, \quad d_2 = y \sin\gamma.$$

K tomu přistupuje rovnice (4), která dává

$$d_3 = \frac{2\Delta}{c} - x \sin\alpha - y \sin\beta. \tag{7}$$

Obrácení těchto rovnic píšeme ve tvaru

$$x = \frac{d_1}{\sin\gamma}\,\frac{2\Delta}{ad_1 + bd_2 + cd_3}, \quad y = \frac{d_2}{\sin\gamma}\,\frac{2\Delta}{ad_1 + bd_2 + cd_3}. \tag{7'}$$

Rovnice (7), (7′) jsou lineární, nemění tedy stupeň transformované rovnice. Speciálně lineární homogenní rovnice v d_i (nebo obecněji v x_i) vyjadřuje přímku. Kružnice, která je opsána souřadnicovému trojúhelníku, má rovnici

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\gamma - bx - ay = 0,$$

[viz také 12. úlohu d) v předcházející kapitole]; transformací na normální souřadnice podle rovnic (7′) obdržíme po malé úpravě rovnici

$$ad_2d_3 + bd_1d_3 + cd_1d_2 = 0.$$

A pod. Napište rovnice přímky a uvedené kružnice také v relativních souřadnicích!

D. **Přímkové souřadnice.** Nahlédneme snadno, že rovnice přímky, která prochází body (d'), (d'') resp. (x'), (x''), [pro stručnost píšeme (d') atd. místo $(d'_1; d'_2, d'_3)$ atd.] je

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d'_1 & d'_2 & d'_3 \\ d''_1 & d''_2 & d''_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ resp. } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} = 0,$$

po rozepsání

$$\Sigma \delta_k d_k = 0 \text{ resp. } \Sigma \xi_k x_k = 0,\text{[17]} \qquad (8)$$

při čemž značí $\delta_1 = d'_2 d''_3 - d'_3 d''_2$ atd., $\xi_1 = x'_2 x''_3 - x'_3 x''_2$ atd. Podobně, jak jsme to učinili v případě kartézských souřadnic, i zde nazýváme koeficienty δ_i resp. ξ_i normálními souřadnicemi přímky (vyložte podrobněji!). Rovnice (8) vyjadřují současně i incidenční podmínky pro normální souřadnice. Tak na př. duální vztahy

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ resp. } \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 \\ \xi''_1 & \xi''_2 & \xi''_3 \end{vmatrix} = 0$$

vyjadřují nutné a postačující podmínky, aby tři body (x), (x'), (x'') ležely v přímce resp. tři přímky $[\xi]$, $[\xi']$, $[\xi'']$ procházely bodem. Utvořte další příklady!

Poněvadž některé základní úlohy jeví se v souřadnicích normálních dosti složité, používáme této soustavy jen v případech, kdy takové úlohy nemusíme řešit. Uvedeme tu přece jen aspoň dvě z těchto základních úloh.

a) Transformujeme-li výraz pro vzdálenost dvou bodů B', B'' v kosoúhlých souřadnicích

$$\overline{B'B''}^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + 2\,(x' - x'')(y' - y'')\cos\gamma$$

na absolutní souřadnice podle rovnic (7), nalezneme výraz

$$\overline{B'B''}^2 = \frac{1}{\sin^2\gamma}\,[(d'_1 - d''_1)^2 + (d'_2 - d''_2)^2 + \\ + 2\,(d'_1 - d''_1)(d'_2 - d''_2)\cos\gamma].$$

Podle rovnic (4) je však

$$d'_1 - d''_1 = \frac{2\Delta}{\Sigma a x'_1\, \Sigma a x''_1}\,(b\xi_3 - c\xi_2) \text{ a další dva vztahy,}$$

takže v relativních souřadnicích máme (po malé úpravě)

$$\overline{B'B''}^2 = \frac{16\Delta^2 r^2}{(\Sigma a x'_1)^2\,(\Sigma a x''_1)^2}\,\psi\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

při čemž značí

$$\psi\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv \Sigma \xi_k^2 - 2\Sigma \xi_2 \xi_3 \cos\alpha. \qquad (*)$$

b) Jsou-li rovnice souřadnicových os vztaženy k pravoúhlé soustavě a ve tvaru $x\cos\eta_i + y\sin\eta_i - p_i = 0$, $i = 1, 2, 3$,

[17]) Pokud nebude uvedeno jinak, značí k sumační index a sčítáme od $k = 1$ až po $k = 3$.

