Imaginární elementy v geometrii

Úvod

In: Ladislav Seifert (author): Imaginární elementy v geometrii. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1941. pp. 4–9.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402976

ÚVOD.

Sledujeme-li vývoj aritmetiky, vidíme, jak postupně od čísel celých, s nimiž se shledáváme již na úsvitě kultury, přišla v užívání čísla lomená neboli zlomky, pak čísla záporná, čísla irracionální a naposledy čísla soujemná neboli komplexní (imaginární), jež dostáváme, přičteme-li k reálným číslům násobky imaginární jednotky i $(= + \sqrt{-1})$. Historický vývoj se shoduje s obvyklým postupem školským. Zavedením komplexních čísel se velmi zjednodušila teorie rovnic.*) Kdybychom se omezili jen na reálná čísla, museli bychom říci, že rovnice druhého stupně s reálnými součiniteli má buď dva, nebo jeden, nebo žádný kořen, nebo kratčeji: Rovnice druhého stupně má nejvýše dva kořeny. Připustíme-li čísla komplexní, můžeme tvrditi obecně: Rovnice druhého stupně má vždy dva kořeny. O rovnici n-tého stupně s reálnými koeficienty museli bychom podobně říkati, že má nejvýše n kořenů a rozeznávati případy, kdy má $1, 2, 3, \ldots, n$ kořenů, nebo kdy nemá kořen. Připustíme-li však komplexní čísla a máme náležitý zřetel k násobnosti kořenů, můžeme vysloviti větu velmi obecnou: Rovnice n-tého stupně má n kořenů. Pokrok matematiky záleží v tom, že se podaří různé věty spojiti v obecnější a různé vlastnosti objasniti s téhož hlediska. To se obyčejně stane, podaří-li se nějaký pojem rozšířiti čili zobecniti neb zavésti nový, širší, jako se stalo v uvedeném případě s pojmem čísla, který byl rozšiřován postupně zavedením zlomků, čísel záporných, irracionálních a konečně komplexních.

Podobné důvody, jaké vedly v algebře k zavedení komplexních čísel, vedly i v geometrii k zavedení imaginárních elementů. Průsek přímky s kuželosečkou vede na př. v analytické geometrii na rovnici stupně druhého, průsek přímky s křivkou stupně n na rovnici n-tého stupně, a říkáme, že přímka seče kuželosečku ve dvou bodech, křivku n-tého

*) Viz dr. Š. Schwarz: O rovnicích. Cesta k vědění, sv. 1.

stupně v n bodech. Tu ovšem připouštíme, že komplexní řešení jsou stejně platná s reálnými. To nám dovoluje vysloviti větu tak obecnou. Úkolem podrobnějšího prozkoumání jest pak určiti, kolik řešení jest reálných a kolik imaginárních. Zřejmě jsou tato tvrzení založena prostě na tom, že algebraické operace platí stejně pro reálná jako pro komplexní čísla.

Zde vidíme cestu, jak lze imaginární elementy v geometrii nejsnáze zavésti.

Bod na přímce určujeme tak, že zvolíme na ní počátek O a od toho měříme vzdálenost bodu. Při tom přímku orientujeme, t. j. vzdálenost na jedné straně od O považujeme za kladnou, na druhé straně za zápornou. Reálnému bodu přisuzujeme reálné číslo, kladné nebo záporné (vzdálenost od 0), a obráceně reálnému číslu přiřaďujeme bod. Číslu komplexnímu $a + bi$, ($b \gtrless 0$) přiřaďme ideální bod, říkejme mu imaginární bod.*) Úlohou dalších stránek bude hledati geometrický smysl tohoto přiřadění.

Bodové řadě na přímce patří v rovině jako duální útvar svazek paprsků s vrcholem V. Volme jeden z nich x za základní a určeme další p vždy tangentou úhlu $\widehat{xp}$ měřeného podle úmluvy v kladném smyslu otáčení, t. j. proti pohybu hodinových ručiček. Paprsku p patří tedy parametr $\lambda = \operatorname{tg} \widehat{xp}$ a obráceně parametru λ patří paprsek. Je-li tento parametr komplexní $\lambda_1 + i\lambda_2$, ($\lambda_2 \gtrless 0$), říkáme, že přiřaděný paprsek je imaginární.

Podobně v rovině volíme dvě osy k sobě kolmé a náležitě orientované x, y s průsečíkem O a určujeme bod dvěma souřadnicemi. Jsou-li obě souřadnice reálné, jest bod reálný; není-li aspoň jedna reálná, říkáme, že bod je imaginární. Podobně v prostoru volíme tři k sobě kolmé osy x, y, z

*) Bylo by možno říkati také komplexní bod, avšak v literatuře jest již ustálen název imaginární pro elementy, jejichž souřadnice nejsou všechny reálné. Slovo imaginární má zde tedy význam jako slovo nereálný.

jdoucí počátkem O a přiřadíme bodu tři souřadnice čili trojinu čísel. Není-li aspoň jedna reálná, říkáme, že bod je imaginární. Podobně lze mluviti i o jiných imaginárních elementech (rovinách, přímkách, kružnicích, koulích atd.).

