Imaginární elementy v geometrii

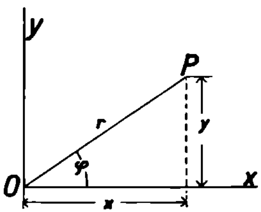
Dodatek

In: Ladislav Seifert (author): Imaginární elementy v geometrii. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1941. pp. 68–75.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402990

Gaussova rovina.

Reálné body na přímce lze přiřaditi reálným číslům — říkáme, že množství reálných bodů na přímce je jednorozměrné. Naproti tomu množství imaginárních bodů na přímce je dvourozměrné, neboť tyto body jsou přiřaděny číslům komplexním, kde reálná i imaginární část mohou nezávisle na sobě proběhnouti všechna čísla reálná. Chceme-li „zobraziti" toto množství na reálný útvar tak, aby imaginárnímu bodu na přímce odpovídal reálný bod tohoto útvaru, musíme vzíti útvar dvourozměrný; tedy rovinu nebo jinou plochu. Nejjednodušší je zobrazení na rovinu, nebo na kulovou plochu. Všimněme si jen zobrazení na rovinu.



22

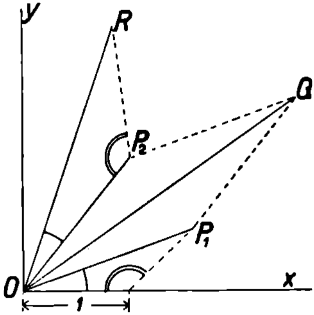
Volme v rovině k sobě kolmé osy x, y s počátkem O (obr. 22) a považujme bod P (x; y) za obraz komplexního čísla $z = x + iy$. Body na ose x jsou obrazy reálných čísel, body na ose y obrazy čísel ryze imaginárních. Tímto způsobem jsou imaginární body přímky (s komplexními souřadnicemi) zobrazeny na reálné body roviny. Při tom nutno se vystříhati představy, že imaginární body přímky vyplňují rovinu. Zde jde o pouhé „zobrazení", ovšem zobrazení velmi zajímavé, neboť operacím s imaginárními elementy na přímce odpovídají reálné operace v rovině, jiż zoveme pak Gaussovou (někde též Cauchyovou rovinou).

Vedle souřadnic pravoúhlých s výhodou se používá i polárních. Bodu z patří vektor $\overrightarrow{OP}$, jehož absolutní délku r zoveme modul čísla z a úhel $\varphi = (x, \widehat{\ } OP)$, jejž zoveme amplituda čísla z. Amplituda je úhel, který vznikne otočením kladné části osy x do vektoru $\overrightarrow{OP}$. Podle toho jest $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ a

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Všimněme si, jak se základní početní výkony s čísly komplexními jeví v našem zobrazení. Buďte dána čísla $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ a jim ať přísluší body P_1, P_2 (obr. 23). Součet jest

$$z = z_1 + z_2 = \\ = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (1)$$



23

Bod, který odpovídá tomuto součtu, dostaneme velmi jednoduše jak z obrázku patrno, doplníme-li trojúhelník P_1OP_2 na rovnoběžník vrcholem Q, čili přičteme-li k vektoru $\overrightarrow{OP_1}$ vektor $\overrightarrow{OP_2}$ ($\overline{P_1Q} \# \overline{OP_2}$).

Jde-li o rozdíl

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \quad (2)$$

jest třeba k vektoru $\overrightarrow{OP_1}$ připojiti vektor $-\overrightarrow{OP_2}$. Modul se pak rovná délce $\overline{P_2P_1}$.