pak je zřejmě $d_i = -(x \cos \eta_i + y \sin \eta_i - p_i)$ a tedy

$$\Sigma\delta_k d_k \equiv -x\,\Sigma\delta_k \cos \eta_k - y\,\Sigma\delta_k \sin \eta_k + \Sigma\delta_k p_k.$$

Vzdálenost bodu $(x;\,y)$ od přímky $lx + my + n = 0$ je však (bez ohledu na znaménko) dána známým výrazem $(lx + my + n) : \underset{+}{\sqrt{l^2 + m^2}}$. Poněvadž je $l^2 + m^2 = \psi(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, nacházíme posléze pro vzdálenost bodu (d) od přímky $[\delta]$ (bez ohledu na znaménko) výraz

$$\frac{\Sigma\delta_k d_k}{\underset{+}{\sqrt{\psi(\delta_1, \delta_2, \delta_3)}}}. \quad (12)$$

Úlohy k tomuto odstavci: 6—18.

Trimetrické souřadnice. A. Definice. Trimetrické (trojúhelníkové) souřadnice bodu definujeme nejobecněji takto: Jsou to tři čísla x_i, uměrná vzdálenostem uvažovaného bodu od tří stran základního trojúhelníka, znásobená libovolně zvolenými koeficienty, t. j.

$$\varrho x_i = \varkappa_i d_i; \quad i = 1, 2, 3; \ \varrho, \varkappa_i \neq 0.\text{[18]} \qquad (9)$$

Za předpokladu, že základní kartézská soustava je pravoúhlá, jsou totiž rovnice stran základního trojúhelníka

$$a_i x + b_i y + c_i z = 0, \ i = 1, 2, 3,$$

vzdálenosti d_i jsou

$$d_i = \frac{a_i x + b_i y + c_i z}{\underset{+}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}},$$

takže podle rovnic (9) platí

$$\varrho x_i = \frac{\varkappa_i}{\underset{+}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}}(a_i x + b_i y + c_i z). \qquad (10)$$

[18]) Podobně trimetrické souřadnice přímky jsou definovány rovnicemi $\varrho \xi_i = \varkappa_i \delta_i$, kde δ_i jsou vzdálenosti uvažované přímky od vrcholů souřadnicového trojúhelníka.

A obrácené z těchto rovnic plyne

$$\frac{D}{\varrho}\,x=\sum\frac{A_k}{\lambda_k}\,x_k,\ \frac{D}{\varrho}\,y=\sum\frac{B_k}{\lambda_k}\,x_k,\ \frac{D}{\varrho}\,z=\sum\frac{C_k}{\lambda_k}\,x_k,\qquad(10')$$

při čemž značí — jako obvykle —

$$D\equiv\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0,$$

A_i, B_i, C_i jsou doplňky stejnolehlého prvku v determinantu D a $\lambda_i=\dfrac{\varkappa_i}{\underset{+}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}}$. V souřadnicích nehomogenních jsou rovnice (10) resp. (10')

$$\left.\begin{aligned}\varrho x_i&=\lambda_i\,(a_i x+b_i y+c_i)\ \text{resp.}\\ x=\sum\frac{A_k}{\lambda_k}\,x_k:\sum\frac{C_k}{\lambda_k}\,x_k,&\quad y=\sum\frac{B_k}{\lambda_k}\,x_k:\sum\frac{C_k}{\lambda_k}\,x_k.\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Je-li tedy dán bod kartézskými pravoúhlými souřadnicemi $(x; y; z)$, jsou jeho trimetrické souřadnice dány rovnicemi (10); obráceně, známe-li trimetrické souřadnice bodu, jsou jeho kartézské pravoúhlé souřadnice dány rovnicemi (10'). Podobně pro rovnice (11).[19])

B. Základní vlastnosti. Z rovnic (4) a (9) odvodíme ihned základní vztah, který platí mezi trimetrickými souřadnicemi bodu; zní

$$\frac{a}{\varkappa_1}\,x_1+\frac{b}{\varkappa_2}\,x_2+\frac{c}{\varkappa_3}\,x_3=\frac{2\Delta}{\varrho}$$

(ϱ koeficient úměrnosti; napište tento vztah ještě v jiných tvarech!).

