Imaginární elementy v geometrii

2. Imaginární body na reálné přímce

In: Ladislav Seifert (author): Imaginární elementy v geometrii. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1941. pp. 16–23.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402978

4. Čtyři přímky a, b, c, d v rovině, z nichž žádné tři nejdou týmž bodem, tvoří úplný čtyřstran. Má šest vrcholů; protější vrcholy slují dvojice (ab), (cd); (ac), (bd); (ad), (bc). Jejich spojnice tvoří diagonální trojstran. Vytkněte opět všechny harmonické čtveřiny, které zde povstávají. (Plyne opět z centrálního promítání.)

5. Předchozích úvah lze užíti, abychom provedli úlohy 1, 2 pouze pravítkem (bez rovnoběžek a přenášení délek). Máme-li k bodům A, B, Q na přímce sestrojiti čtvrtý harmonický Z, veďme bodem A dvě přímky (obr. 7) a protněme je přímkou bodem Q jdoucí v bodech X, Y. Spojme tyto body s bodem B a dostaneme D, C; jejich spojnice jde bodem Z. Sestrojte podobně ke třem paprskům čtvrtý harmonický jen pravítkem!

6. Dokažte: Jsou-li na dvou různoběžkách harmonické čtveřiny $ABQZ$, $CDSZ$ o společném bodě Z (obr. 7), pak jsou perspektivní dvojím způsobem podle středů X, Y.

Jsou-li dva svazky harmonické o společném paprsku, na př. $Y(ABQZ)$, $Z(ADPY)$, jsou perspektivní rovněž dvojím způsobem (jedna osa perspektivnosti jest AC, druhá BD)!

2. Imaginární body na reálné přímce.

Vytkněme na přímce bod O jako počátek souřadnicové soustavy a určujme bod P vzdáleností od počátku O. Reálné vzdálenosti $\overline{OP} = x$ patří reálný bod, je-li vzdálenost dána číslem komplexním $x_1 + ix_2$, $(x_2 \gtrless 0)$, přisuzujeme jí bod imaginární. Vzdálenosti $x_1 - ix_2$ patří bod imaginární sdružený k prvnímu. Souřadnice obou bodů jsou kořeny kvadratické rovnice

$$[x - (x_1 + ix_2)] \,.\, [x - (x_1 - ix_2)] = 0,$$

neboli

$$x^2 - 2x_1x + (x_1^2 + x_2^2) = 0, \tag{1}$$

jež má reálné koeficienty.

Obráceně kvadratická rovnice s reálnými koeficienty

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \tag{2}$$

definuje bodový pár o souřadnicích

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

reálný při $b^2 - ac > 0$ a imaginární při $b^2 - ac < 0$. V případě $b^2 - ac = 0$ splynou obě hodnoty, levá strana rovnice (2) je úplná druhá mocnina a říkáme, že rovnice má dvojnásobný kořen.

Lze však nalézti širší geometrický význam rovnice (2), jenž platí v případě reálných i imaginárních kořenů a dovoluje v obou případech operovati jen s reálnými elementy. V algebře sluje trojčlen $ax^2 + 2bx + c$ kvadratická forma.*) K ní patří polární forma $ax'x'' + b(x' + x'') + c$, kde $x'x''$ jsou proměnné. Položíme-li tuto formu rovnou nule, dostaneme rovnici

$$ax'x'' + b(x' + x'') + c = 0 \tag{3}$$

lineární v x' i v x'', tedy bilineární. Povšimněme si jejího geometrického významu. Definuje na přímce příbuznost či korespondenci. Volíme-li bod o souřadnici x', dostaneme k němu jednoznačně přiřaděný bod x'' a naopak podle rovnic

$$x'' = -\frac{bx' + c}{ax' + b}, \quad x' = -\frac{bx'' + c}{ax'' + b}, \quad (b^2 - ac \gtrless 0).$$

Proběhne-li x' hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$, proběhne i x'' všechny hodnoty. Takovou příbuznost definuje i obecnější bilineární rovnice

$$ax'x'' + bx' + cx'' + d = 0;$$

tato příbuznost sluje projektivnost. Rovnice (3) je rovnicí speciální projektivnosti, neboť je symetrická podle x', x''; tato speciální projektivnost sluje involuční nebo involuce; involuce je tedy souhrn párů bodových definovaných rovnicí (3).

