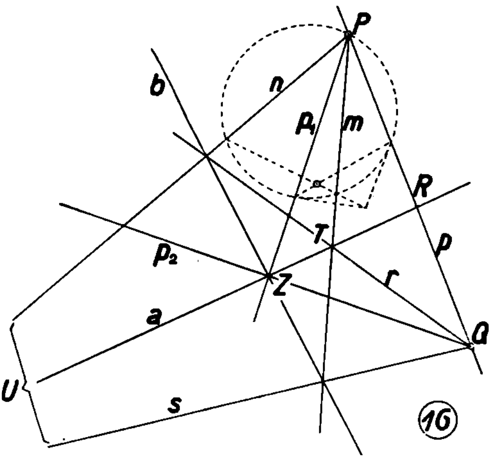
2. Jsou dány reálné body P, Q. Ukažte, že se isotropické přímky jdoucí těmito body protínají na jejich ose symetrie. Je-li střed této úsečky O, vzdálenost $\overline{PQ} = 2d$, jest vzdálenost imag. bodů hledaných od středu O rovna $\pm\, di$.



16

3. Dva imaginární sdružené body X, Y na nositelce p spojte s kruhovými body I_1, I_2. [Bodu nevlastnímu P^∞ na p je v involuci přiřaděn střed O; buď $A'A''$ pár involuce, který odděluje harmonicky P, P^∞, t. j. symetrický podle O a označme $\overline{OA'} = -\overline{OA''} = a$, pak průsečíky $\alpha \equiv (XI_1, YI_2)$, $\beta \equiv (XI_2, YI_1)$ jsou reálné na kolmici vztyčené v O ku p a ve vzdálenosti a.]

4. Dány jsou přímky p, q a bod M mimo ně. Sestrojte průsečíky přímek p, q s isotropickými přímkami jdoucími bodem M a pak spojnice těchto bodů (t. j. jejich reálné průsečíky).

7. Jiné imaginární útvary v rovině.

Imaginární kružnicí rozumíme křivku danou rovnicí

$$x^2 + y^2 - 2\,(a_1 + ia_2)\,x - 2\,(b_1 + ib_2)\,y + p_1 + ip_2 = 0;$$

imaginární bod $S\,(a_1 + ia_2;\, b_1 + ib_2)$ jmenujeme jejím středem, úsečka r, vyhovující rovnici $(a_1 + ia_2)^2 + (b_1 + ib_2)^2 - (p_1 + ip_2) = r^2$ je její poloměr. Křivka může míti dva reálné body, jejichž souřadnice hoví rovnicím

$$x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + p_1 = 0,\ 2a_2x + 2b_2y - p_2 = 0.\text{*)}$$

Na př. takovou kružnicí je křivka

$$k \equiv x^2 + y^2 + r^2 = 0;$$

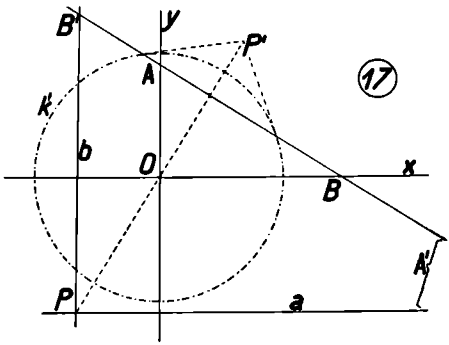
její střed je $O\,(0; 0)$ a poloměr ri.**) Nemá reálného bodu (protože součet čtverců tří reálných čísel nemůže býti roven nule). Táž myšlenka, která vedla k tomu, že jsme imaginární body na přímce nahradili souhrnem párů bodových, které byly harmonicky sdruženy k imaginárním bodům (říkáme také, že byly polárně sdruženy k těmto bodům) — právě tak imaginární přímky ve svazku — vede i zde k tomu, abychom imaginární kružnici nebo obecněji imaginární kuželosečky zavedli pomocí jejich polárních systémů. Vyložíme stručně, co máme na mysli. Bodu $(x_0; y_0)$ v rovině patří vzhledem k uvažované imaginární kružnici k polára $xx_0 + yy_0 + r^2 = 0$ a obráceně obecné přímce $ux + vy + 1 = 0$ patří vzhledem ke kružnici pól $x_0 = ur^2$, $y_0 = vr^2$. Takovým způsobem jsou si body roviny a přímky pomocí kružnice k přiřazeny. Body, které leží na své poláře, jsou body křivky — řídicí křivky polární soustavy (systému). Tato vlastnost je pro řídicí křivku charakteristická.