Chceme-li zobraziti součin čísel z_1, z_2, pišme je raději ve tvaru polárním

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \; z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

a dostaneme

$$z = z_1 . z_2 = r_1 . r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ = r_1 . r_2 . [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (3)$$

Toto pravidlo, zvané Moivreova poučka, znamená, že při násobení modul součinu se rovná součinu modulů, amplituda součinu se rovná součtu amplitud. V obraze 23 odpovídá součinu bod R, při tom $\overline{OR} = r_1 . r_2$, úhel $(\widehat{x, OR}) = \varphi_1 + \varphi_2$. Konstrukci lze takto zaříditi: Na osu x nanesme $\overline{OI} = 1$ a sestrojme $\triangle OP_2R \sim \triangle OIP_1$. Pak jest $\overline{OR} : \overline{OP_2} = \overline{OP_1} : \overline{OI}$, tedy $\overline{OR} = r_1 . r_2$.

Je-li jedno z čísel reálné (máme tedy součin $z = kz$, kde k je reálné), násobí se pouze modul; je-li modul obou čísel rovný jedné, jsou body P_1, P_2, R na kružnici a pouze amplitudy se sčítají.

Pro dělení jest podobně

$$z = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]; \tag{4}$$

obrázek nechť si čtenář laskavě pořídí sám.

Uvažovali jsme (odst. 2, str. 16) korespondenci mezi body na přímce zvanou involuci a zmínili jsme se o obecnější korespondenci, zvané projektivnost, která byla dána obecnou bilineární rovnicí. Při tom jsme předpokládali, že koeficienty rovnice jsou reálné a také uvažované body jsme předpokládali reálné. Tento předpoklad může zde odpadnouti. Mějme obecnou bilineární rovnici

$$azz' + bz + cz' + d = 0, \tag{5}$$

kde koeficienty jsou komplexní čísla a také z, z'. Jí je definována bodová příbuznost v Gaussově rovině, která je obrazem projektivnosti mezi imaginárními body na přímce. Sledujme nejprve zvláštní případy.

a) $$z' = z + a, \tag{6}$$

kde $a = a_1 + ia_2$. Bodu P (z) je přiřaděn P' (z'), který dostaneme z P pošinutím o vektor $\overline{OA}$, kde A odpovídá číslu a. Příbuznost uvažovaná je tedy posunutí čili translace.

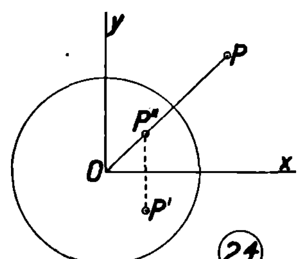
b) $$z' = bz; \tag{7}$$

je-li b reálné nemění se amplituda bodu P (z), ale modul je násoben číslem b. Pole (z) a pole (z') jsou stejnolehlé podle středu O. Je-li b komplexní, a to $b = \varrho(\cos\beta + i\sin\beta)$, znamená naše transformace otočení o úhel β a homotetii s poměrem ϱ, tedy dvě transformace po sobě provedené.

c) $zz' = 1$, čili $z' = \dfrac{1}{z}$, (8)

jinak
$$r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$
$$= \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Bodu $P(r;\varphi)$ je přiřaděn bod $P'\left(r' = \dfrac{1}{r}, -\varphi\right)$. Tuto transformaci lze složiti také ze dvou. Nejprve bodu P (obr. 24) přiřaďme P'' na paprsku OP tak, aby $\overline{OP}\,.\,\overline{OP''} = 1$, pak sestrojme bod P' symetrický k bodu P'' podle osy x. Prvá transformace sluje kruhová inverse. Uvažovaná transformace je tedy složena z kruhové inverse a symetrie podle osy x.



Kruhová inverse není však transformace lineární, která přiřaďuje přímce přímku, nýbrž kvadratická; přímce odpovídá kružnice. To lze nejlépe sledovati, přejdeme-li k pravoúhlým souřadnicím. Jest

$$z' = x' + iy' = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

a rozvedeme-li

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Pišme rovnici kružnice

$$A\,(x'^2 + y'^2) + 2Bx' + 2Cy' + D = 0$$

a dosaďme; dostaneme po úpravě

$$D\,(x^2 + y^2) + 2Bx - 2Cy + A = 0.$$

Charakteristické pro tuto transformaci je tedy, že kružnice přechází v kružnici a přímka ($A = 0$) také v kružnici, která jde počátkem O a naopak. Do podrobností této transformace se nebudeme pouštěti.