Involuce má dva elementy samodružné neboli dvojné, které odpovídají samy sobě. Za předpokladu, že v rovnici (3) jsou vzdálenosti x', x'' měřeny stejným způsobem od téhož počátku, položme $x' = x'' = x$ a dostaneme rovnici, která

*) Obyčejně se píší tyto formy ve tvaru homogenním $ax^2 + 2bxt + ct^2$; tvar nehomogenní dostaneme, položíme-li $t = 1$.

určuje elementy samodružné a je identická s rovnicí (2). Tyto elementy jsou reálné různé při $b^2 - ac > 0$; příslušnou involuci jmenujeme **hyperbolickou**; imaginární sdružené při $b^2 - ac < 0$, pak zoveme involuci **eliptickou**. Všimněme si případu $b^2 - ac = 0$. Pak lze rovnici (3) psáti

$$a^2x'x'' + ab(x' + x'') + b^2 = 0$$

čili

$$(ax' + b)(ax'' + b) = 0.$$

Zvolíme-li x' (nebo x'') jakkoli, patří mu vždy týž bod $x'' = -b : a$ (nebo $x' = -b : a$); tato involuce sluje **parabolická** (degenerovaná).

Všimněme si některých vlastností involuce hyperbolické a eliptické. Předpokládáme, že na přímce je jeden bod nevlastní neboli nekonečně vzdálený, který odpovídá hodnotám x', x'' velmi velikým a tvoří pár involuce s bodem v konečnu ležícím, jejž zoveme **středem involuce**. Dělme rovnici (3) proměnnou x'' a dostaneme

$$ax' + b\left(\frac{x'}{x''} + 1\right) + \frac{c}{x''} = 0.$$

Necháme-li zvětšovati $x'' \to \infty$, vymizí členy $\frac{bx'}{x''}$ a $\frac{c}{x''}$ a dostaneme

$$ax' + b = 0 \quad \text{nebo} \quad x' = -b : a.$$

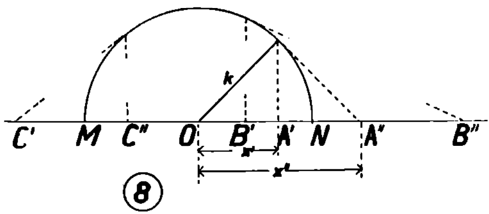
Za předpokladu $a \gtrless 0$ jest tedy souřadnice středu involuce $-b : a$ a střed je v konečnu. Volme jej za počátek souřadnic O. Pak v nové rovnici (3), která definuje involuci, musí býti $b = 0$ a involuce je dána jednodušší rovnicí

$$ax'x'' + c = 0, \quad \text{čili} \quad x'x'' = -\frac{c}{a}. \tag{4}$$

Poslední rovnice vyjadřuje důležitou metrickou vlastnost involuce:

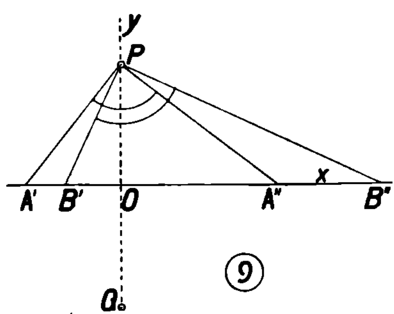
Součin vzdáleností odpovídajících si bodů involuce od středu involuce je konstantní (sluje **mocnost involuce**).

Je možno vždy předpokládati, že v rovnici (4) a je kladné, tedy pro involuci hyperbolickou $c < 0$, pro eliptickou $c > 0$. Jest tedy pro involuci hyperbolickou $x'x'' = k^2$, pro eliptickou $x'x'' = -k^2$. (Srovnej rovnice (3), (4), str. 13.)



V prvém případě jsou odpovídající si body A', A'' na téže straně středu O (obr. 8) a opíšeme-li kolem O kružnici poloměrem $k = \sqrt{\overline{OA'} \cdot \overline{OA''}}$, seče tato přímku ve dvojných bodech M, N. Dělící poměr bodu A' k M, N jest $\frac{\overline{MA'}}{\overline{NA'}} = \frac{x' + k}{x' - k}$, dělící poměr bodu A'' $\left(x'' = \frac{k^2}{x'}\right)$ jest $\frac{x'' + k}{x'' - k} = -\frac{x' + k}{x' - k}$, liší se tedy oba jen znaménkem. Body A', A'' oddělují tedy harmonicky dvojné body M, N.