Je ihned patrno, že trimetrická soustava bodových souřadnic je určena, známe-li rovnice stran základního trojúhelníka a absolutní normální souřadnice d_i a trimetrické

[19]) Proveďte obdobnou úvahu pro souřadnice přímkové!

souřadnice x_i jednoho a téhož bodu B, který ovšem neleží na žádné základní přímce. Potom totiž rovnice (9) určují poměr čísel $\varkappa_i$ a tudíž i trimetrické souřadnice obecného bodu. — Zpravidla však trimetrickou soustavu bodovou určujeme jinak: Jistý bod roviny zvolíme za jednotkový $J\,(1;1;1)$. Jsou-li d_i jeho absolutní normální souřadnice, platí $\varrho = \varkappa_i d_i$, čímž je určen poměr čísel $\varkappa_i$ a tedy i trimetrická soustava.[20])

Ze známých vlastností absolutních normálních souřadnic a na podkladě rovnic (9) snadno nahlédneme, že anulovaná lineární forma

$$\Sigma \xi_k x_k = 0 \tag{12}$$

vyjadřuje v trimetrických souřadnicích přímku. Nejjednodušší rovnice $x_i = 0$ příslušejí souřadnicovým osám (jak?); rovnice $x_i - \lambda x_k = 0$ ($i \neq k$, λ proměnný parametr) vyjadřují přímky, jdoucí souřadnicovými vrcholy (vyložte podrobněji!). Poslední rovnice ze soustavy (10′) pak ukazuje, že vztah

$$\sum \frac{C_k}{\lambda_k} x_k = 0$$

vyjadřuje přímku nevlastní.

Konečně vztah (12) ukazuje, že obecná trojice čísel $[\xi_i]$ určuje jedinou přímku (jak je tomu obráceně?); i lze čísla ξ_i považovati za **trimetrické souřadnice přímky**. Za těchto okolností rovnice (12) vyjadřuje incidenci přímky $[\xi_i]$ a bodu (x_i). Podrobnější úvahy přenecháváme čtenáři; nečiní žádných obtíží. ([13])

C. **Specialisace trimetrických souřadnic bodu.** Definice trimetrických souřadnic bodu rovnicemi (9) je velmi obecná a lze ji specialisovati několikerým způsobem. Na tomto místě chceme uvésti velmi stručně aspoň nejčastější případy.

a) V rovnicích (9) položme $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3$; dojdeme tak k souřadnicím, definovaným rovnicemi

---

[20]) Obdobnou úvahu proveďte pro přímkové souřadnice!

$$\varrho x_i = d_i,$$

tedy rovnicemi (5): relativní normální souřadnice jsou zvláštním případem trimetrických souřadnic. Bod je určen, známe-li dva nezávislé poměry těchto tří souřadnic (vyložte!); odtud jiný název pro ně: poměrné souřadnice bodu.

b) V rovnicích (9) položme $\varkappa_1 = \varkappa a$, $\varkappa_2 = \varkappa b$, $\varkappa_3 = \varkappa c$! Obdržíme $\varrho x_1 = a d_1$ atd. čili $\varrho x_1 = (BO_2O_3)$ (ovšem s jiným koeficientem ϱ!). Odtud také pojmenování pro ně: homogenní plošné souřadnice bodu. Nalezněte vztah takto specialisovaných trimetrických souřadnic k trojbodovým souřadnicím l_i!

Plošné souřadnice lze interpretovati také fysikálně: Mysleme si, že souřadnicové vrcholy jsou zatíženy vahami x_i a že v obecném bodě B je soustředěna váha Σx_k. Momentová věta nám dává podmínky rovnováhy této hmotné soustavy:

$$-d_1 \Sigma x_k + v_1 x_1 = 0 \text{ a dvě rovnice další.}$$

Z nich však plyne

$$x_1 = \frac{d_1}{v_1} \Sigma x_k \text{ čili } \varrho x_1 = a d_1 \text{ a dvě rovnice další,}$$

což jsou rovnice, které definují homogenní plošné souřadnice. I jeví se tyto souřadnice bodu jako taková zatížení vrcholů souřadnicového trojúhelníka, aby tento bod byl jeho těžištěm; odtud jiné pojmenování pro ně: barycentrické (také Möbiusovy) souřadnice bodu.

c) Položme $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1 : \sin\gamma$, $\varkappa_3 = 1 : d_3$! Obdržíme tak $\varrho x_1 = d_1 : \sin\gamma$, $\varrho x_2 = d_2 : \sin\gamma$, $\varrho x_3 = 1$, a tedy vzhledem k rovnicím (7)

$$\varrho x_1 = x,\ \varrho x_2 = y,\ \varrho x_3 = 1 \text{ čili } x_1 = \frac{x}{x_3},\ x_2 = \frac{y}{x_3}.$$