Ke konstrukcím lze výhodně použíti reálné kružnice $k' \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$, jíž říkáme reálná zástupkyně. Na př. polára bodu $(x_0; y_0)$ k zástupkyni jest $x_0x + y_0y - r^2 = 0$ a přirovnáme-li rovnice obou polár, vidíme, že jedna z druhé vznikne otočením kolem O o 180°. Také obráceně k přímce p sestrojíme pól k imaginární kružnici, se-

*) O takových imaginárních kuželosečkách obšírně pojednává V. Jarolímek v knize: Základové geometrie polohy v rovině a prostoru.

**) Kružnice o středu O a poloměru nula má rovnici $x^2 + y^2 = 0$, kterou lze psáti $(y + ix)(y - ix) = 0$. Tato kružnice se tedy rozpadá ve dvojinu isotropických přímek.

strojíme-li napřed pól P' k reálné zástupkyni a pak bod P symetrický podle středu O (obr. 17). Tato korespondence mezi body a přímkami roviny se zove **antipolarita** vzhledem k reálné kružnici k'; antipolarita je složena z polarity ke kružnici k' a středové symetrie vzhledem k středu kružnice k'.



Průsečíky přímky p s kružnicí k jsou potom dány involucí (jako samodružné její body), kterou na p určuje polární systém. Pro určení involuce zvolíme výhodně dva páry: Tak bodu A na ose y patří polára a, jež seče p v A' ($PA' \perp OA$), bodu B patří polára b, jež dává B'. Dvojné body involuce AA', BB' jsou hledané průsečíky. Přímky, které je spojují s pólem P jsou tečny z bodu P.

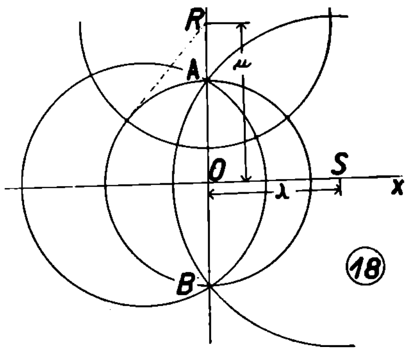
Svazek kružnic je souhrn kružnic, jež mají společné dva body. Volme tyto základní body svazku reálné, jejich spojnici za osu y, střednou za osu x (obr. 18). Buďte A $(0; c)$, B $(0; -c)$. Kružnice svazku o středu S $(\lambda; 0)$ má pak rovnici

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - c^2 = 0.$$

Jsou-li základní body A, B imaginární sdružené, tedy A $(0; ci)$, B $(0; -ci)$, potom rovnice obecné kružnice svazku jest

$$(x-\lambda)^2+y^2=-c^2+\lambda^2$$

a ve svazku jsou kružnice reálné ($|\lambda|>c$) a imaginární ($|\lambda|<c$) a dvě kružnice o poloměru nula při $\lambda=\pm c$. V prvém případě vytíná svazek na ose x eliptickou involuci se středem O; v druhém případě je involuce hyperbolická.



Chordála AB je geom. místo středu kružnice, která seče pravoúhle všechny kružnice svazku (poloměr rovná se délce tečny vedené z bodu na chordále ke kružnicím svazku). Tyto ortogonální kružnice tvoří nový svazek, *doplňkový* s prvým, a jeho základní body jsou nulové kružnice (imag.) prvého. Má-li tedy prvý základní body A $(0; c)$, B $(0; -c)$, má druhý základní body M $(ci; 0)$, N $(-ci; 0)$. Rovnice obecné kružnice doplňkového svazku o středu R $(0; \mu)$ jest

$$x^2+y^2-2\mu y+c^2=0.$$

Body A, B, resp. M, N jsou protější vrcholy čtyřúhelníka tvořeného minimálními přímkami.