V druhém případě (obr. 9), kdy involuce je eliptická, jsou odpovídající si body A', A'' na různých stranách středu O, a opíšeme-li nad $A'A''$ kružnici, prochází tato pevnými body P, Q, kde $\overline{OP} = \overline{OQ} = k = \sqrt{|\overline{OA'}| \cdot |\overline{OA''}|}$, nebo jinak, každá dvojina involuce se z bodů P, Q promítne pra-



vým úhlem. Dvojné body involuce jsou imaginární vé vzdálenosti $x = \pm ki$. Definici dělícího poměru a dvojpoměru přijatou pro reálné elementy béřeme za platnou i pro imaginární. Poznáme, že i zde platí $\frac{x' + ki}{x' - ki} = - \frac{x'' + ki}{x'' - ki}$, čili imaginární dvojné body a libovolný pár involuce tvoří harmonickou čtveřinu. Možno tedy říci:

Involuce bodová na přímce je souhrn párů bodových, které harmonicky oddělují dva reálné nebo imaginárné body.

Z dalších vlastností involuce uveďme:

a) Involuce je určena dvěma páry bodů M', M''; N', N''.

Označme jejich souřadnice m', m''; n', n'' a dosaďme do rovnice (3). Dostaneme tak dvě rovnice pro neznámé a, b, c:

$$am'm'' + b\,(m' + m'') + c = 0,$$
$$an'n'' + b\,(n' + n'') + c = 0.$$

Vyloučením veličin a, b, c z těchto dvou a z rovnice (3) vychází (nejlépe ve tvaru determinantu) rovnice hledané involuce

$$\begin{vmatrix} x'x'' & x' + x'' & 1 \\ m'm'' & m' + m'' & 1 \\ n'n'' & n' + n'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozvedením najdeme

$$a : b : c = [(m' + m'') - (n' + n'')] :$$
$$: [m'm'' - n'n''] : [m'm''\,(n' + n'') - n'n''\,(m' + m'')].$$

a, b nemohou být současně rovny nule, neboť kdyby bylo $m' + m'' = n' + n''$, $m'm'' = n'n''$, byly by dané dva páry bodů identické.

b) Dvě involuce na přímce mají společný jeden pár bodový čili jinak: Jsou-li na přímce dány dva páry bodové reálné nebo imaginární, lze vždy sestrojiti pár, který je oba odděluje harmonicky.

Skutečně buďte dvě involuce na přímce dány rovnicemi

$$ax'x'' + b\,(x' + x'') + c = 0,$$
$$a_1x'x'' + b_1(x' + x'') + c_1 = 0.$$

Z nich vychází

$$x'x'' = \frac{bc_1 - cb_1}{ab_1 - ba_1}, \quad x' + x'' = \frac{ca_1 - ac_1}{ab_1 - ba_1}$$

a tedy souřadnice x', x'' společného páru jsou kořeny kvadratické rovnice

$$(ab_1 - ba_1)\,x^2 - (ca_1 - c_1a)\,x + bc_1 - b_1c = 0;$$

společný pár je reálný nebo imaginární.

Vraťme se opět k původnímu úkolu, jak nalézti konstrukce vhodné pro operace s imaginárními body. Je-li dán na přímce imaginární bod $x_1 + ix_2$, můžeme určiti jeho sdružený $x_1 - ix_2$; oba jsou kořeny rovnice (1) s reálnými koeficienty. S takovou kvadratickou rovnicí obecného tvaru (2) souvisí však rovnice (3) definující involuci (v tomto případě eliptickou). A skutečně tato eliptická involuce jest velmi vhodný representant dvojiny imaginárních sdružených bodů (jako svých bodů samodružných). Lze však i rozlišiti jeden od druhého, jak ukázal Staudt, použijeme-li orientace involuce. Sledujme na obr. 8 nejprve na hyperbolické involuci směr pohybu. Pohybuje-li se A' na přímce v jistém smyslu, pohybuje se A'' ve smyslu opačném a dvakrát splývají oba body ve dvojných bodech. Dvojice přidružených bodů se nikdy neoddělují, leží mimo sebe, nebo jedna uvnitř druhé, na př. $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$. (Při tom předpokládáme, že přímka má jeden bod nevlastní čili nekonečně vzdálený a jest tedy jako uzavřená.) V případě hyperbolické involuce nelze tedy mluviti o smyslu involuce. — Jinak je tomu v případě involuce eliptické (obr. 9). Pohybuje-li se A' v některém smyslu, pohybuje se A'' v témže smyslu (pravý úhel $A'PA''$

se otáčí kolem vrcholu P) a nikdy nesplynou. Dva páry eliptické involuce se vždy oddělují, viz $A'A''$, $B'B''$, OP^∞. Jeden smysl pohybu je dán sledem $A'B'A''$, nebo což je totéž $B'A''A'$ (přes P^∞), nebo $B'A''B''$ atd., druhý sledem $A''B'A'$ nebo $B''A''B'$ atd. Můžeme tedy jeden z imaginárních bodů daných uvažovanou involucí přičleniti jednomu smyslu, druhý opačnému smyslu.