Kartézské souřadnice jsou tedy zvláštním případem trimetrických souřadnic (osa $x_3 = 0$ se stane přímkou nevlastní!).

d) K jiným specialisacím vede způsob, kterým je trimetrická soustava určena. Zvolíme-li na př. střed kružnice vepsané souřadnicovému trojúhelníku za bod jednotkový, dospějeme k soustavě a), zvolíme-li za tento bod těžiště souřadnicového trojúhelníka, dospějeme k soustavě b). Vyložte podrobněji a utvořte jiné soustavy!

e) Konečně i vyjádření trimetrických souřadnic rovnicemi (10), v nichž disponujeme devíti nehomogenními konstantami (kterými?), dává nám mnoho možností pro specialisace těchto souřadnic. Tak na př. souřadnice, definované rovnicemi

$$\varrho x_i = a_i x + b_i y + c_i z,\ i = 1, 2, 3,\ \varrho \neq 0$$

nazývají se lineární souřadnice bodu. A pod.([14])

Úlohy k tomuto odstavci: 19—26.

Tetracyklické souřadnice. A. Definice. Kružnici, jejíž rovnice v pravoúhlých souřadnicích zní

$$(a) \equiv a_0 (x^2 + y^2) + 2a_1 x + 2a_2 y + a_3 = 0,$$

nazveme stručně „kružnice (a)". Zvolíme-li v rovině čtyři nezávislé kružnice (b), (c), (d), (e), t. j. takové čtyři kružnice, že nenáleží všechny témuž svazku nebo téže síti kružnic, tu každou další kružnici lze vyjádřiti jako lineární kombinaci těchto čtyř kružnic, t. j. lze psáti

$$(a) \equiv \lambda_1(b) + \lambda_2(c) + \lambda_3(d) + \lambda_4(e). \tag{13}$$

Rozepíšeme-li totiž tuto symbolickou rovnici a srovnáme-li sobě odpovídající koeficienty, nalezneme rovnice

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = \lambda_1 b_0 + \lambda_2 c_0 + \lambda_3 d_0 + \lambda_4 e_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_3 = \lambda_1 b_3 + \lambda_2 c_3 + \lambda_3 d_3 + \lambda_4 e_3, \end{array}\right\} \tag{14}$$

z nichž lze vypočísti koeficienty λ_i (proč?). Výsledek je

$$\left.\begin{array}{l} D\lambda_1 = a_0 B_0 + a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D\lambda_4 = a_0 E_0 + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3, \end{array}\right\} \tag{15}$$

při čemž velkými písmeny jsme označili doplňky stejnolehlého prvku v determinantu

$$D \equiv \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Snadno se přesvědčíme, že podmínka $a_1^2 + a_2^2 - a_0 a_3 = 0$ je nutná i stačí, aby rovnice kružnice (a) vyjadřovala bod (který?). Je-li tato podmínka splněna, pak nazýváme čísla λ_i

tetracyklické souřadnice bodu, který je touto kružnicí vyjádřen.

Uvažujme nyní kružnici s rovnicí

$$B_3(x^2 + y^2) - B_1x - B_2y + B_0 = 0! \qquad (*)$$

Určeme mocnost M_1 bodu $(x_0;\ y_0)$, vyjádřeného rovnicemi

$$(a) = 0,\ a_1^2 + a_2^2 - a_0a_3 = 0, \qquad (**)$$

vzhledem k této kružnici; nalezneme

$$M_1 = x_0^2 + y_0^2 - \frac{B_1}{B_3}x_0 - \frac{B_2}{B_3}y_0 + \frac{B_0}{B_3},$$

a poněvadž $x_0 = -a_1 : a_0$, $y_0 = -a_2 : a_0$, $x_0^2 + y_0^2 = a_3 : a_0$ (odůvodněte!), také jinak

$$M_1 = \frac{1}{a_0B_3}(a_0B_0 + a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3).$$