Ohniska kuželosečky a vůbec ohniska algebraické křivky jsou body, ze kterých ke křivce jdou dvě isotropické tečny. Podle toho elipsa a hyperbola mají čtyři ohniska, neboť každým kruhovým bodem na nevlastní přímce jdou dvě tečny, tedy celkem čtyři. Dvě ohniska jsou reálná, v nich se protínají přímky imaginární sdružené, dvě jsou imaginární. Na př. elipsa

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

má reálná ohniska F_1 $(e; 0)$, F_2 $(-e; 0)$, imaginární F_3 $(0; ie)$, F_4 $(0; -ie)$, kde $e = +\sqrt{a^2 - b^2}$. Skutečně, hledáme-li isotropické tečny, protneme elipsu přímkou $y = \pm ix + p$ a vyjádříme, že oba průsečíky mají splynouti; nejdříve dostaneme rovnici

$$x^2 (a^2 - b^2) \pm 2a^2pix + a^2 (b^2 - p^2) = 0,$$

v níž položíme diskriminant rovný nule; dostaneme $p = \pm ei$. Rovnice isotropických tečen jsou tedy

$$y = i (x \pm e), \quad y = -i (x \pm e).$$

Jejich reálné body jsou F_1, F_2. Polára ohniska (spojuje dotykové body isotropických tečen) jest $x = \pm \frac{a^2}{e}$; (říkáme jí řídicí přímka kuželosečky). Také jest možno říci, že ohnisko je střed kružnice o poloměru nula, která se dvakrát elipsy dotýká, neboť rovnici této kružnice

$$(x - e)^2 + y^2 = 0$$

lze psáti

$$[y + i (x - e)] \cdot [y - i (x - e)] = 0.$$

V závorkách jsou levé strany rovnic isotropických tečen.

Lze ukázati: Pohybuje-li se bod P po řídicí přímce, otáčí se jeho polára kolem ohniska a spojnice F_iP je k ní kolmá, tedy: **Sdružené poláry procházející ohniskem kuželosečky jsou k sobě kolmé.**

Imaginární elipsa buď dána rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ $(a, b$ reálné, $a > b)$. Nahraďme křivku opět polárním systémem neboli polárním polem. Bodu $(x_0; y_0)$ patří polára

$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + 1 = 0$. Přirovnáme-li poslední rovnici k obecné rovnici přímky $ux + vy + 1 = 0$, dostaneme

$$u = \frac{x_0}{a^2}, \quad v = \frac{y_0}{b^2}.$$

To jsou formulky transformační, jež vyjadřují řečenou polaritu. Bodu $(x_0; y_0)$ je přiřaděna přímka $\left(u = \frac{x_0}{a^2}, v = \frac{y_0}{b^2}\right)$ a obráceně přímce s koeficienty u, v jest přiřaděn bod $(a^2u; b^2v)$. Ke konstrukci možno použíti opět reálné zástupkyně — reálné souosé elipsy s poloosami a, b. Polára bodu P k reálné elipse a polára k imaginární elipse jsou položeny symetricky podle společného středu O.

Také je možno mluviti o imaginární transformaci (lépe afinitě), která převádí jednu elipsu do druhé. Zde jest $x' = xi$, $y' = yi$.

Poznámky a cvičení. 1. Sestrojte kružnici, je-li dána reálným bodem P a dvěma imaginárními sdruženými X, Y na nositelce p. (Pozn.: Dané imaginární body jsou základní body svazku kružnic, doplňkový svazek má základní body reálné, jedna kružnice tohoto svazku jde bodem P; hledaná kružnice je k ní kolmá.)

2. Ukažte, že z ohnisek hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ jdou dvě isotropické tečny.

Podobně pro parabolu $y^2 = 2px$. (Pozn.: Parabola má jen jediné ohnisko, poněvadž se dotýká nevlastní přímky roviny, na které jsou kruhové body.)