Vraťme se opět k původní obecné transformaci (5) a ukažme, že ji lze postupně složiti z transformací jednodušších právě uvedených. Skutečně jde z rovnice (5)

$$z' = \frac{-bz - d}{az + c} = -\frac{b}{a} - \frac{\frac{ad - bc}{a}}{az + c};$$

položme

$$z'' = az, \quad z''' = z'' + c, \quad z^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{z'''}$$

$$z^{\mathrm{V}} = \frac{ad - bc}{a} z^{\mathrm{IV}}, \quad z' = -\frac{b}{a} - z^{\mathrm{V}}$$

a vidíme, že obecná hořejší transformace se skládá z řady postupných transformací, jež jsou vesměs pošinutí, otočení, podobnost a inverse (pokud $ad - bc \gtrless 0$), tedy vesměs z transformací, jež kružnici převádějí v kružnici. **Definuje tedy rovnice (5) v rovině Gaussově obecnou kruhovou transformaci.**

Všimněme si ještě podrobněji případu, kdy rovnice (5) je symetrická podle z, z', t. j. kdy má tvar

$$azz' + b\,(z + z') + d = 0. \qquad (9)$$

Jde o **involuci**. Roste-li reálná i imaginární část, tedy i modul do nekonečna, mluvíme o komplexním bodu v nekonečnu. Pro $z' \to \infty$ dostaneme z rovnice (9) $z = -\frac{b}{a}$.

Tento bod sluje střed involuce. Dvojné či samodružné elementy dostaneme, položíme-li $z = z'$, tedy z rovnice

$$az^2 + 2bz + d = 0.$$

Omezme se pouze na případ, kdy tato rovnice má dva různé kořeny; tedy jsou v rovině dva dvojné body. Podle předešlého výkladu, pohybuje-li se bod $P\,(z)$ po přímce Gaussovy roviny, pohybuje se $P'\,(z')$ po kružnici, která jde středem involuce (střed involuce odpovídá nevlastnímu bodu přímky), opíše-li $P\,(z)$ kružnici, opíše $P'\,(z')$ také kružnici; prochází-li prvá kružnice dvojnými body, jde jimi i druhá.

Pojem dvojpoměr, zavedený v odst. 1, můžeme rozšířiti také na komplexní čísla; potom nazýváme dvojpoměrem čtyř bodů v Gaussově rovině výraz

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

Modul tohoto výrazu má jednoduchý geometrický význam. Je to dvojpoměr délek $\dfrac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_3}} : \dfrac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_2P_4}}$. Podíl $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ má amplitudu rovnou rozdílu úhlů, jež délky P_1P_3, P_2P_3 svírají s osou x; rovná se tedy úhlu $(P_1P_3, \widehat{\ } P_2P_3)$ a amplituda dvojpoměru uvedeného, jest rovna rozdílu úhlů $(P_1P_3, \widehat{\ } P_2P_3)$ a $(P_1P_4, \widehat{\ } P_2P_4)$. Uvedený dvojpoměr je reálný, je-li amplituda rovna nule, nebo násobku úhlu přímého a to jest, když čtyři dané body jsou na přímce nebo na kružnici.

Jednorozměrné množství imaginárních bodů na přímce, z nichž každé čtyři mají reálný dvojpoměr, sluje podle Staudta řetěz. Obrazem takového řetězu v Gaussově rovině je tedy přímka neb kružnice (srov. úlohu 4, str. 36).

Poznámky a cvičení. 1. Nechť obecná transformace (5) má dvojné body α, β. Pak ji lze upraviti na tvar

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = k\,\frac{z - \alpha}{z - \beta};$$

k má význam dvojpoměru $(\alpha\beta zz')$. Je-li k reálné, pak vždy dva přidružené body s oběma dvojnými jsou na kružnici.