Srovnáme-li však tento vztah s první rovnicí (15), poznáváme, že $M_1 = D\lambda_1 : a_0B_3$. Provedeme-li obdobnou úvahu i pro ostatní kružnice typu (*), docházíme k této větě: Tetracyklické souřadnice λ_i bodu $(x_0;\ y_0)$ jsou čtyři čísla úměrná mocnostem tohoto bodu vzhledem k určitým čtyřem kružnicím (nikoliv však k oněm, které jsme zvolili za základní!):

$$\lambda_1 = \frac{a_0}{D}B_3M_1 \text{ a tři rovnice další.} \qquad (16)$$

B. Základní vlastnosti. Rovnice (13) ukazuje, že tetracyklické souřadnice jsou homogenní. Násobíme-li totiž všechny týmž koeficientem $\varrho \neq 0$, tu poskytuje uvedená rovnice opět touž kružnici $\varrho(a) = 0$ (po případě týž bod, je-li kružnicí bod vyjádřen). Poněvadž bod v rovině je určen již poměrem tří čísel (na př. třemi homogenními souřadnicemi), musí mezi souřadnicemi λ_i existovat ještě nějaký vztah. A ten je v podmínce, že kružnice, kterou určují, má poloměr rovný nule. Dosadíme-li proto z rovnic (14) do druhé rovnice (**), nalezneme pro tento vztah výraz

$$\Sigma (b_1^2 + b_2^2 - b_0 b_3) \lambda_1^2 -$$
$$- \Sigma (2b_1 c_1 + 2b_2 c_2 - b_0 c_3 - b_3 c_0) \lambda_1 \lambda_2 = 0.\text{[21]}$$

Tento složitý vztah se podstatně zjednoduší, předpokládáme-li, že kružnice (b), (c), (d), (e) jsou vzájemně ortogonální. Pak vymizí všechny koeficienty u členů s $\lambda_i \lambda_k$ (vyložte podrobněji!). Povšimneme-li si ještě, že poloměr R_b kružnice (b) je $R_b^2 = (b_1^2 + b_2^2 - b_0 b_3) : b_0^2$ atd., můžeme uvedený vztah psáti daleko jednodušeji:

$$b_0^2 R_b^2 \lambda_1^2 + \ldots + e_0^2 R_e^2 \lambda_4^2 = 0.$$

T. zv. normované tetracyklické souřadnice x_i jsou definovány rovnicemi

$$x_1 = \pm b_0 R_b \lambda_1, \ldots, x_4 = \pm e_0 R_e \lambda_4;$$

základní vztah mezi těmito souřadnicemi má tedy tvar zvlášť jednoduchý, totiž $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$. ([18])

Úlohy k tomuto odstavci: 27—31.

Úlohy ke cvičení.

1. Jak sestrojíte bod B z dané trojice $(l_1; l_2; l_3)$, přímku p z dané trojice $[\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3]$?

[Sestrojí se body C_1, C_2, pro něž je $\dfrac{\overline{B_2C_1}}{\overline{B_3C_1}} = -\dfrac{l_3}{l_2}\dfrac{k_3}{k_2}$, $\dfrac{\overline{B_3C_2}}{\overline{B_1C_2}} = -\dfrac{l_1}{l_3}\dfrac{k_1}{k_3}$; hledaný bod B je průsečík přímek B_1C_1, B_2C_2. Tímto bodem prochází také spojnice B_3C_3; důkaz podává věta Cevova. Duálně sestrojí se přímky q_1, q_2, pro něž je $\dfrac{\sin(p_2, q_1)}{\sin(p_3, q_1)} = -\dfrac{\lambda_3}{\lambda_2}\dfrac{k_3}{k_2}$ atd., hledaná přímka p jde průsečíky p_1, q_1 a p_2, q_2 (a také p_3, q_3; důkaz podává věta Menelaova). Přitom značí $k_i = \underset{+}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}$.]

---

[21]) V tomto případě značí

$$\Sigma (b_1^2 + b_2^2 - b_0 b_3) \lambda_1^2 = (b_1^2 + b_2^2 - b_0 b_3) \lambda_1^2 +$$
$$+ (c_1^2 + c_2^2 - c_0 c_3) \lambda_2^2 + \ldots + (e_1^2 + e_2^2 - e_0 e_3) \lambda_4^2.$$

Podobně pro další součet.

2. Dokažte, že rovnici bodu B resp. přímky p lze vyjádřiti tvarem

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \\ b_1 & b_2 & b_3 & b \\ c_1 & c_2 & c_3 & c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{resp.} \quad \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \\ b_1 & b_2 & b_3 & b \\ c_1 & c_2 & c_3 & c \end{vmatrix} = 0!$$

[Vylučte l_i resp. λ_i z rovnic (3) resp. (3′) a z rovnice (2) resp. (2′)!]