3. Jest dána imaginární elipsa poloosami ai, bi ($|a| > |b|$). Sestrojte průsečíky s reálnou přímkou a tečny z reálného bodu (příslušnými involucemi). Stanovte ohniska této imaginární elipsy.

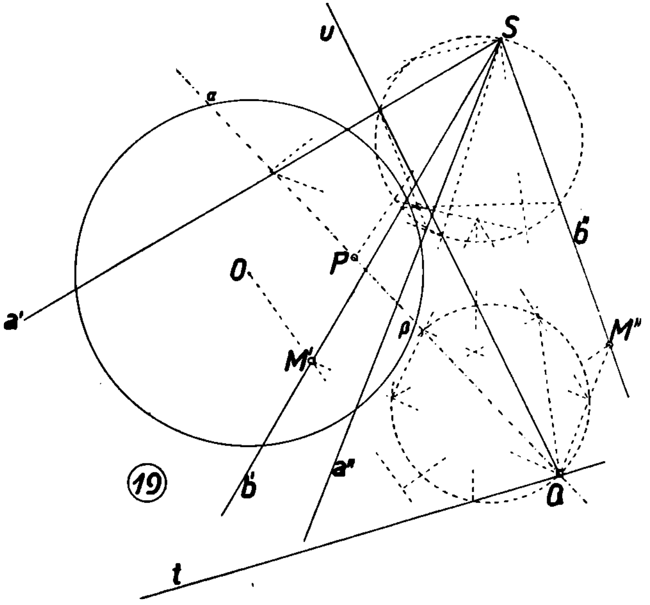
4. Opište ze středu O elipsy předešlé úlohy kružnici o poloměru r a stanovte její průsečíky s imaginární elipsou. Dvě tětivy jsou vždy reálné. Vezměte $r < b$, pak $b < r < a$ a konečně $r = a$ (nebo b).

5. Jest dán svazek soustředných kružnic $x^2 + y^2 = k^2$ (k je proměnné). Ukažte, že se vzájemně dotýkají v absolutních bodech (čili mají společné asymptoty).

6. Jest dána imaginární kuželosečka

$$\frac{x^2}{(a_1 + ia_2)^2} + \frac{y^2}{(b_1 + ib_2)^2} = 1.$$

Ukažte, že může míti nejvýše čtyři reálné body a čtyři reálné tečny. Napište rovnici poláry bodu $P\ (x_0;\ y_0)$ a obráceně určete souřadnice pólu dané přímky. Dokažte: Pohybuje-li se reálný pól P po reálné přímce r (která nespojuje reálné body elipsy), tu

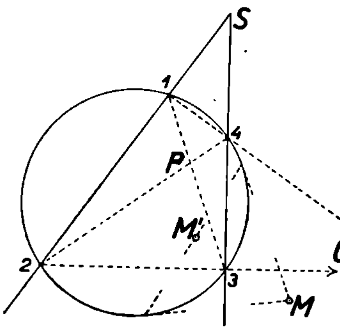


reálný bod pomyslné poláry vytvořuje reálnou kuželosečku, jež prochází středem a nevlastními body obou os.

7. Sestrojte průsečíky imaginární přímky s reálnou kružnicí.

Vezměme v úvahu současně obě imaginární sdružené přímky m, n. Všimněme si však nejprve případu, kdy máme kružnici a dvojinu reálných přímek s reálnými průsečíky (obr. 19a) *1, 2, 3, 4*. *SPQ* je společný polární trojúhelník. Bodu *M* v rovině lze přiřaditi M', ve kterém se protínají polára ke kružnici a polára ke dvojině přímek (*12, 34*), t. j. $S(1, 3, M, M') = -1$. Toto přiřadění bodů v rovině je jednojednoznačné. (Které body činí výjimku?) Přímka MM' seče však celý svazek kuželoseček o základních bodech *1, 2, 3, 4* v involuci (viz úl. 8, str. 23), M, M' oddělují harmonicky dvě z nich, oddělují tedy všechny a jsou dvojné body této involuce. Oddělují harmonicky i dvojiny přímek (*13, 24*), (*14, 23*).