2. Kdy je předešlá transformace involuční? ($k = -1$). Pak jsou přidružené body z, z' s dvojnými na kružnici, jež odpovídá sama sobě. Prorýsujte případ $\alpha = +i$, $\beta = -i$. Sestrojte kružnici, jež odpovídá přímce v obecné poloze, přímce středem involuce, kružnici v obecné poloze a kružnici jdoucí dvojným bodem. (Vyjádřete příslušnou transformaci nejdříve analyticky.)

3. Proberte podobně transformaci $z' = az + b$ (a i b komplexní). Kde jsou dvojné body? (Jeden v nekonečnu.)

4. Stanovte dvojné body transformací a) $z' = z + b$ (oba v nekonečnu); b) $\dfrac{1}{z' - \alpha} = \dfrac{1}{z - \alpha} + k$ (splývají v bodě α).

5. Kdybychom chtěli „zobrazit" imaginární body v rovině na jiný geometrický útvar tak, aby bodu imaginárnímu v rovině odpovídal reálný bod tohoto útvaru, musel by tento útvar býti čtyřrozměrný. Chceme-li se vyhnouti operacím v prostoru čtyřrozměrném a zůstati pouze v rovině, pak můžeme použíti následující myšlenky, jež byla již naznačena v úloze 3 str. 40. Jsou-li X, Y dva imaginární sdružené body na nositelce p, spojme je s kruhovými body roviny I_1, I_2; přímky XI_1, YI_2 se protínají v reálném bodě P, XI_2, YI_1 v reálném bodě Q a tato dvojice může sloužiti jako obraz dvojice X, Y. Dvojice imaginárních sdružených bodů X, Y je takto zobrazena na dvojici reálných bodů P, Q. Jako je možno na přímce jednomu směru přiřaditi jeden, druhému druhý ze dvou imag. sdružených bodů, je možno i zde vhodnou úmluvou dosíci toho, že úsečka PQ je orientována a že počáteční bod patří prvému, koncový druhému z obou bodů. Do těchto podrobností nemůžeme zacházeti, ale všimněme si, že s jistou křivkou v rovině, jež obsahuje dvourozměrné množství imaginárních bodů, je pak spojena bodová příbuznost v rovině, jež bodu P přiřaďuje bod Q. Nejjednodušší případ je reálná přímka. Volme ji za osu x. Dva sdružené body na ní jsou $(x_1 + ix_2; 0)$, $(x_1 - ix_2; 0)$. Isotropické přímky jimi vedené se protínají v bodech $(x_1; x_2)$, $(x_1; -x_2)$, tedy v bodech symetricky položených podle osy x. Obrazem dvojin imag. sdružených bodů na přímce je tedy souhrn dvojic souměrně sdružených bodů podle této přímky. Buď dána reálná kružnice $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Spojnice dvou imaginárních sdružených bodů kružnice je přímka, která od středu má vzdálenost větší poloměru. Buď taková $x = \xi$ $(\xi > r)$. Tato protíná kružnici

v bodech $X(\xi; i\sqrt{\xi^2 - r^2})$; $Y(\xi; -i\sqrt{\xi^2 - r^2})$. Reálné obrazy těchto bodů jsou $P(\xi + \sqrt{\xi^2 - r^2}; 0)$, $Q(\xi - \sqrt{\xi^2 - r^2}; 0)$ na ose $y = 0$. Jest ihned patrno, že $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = r^2$. Bodová příbuznost, jež je obrazem dvojic imaginárních bodů, je zde kruhová inverse.*)

Vyjádřete vztah mezi body P, Q, jde-li o zobrazení imaginárních bodů těchto útvarů: a) přímky $y = i$ (symetrie a pošinutí), b) $y = 2ix$ (symetrie a podobnost), c) $y = ix$ (výjimečný případ!, všechny úsečky PQ mají společný jeden koncový bod), d) kružnice $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

---

*) O tomto způsobu zobrazení najde čtenář v díle E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, jež však předpokládá čtenáře značně vyspělého, a také v díle H. Beck, Koordinatengeometrie.