3. Které body resp. přímky jsou vyjádřeny trojicemi l_i resp. λ_i s jedním nebo s dvěma nulovými členy?

[Je-li $l_j = 0$, máme body na spojnicích B_iB_k, je-li $l_i = l_k = 0$, máme body B_j. A duálně. Přitom je $i, j, k, = 1, 2, 3, i \neq j \neq k$.]

4. Jak zní trojpřímková rovnice přímky, jestliže pro rovnice základních přímek zvolíme tvary normální?

[Základní přímky buďtež $n_i \equiv x \cos \delta_i + y \sin \delta_i - p_i = 0$; $p \equiv x\, \Sigma\lambda_k \cos \delta_k + y\, \Sigma\lambda_k \sin \delta_k - \Sigma\lambda_k p_k = 0$. Napište směrnici této přímky, přepište její rovnici na normální tvar! Proveďte duální úvahu!]

5. Napište podmínku a) rovnoběžnosti, b) kolmosti dvou přímek $[\lambda]$ a $[\lambda']$!

[a) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 \end{vmatrix} = 0$ nebo $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 \end{vmatrix} = 0$,

kde α, β, γ resp. a, b, c jsou úhly resp. délky stran trojstranu $p_1p_2p_3$, b) $\Sigma\lambda_k\lambda'_k = (\lambda_2\lambda'_3 + \lambda_3\lambda'_2)\cos\alpha + (\lambda_3\lambda'_1 + \lambda_1\lambda'_3)\cos\beta + (\lambda_1\lambda'_2 + \lambda_2\lambda'_1)\cos\gamma$. Určete úhel dvou přímek!]

6. Napište absolutní resp. relativní normální souřadnice a) těžiště, b) středu opsané kružnice, c) průsečíku výšek, d) středu vepsané kružnice, e) středů vně vepsaných kružnic do základního trojúhelníka!

[a) $\left(\frac{1}{3} v_1; \frac{1}{3} v_2; \frac{1}{3} v_3\right)$ resp. $(v_1; v_2; v_3)$ nebo $\left(\frac{1}{\sin\alpha}; \frac{1}{\sin\beta}; \frac{1}{\sin\gamma}\right)$, b) $(r\cos\alpha; r\cos\beta; r\cos\gamma)$ resp. $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, c) $(2r\cos\beta\cos\gamma; 2r\cos\alpha\cos\gamma; 2r\cos\alpha\cos\beta)$, d) $(\varrho; \varrho; \varrho)$ resp. $(1; 1; 1)$, e) $(-\varrho_2; \varrho_2; \varrho_2)$ atd. resp. $(-1; 1; 1)$ atd.]

7. Jak zní rovnice přímky, která utíná na osách $\overrightarrow{O_3O_1}$ resp. $\overrightarrow{O_3O_2}$ úseky p resp. q?

[Transformací rovnice $qx + py - pq = 0$ podle rovnic (7) obdržíme $a\dfrac{b-p}{p}d_1 + b\dfrac{a-q}{q}d_2 - cd_3 = 0$. Proveďte úvahu obrácenou!]

8. Jak zní rovnice přímky nevlastní?

[Rovnice (6) ukazují, že pro body v nekonečnu je $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ $(ad_1 + bd_2 + cd_3 = 0)$.]

9. Jak zní rovnice a) přímky, jdoucí souřadnicovým vrcholem, b) osy úhlu $O_2\widehat{O_1}O_3$ (vnitřní i vnější), c) výšek trojúhelníka $O_1O_2O_3$?

[a) $d_2 = \varkappa_1 d_3$ atd. $(x_2 = \varkappa_1 x_3)$; jaký je význam koeficientů $\varkappa_i$, kdy se tyto tři přímky protínají v jediném bodě? $(\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 = -1)$, b) $d_2 \mp d_3 = 0$ atd. $(x_2 \mp x_3 = 0,)$, c) $d_2 \cos\beta - d_3\cos\gamma = 0$ atd. $(x_2\cos\beta - x_3\cos\gamma = 0)$.]

10. Kterým vzorcem je dán obsah trojúhelníka $B_1B_2B_3$ z pat kolmic, spuštěných z bodu B na strany trojúhelníka $O_1O_2O_3$? Dokažte na základě tohoto vztahu větu: Geometrickým místem bodů, z nichž kolmice spuštěné na strany daného trojúhelníka mají paty ležící v přímce, je kružnice opsaná tomuto trojúhelníku. A obráceně. (Přímka ta sluje S i m s o n o v a p ř í m k a uvažovaného bodu vzhledem k danému trojúhelníku.)