Obraťme se k danému případu, kdy máme dvojinu imaginárních přímek m, n s průsečíkem S, kde $m = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$, $n = \begin{pmatrix} b' & a' \\ b'' & a'' \end{pmatrix}$. (obr. 19). Na poláře bodu S ke kružnici leží body P, Q, jež oddělují harmonicky m, n i α, β, jsou tedy reálné (v obr. 19 byly sestrojeny užitím kružnice jdoucí bodem S (str. 32)). Volme na b' bod M'; sdružený M'' je na b'' a na poláře bodu M' ke kružnici. V P se protínají dvě přímky, jež jdou společnými body kružnice a dvojiny (m, n). Tyto přímky jsou současně odděleny bodovými páry $M'M''$ a QS (vrcholy spol. polár. trojúhel.). Z P se promítnou oba páry involucí eliptickou, z Q se však páry $M'M''$, PS promítají involucí hyperbolickou a dvojné paprsky u, t jsou nositelky hledaných imaginárních bodů (v obraze byly sestrojeny užitím kružnice bodem Q).]



19a

8. Proveďte duální úlohu: K dané kružnici sestrojiti tečny z imaginárního bodu. [Uvažujte opět napřed případ, kdy máme dva reálné body X, Y mimo kružnici. Z nich vycházejí tečny *1, 2* resp. *3, 4*. Jejich spojnice $p \equiv (13, 24)$, $q \equiv (14, 23)$ se spojnicí $s \equiv XY$ tvoří polární trojúhelník. Jakou úlohu hrála v předešlém případě dvojice přímek, takovou zde hraje dvojice bodů X, Y. K přímce m' lze přiřaditi m'', jež spojuje pól přímky m' ke kružnici a ke dvojici (X, Y), t. j. průsečíky přímek m', m'' s přímkou s oddělují harmonicky body X, Y. Tím vznikají na stranách uvedeného polárního trojúhelníku involuce, jichž lze užíti v případě, kdy body X, Y jsou imaginární sdružené.]

Podobná úloha je sestrojení ohnisek kuželosečky na př. elipsy. Imaginární body jsou zde kruhové body v nekonečnu. Nevlastní přímka a osy kuželosečky tvoří polární trojúhelník. Přidružené přímky m', m'' jsou k sobě kolmé, poněvadž oddělují harmonicky body kruhové.

8. Elementy prostorové geometrie polohy.

Prvky geometrie v prostoru jsou bod, rovina a přímka. V prostoru stojí duálně proti sobě bod a rovina; přímka je duální opět přímce — jeví se jako spojnice dvou bodů a jako průsečnice dvou rovin. Ke každé polohové větě v prostoru (kde jde o promítání a protínání) patří věta duální, kterou dostaneme, zaměníme-li výrazy bod, přímka, rovina, spojnice, průsečnice za výrazy duální rovina, přímka, bod, průsečnice, spojnice. Jako příklad uvedeme vedle sebe duální věty:

Dva body určují přímku; jest to jejich spojnice.	Dvě roviny určují přímku; jest to jejich průsečnice.
Přímka a rovina mají obecně společný bod.	Přímka a bod určují obecně rovinu.
Tři roviny mají obecně společný jediný bod.	Tři body určují obecně jedinou rovinu.

Množství bodů na přímce sluje opět řada bodová, duální útvar je množství rovin, které jdou touž přímkou a sluje svazek rovin. Přímka je osa svazku.

Souhrn rovin s osou s a rovinami $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ je protťat přímkou p mimoběžnou s osou v řadě $A, B, C, D, \ldots$, kde bod A leží v rovině α, B v β atd.; řada p je perspektivní se svazkem rovin. Rovina ϱ, která nejde osou s, seče svazek rovin ve svazku paprsků $a, b, c, d, \ldots$ s vrcholem R na s, jenž sluje perspektivní se svazkem rovin. Je-li σ jiná rovina, dává opět svazek s vrcholem S na s a oba svazky v rovinách ϱ, σ jsou perspektivní; průsečnice (ϱ, σ) je osa perspektivnosti. Čtyři roviny svazku (s) tvoří dvojpoměr $(\alpha\beta\gamma\delta) =$