Imaginární bod na přímce je určen eliptickou involucí s připojeným smyslem.

Výhodné jest označení, které zavedl Vahlen.*) Je-li involuce dána páry $A'A''$, $B'B''$, označujeme její imaginární dvojné body

$$X = \begin{pmatrix} A'B' \\ A''B'' \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} B'A' \\ B''A'' \end{pmatrix};$$

první je spojen se smyslem $A'B'A''$, druhý se smyslem $B'A'B''$. V dalším budeme používati tohoto označení.

Poznámky a cvičení. 1. Určete střed a dvojné elementy involuce $b(x' + x'') + c = 0$ (symetrická involuce) a involuce $ax'x'' + b(x' + x'') = 0$.

2. Stanovte střed, dvojné elementy a rovnici involuce dané a) páry bodovými ($x'_1 = 4$; $x''_1 = 8$), ($x'_2 = 3$; $x''_2 = -1$); b) $(3 + 2i;\ 3 - 2i)$, $(4; 8)$; c) dvojným bodem (O) a párem $(1; -2)$; d) dvojnými body $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{8}$; e) dvojnými body $1 + i$; $1 - i$.

3. Najděte společný pár involucí: $2x'x'' - 5(x' + x'') + 8 = 0$, $2x'x'' - 15(x' + x'') + 108 = 0$.

4. Jsou dány dva páry bodové rovnicemi $a_1x^2 + 2b_1x + c_1 = 0$, $a_2x^2 + 2b_2x + c_2 = 0$; najděte rovnici páru, který oba harmonicky odděluje! (Viz podmínku (6), str. 14.)

5. Dokažte: Jsou-li dány dva páry involuce týmiž rovnicemi jako v předešlém odstavci, jsou ostatní páry dány rovnicí $(a_1x^2 + 2b_1x + c_1) + \lambda(a_2x^2 + 2b_2x + c_2) = 0$ při libovolném λ. (Užijte výsledku předešlé úlohy.)

6. Involuce má samodružné body: a) $2 \pm i$, b) $-2 \pm 3i$; určete tyto body v involuci způsobem Vahlenovým.

7. Svazek kružnic o základních bodech M, N seče přímku, jež nejde žádným z nich, v involuci; chordála dává střed invo-

*) Th. Vahlen, Konstruktionen und Approximationen, str. 114.

luce S, součin $\overline{SM} \cdot \overline{SN}$, který se rovná mocnosti bodu S ke kružnicím svazku, je mocnost involuce. Jak toho použíti, abychom sestrojili střed a dvojné body involuce dané páry bodovými $A'A''$, $B'B''$?

(Návod: Body $A'A''$, resp. $B'B''$ veďte kružnice, aby se protínaly v reálných bodech M, N. Chordála MN vytíná na přímce střed involuce, dotykové body kružnic, jež jdou body M, N a dané přímky se dotýkají, jsou dvojné body involuce.)

8. Obecně svazek kuželoseček, t. j. množství všech kuželoseček, které jdou čtyřmi body *1, 2, 3, 4*, seče přímku, jež nejde žádným z nich, v involuci. (Věta Desarguesova o svazku kuželoseček.) Volme tuto přímku za osu x; pak dvě kuželosečky svazku jsou dány obecnými rovnicemi tvaru

$$A \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$
$$B \equiv b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0,$$

a svazek je dán rovnicí

$$A + \lambda B = 0$$

při proměnném λ. Dosadíme-li $y = 0$, dostaneme pro průsečíky osy x s kuželosečkami svazku

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} + \lambda\,(b_{11}x^2 + 2b_{13}x + b_{33}) = 0$$

jako v úloze 5. Mezi kuželosečkami svazku jsou tři složené (degenerované) z dvojin přímek: *12, 34*; *13, 24*; *14, 23*. Máme tedy větu: Dvojiny protějších stran úplného čtyřrohu protínají přímku ve třech párech involuce.

3. Imaginární přímka ve svazku.

V reálné rovině buď dán svazek přímek o středu O. Volme dvě navzájem kolmé přímky s určitou orientací za osy x, y pravoúhlé soustavy souřadnic (obr. 5) a určeme přímku svazku tangentou úhlu, který svírá s kladnou osou x. Jest tedy rovnice obecné přímky ve svazku

$$y = mx; \tag{1}$$

$m = \operatorname{tg} \omega$ je parametr, který určuje přímku. Reálnému parametru patří reálná přímka, komplexnímu parametru přímka imaginární, jež mimo O nemá reálného bodu. Přímky $y = (m_1 \pm im_2)\,x$ slují imaginární sdružené.

Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty

$$Am^2 + 2Bm + C = 0 \tag{2}$$