[$2\Delta' = d_2d_3\sin\alpha + d_1d_3\sin\beta + d_1d_2\sin\gamma$ čili $4r\Delta' = ad_2d_3 + bd_1d_3 + cd_1d_2$. Pro $\Delta' = 0$ obdržíme kružnici opsanou trojúhelníku $O_1O_2O_3$.]

11. Vzorec pro vzdálenost dvou bodů v absolutních normálních souřadnicích upravte na tvary

$$\overline{B'B''}^2 = \frac{r}{\Delta}\Sigma a(d'_1 - d''_1)^2\cos\alpha = \frac{r^2}{\Delta}\Sigma(d'_1 - d''_1)^2\sin 2\alpha =$$
$$= -\frac{r}{\Delta}\Sigma a(d'_2 - d''_2)(d'_3 - d''_3) =$$
$$= -\frac{2r^2}{\Delta}\Sigma(d'_2 - d''_2)(d'_3 - d''_3)\sin\alpha!^{*)}$$

[Užijte vztahu $a(d'_1 - d''_1) + b(d'_2 - d''_2) + c(d'_3 - d''_3) = 0$!]

---

*) Přitom značí:
$\Sigma a(d'_1 - d''_1)^2\cos\alpha =$
$= a(d'_1 - d''_1)^2\cos\alpha + b(d'_2 - d''_2)^2\cos\beta + c(d'_3 - d''_3)^2\cos\gamma$
atd., podobně
$\Sigma(d'_2 - d''_2)(d'_3 - d''_3)\sin\alpha =$
$= (d'_2 - d''_2)(d'_3 - d''_3)\sin\alpha + \ldots + (d'_1 - d''_1)(d'_2 - d''_2)\sin\gamma$
atd.

12. Který úhel svírají přímky $\Sigma\delta'_k d_k = 0$, $\Sigma\delta''_k d_k = 0$?
[Transformací příslušného výrazu v pravoúhlých souřadnicích nalezneme

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\Sigma(\delta'_1\delta''_2 - \delta'_2\delta''_1)\sin\gamma}{\Sigma\delta'_k\delta''_k - \Sigma(\delta'_2\delta''_3 + \delta'_3\delta''_2)\cos\alpha}.\Bigg]$$

13. Dokažte, že pro úhel dvou přímek platí vzorec

$$\cos\omega = \frac{1}{2}\,\frac{\xi''_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi'_1} + \xi''_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi'_2} + \xi''_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi'_3}}{\sqrt{\varphi(\xi')}\,\sqrt{\varphi(\xi'')}}!$$

[Úpravou výsledku 12. úlohy a zavedením relativních souřadnic. Jak velké jsou úhly, které svírá přímka $[\xi]$ se souřadnicovými osami?]

14. Určete obsah trojúhelníka s vrcholy (d'), (d''), (d''')!

$$[2P = \frac{r}{\Delta}\begin{vmatrix} d'_1 & d'_2 & d'_3 \\ d''_1 & d''_2 & d''_3 \\ d'''_1 & d'''_2 & d'''_3 \end{vmatrix}]$$

15. Ukažte, že přímku lze parametricky vyjádřiti rovnicemi $d_i = \lambda d'_i + \mu d''_i$ $(\varrho x_i = \lambda x'_i + \mu x''_i)$, $i = 1, 2, 3$!

[Z rovnice přímky, jdoucí dvěma body.]

16. Ukažte, že kuželosečka je vyjádřena rovnicí

$$\sum_{i,k} a_{ik}x_i x_k = 0,\ i, k = 1, 2, 3;\ a_{ik} = a_{ki}!$$

[Transformací kartézské rovnice.]

17. Určete vzdálenost přímky $[\delta]$ od souřadnicových vrcholů!
[$v_1\delta_1 : \sqrt{\varphi}$ atd. Ukažte, že na základě těchto vztahů lze normální souřadnice přímky definovati také geometricky!]

18. Jaký vztah platí mezi třemi vzdálenostmi, o nichž je řeč v 17. úloze?

[Z výrazu pro φ plyne $\sum\left(\dfrac{\bar{\delta}_k}{v_k}\right)^2 - 2\sum\dfrac{\bar{\delta}_1\bar{\delta}_2}{v_1 v_2}\cos\gamma = 1$, kdež $\bar{\delta}_i$ značí uvažované vzdálenosti.]

19. Dokažte: Trimetrické souřadnice bodu jsou čísla úměrná a) daným násobkům kolmých vzdáleností, b) daným násobkům vzdáleností, měřeným v daných směrech, c) daným násobkům

vzdáleností, měřeným v témže směru, d) vzdálenostem, měřeným v daných směrech — od tří daných přímek!

[Z rovnic (9).]

20. Vyšetřete trimetrické souřadnice bodu v případě, že rovnice základních přímek jsou dány ve tvarech normálních!

[Základní přímky jako ve 4. úloze. $C_1 = -\sin\alpha$, $C_2 = -\sin\beta$, $C_3 = -\sin\gamma$; rovnice nevlastní přímky

$$\sum \frac{\sin\alpha}{\varkappa_k} x_k = 0 \text{ nebo} \sum \frac{a}{\varkappa_k} x_k = 0.]$$

21. Jaký je vzájemný vztah bodu (1; 1; 1) k přímce [1; 1; 1]?

[(1; 1; 1) je harmonický pól přímky [1; 1; 1] vzhledem k základnímu trojúhelníku.]

22. Vyšetřete trimetrické souřadnice, pro něž platí

$$\varkappa_i = \underset{+}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}!$$

[Předpoklad vede na lineární souřadnice.]

23. Který bod je v barycentrických souřadnicích vyjádřen souřadnicemi (1; 1; 1)? Napište rovnici nevlastní přímky v těchto souřadnicích!

[Těžiště základního trojúhelníka; $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ čili [1; 1; 1] (uveďte rovnice základních přímek na normální tvary!).]

24. Je-li souřadnicový trojúhelník rovnostranný a $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3$, dokažte, že a) bod (1; 1; 1) je střed trojúhelníka a přímka [1; 1; 1] přímka nevlastní, b) pro $\varrho = \varkappa$ a výšku rovnou 1 je bod $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ střed trojúhelníka a mezi souřadnicemi platí vztah $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, c) $(1; \omega; \omega^2)$ a $(1; \omega^2; \omega)$, kde ω je komplexní třetí odmocnina jedné, jsou souřadnice kruhových bodů!

[a) Viz také 23. úlohu! b) V rovnici $ad_1 + bd_2 + cd_3 = 2\Delta$ položte $a = b = c$, $d_i = \varrho x_i : \varkappa_i$, $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = \varkappa$, $2\Delta = a$, $\varrho = \varkappa$! c) Určete průsečíky $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$ s $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (proč?)!]

25. Vyšetřete t. zv. **isotropické souřadnice** bodu, definované rovnicemi $x_1 = x + iy$, $x_2 = x - iy$, $x_3 = z$, $i = +\sqrt{-1}$!

[Základní trojúhelník má za vrcholy počátek a oba body kruhové.]

26. Jak zní základní vztah, který platí mezi trimetrickými souřadnicemi přímky, definovanými rovnicemi $\varrho\xi_i = \varkappa_i\delta_i$?

$$\left[\sum\left(\frac{\xi_k}{\varkappa_k v_k}\right)^2 - 2\sum\frac{\xi_1\ \xi_2}{\varkappa_1\varkappa_2 v_1 v_2}\cos\gamma = \frac{1}{\varrho^2}.\ \text{Viz 18. úlohu!}\right]$$

27. Co to znamená, když jedna nebo dvě z tetracyklických souřadnic jsou rovny nule?

[Vztah $\lambda_1 = 0$ značí kružnici (*) atd. Vztahy $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ vyjadřují průsečíky kružnic (*) a $C_3(x^2 + y^2) - C_1x - C_2y + C_0 = 0$ atd.; jaký vztah splňují tetracyklické souřadnice těchto průsečíků?]

28. Dokažte, že čtyři kružnice typu (*) neprocházejí společným bodem!

[Uvažte, co znamená $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$!]

29. Dokažte, že čtyři kružnice (*) jsou ortogonální k základním kružnicím!

[Zvolme na př. kružnice (c) a (*). Podmínka ortogonality těchto dvou kružnic zní $\Sigma B_i c_i = 0$ a je splněna identicky. Podobně i pro ostatní dvojice kružnic.]

30. Dokažte, že jsou-li základní kružnice ortogonální, splývají s kružnicemi (*)!

[Použijte výsledku 29. úlohy!]

31. Rovnicemi tvaru (16) vyjádřete také normované tetracyklické souřadnice!

[Použijte výsledku 30. úlohy; výsledek je $\varrho x_1 = \dfrac{M_1}{R_b}$ atd.]