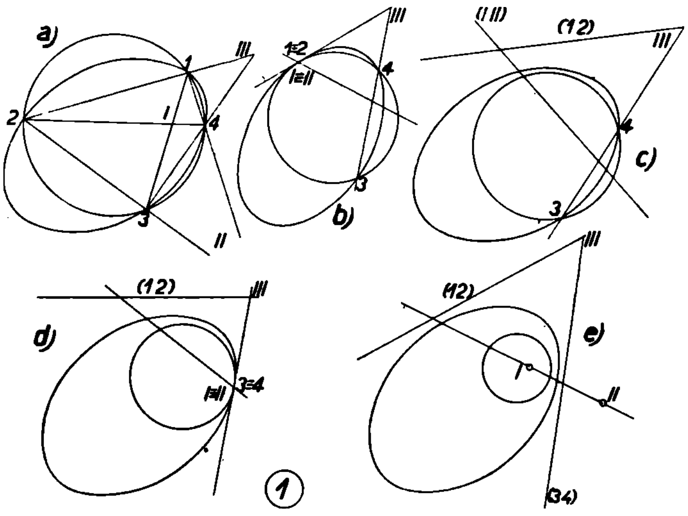
Toto zavedení imaginárních bodů, paprsků atd. je sice velmi abstraktní a naprosto nenázorné, ale zcela odůvodněné, neboť má za účel zjednodušení geometrických úvah.

Úloha, kterou si klademe, jest nalézti hlubší smysl tohoto zavedení, nebo lépe řečeno, takovou interpretaci imaginárních elementů, abychom konstrukce, které provádíme s reálnými elementy, mohli provésti i s imaginárními.

Povšimněme si však dříve aspoň stručně, jaké úvahy vedly k tomu, že se o imaginárních elementech, t. j. nejprve o imaginárních bodech, přímkách a rovinách, začalo mluviti a jak si postupem času dobyly úplné rovnoprávnosti s reálnými.

U kolébky moderní geometrie stál Poncelet (1788 až 1867). On je vlastním tvůrcem projektivní geometrie a v jeho úvahách hraje důležitou úlohu t. zv. princip kontinuity. Usuzoval asi takto: Povstává-li jeden obrazec z jiného spojitou změnou a je-li „právě tak obecný" jako onen, lze vlastnosti na jednom dokázané přenésti na druhý. Vlastnost taková nemůže zmizeti a jsme oprávněni z případu, kde jisté elementy skutečně jsou, souditi na případ, kdy některé elementy jsou ideální (t. j. imaginární). Na př. dvě kuželosečky mohou míti společné čtyři reálné body, vesměs různé *1*, *2*, *3*, *4* (obr. 1a). Spojitou změnou můžeme dostati případ, kdy dva body splynou (obr. 1b) další změnou pak tyto body zmizí a zůstanou jen dva reálné (př. c), pak i tyto splynou (př. d) a konečně dostaneme kuželosečky, které nemají reálného bodu (př. e). V případech c), d), e) však vždy dva určité imaginární body mají reálnou spojnici. Čtyřrohu *1234* patří diagonální trojúhelník *I II III*, jehož každý vrchol je pólem protější strany k oběma kuželosečkám. V případě a) jsou všechny vrcholy *I*, *II*, *III* reálné a různé, v b) splynou vrcholy *I*, *II*, v c) jsou *I*, *II* imaginární na reálné spojnici, v d) splynou v reálném bodu dotyku a v e) se opět od sebe rozliší, třeba průsečíky *1, 2, 3, 4* jsou imaginární.

Poncelet se snaží vybudovati geometrii na syntetických úvahách bez jakýchkoli výpočtů a vyhýbá se zřejmě pojmům délka a úhel, jež jsou základními pojmy metrické geometrie. Užívaje principu kontinuity, jest si patrně vědom toho, že k uvažovaným geometrickým pochodům patří



paralelní pochody algebraické, jež ovšem platí stejně pro reálné jako pro imaginární elementy. Na tomto příkladě dobře vidíme rozdíl mezi starou geometrií euklidovskou či elementární a novou či projektivní. Ve staré geometrii se studuje vždy určité individuum, zcela určitý geometrický útvar, kdežto v nové geometrii přichází v úvahu hned spojitá řada útvarů, které vznikají jeden z druhého. Útvary geometrické dříve pevné staly se proměnnými.

Tento princip kontinuity se ponenáhlu vžíval, ale přece se cítilo, že je zde něco, co potřebuje objasnění. Ještě velký německý syntetik J. Steiner (1796—1863) nemá k imaginárním elementům určitého stanoviska. Přišla však doba po roce 1850, již v historii matematiky zoveme kritickou, jejíž snahou bylo revidovati základy a která se snažila každé odvětví matematiky vybudovati tak, aby ze základních vět či axiomů vycházely ostatní logickou dedukcí. Tato snaha se v oboru, jejž máme na mysli, jevila dvojím způsobem. Nejprve se uznávala nutnost v případech, kde jisté elementy byly imaginární, podati nové důkazy, kde by se operovalo jen s elementy reálnými, a nemluviti vůbec o elementech imaginárních. Toto stanovisko je logicky správné, ale není účelné, neboť jsme nuceni předem rozlišovati všechny možné případy podle reálnosti elementů.*) Kladnou stránku této metody jest spatřovati v tom, že problém se považuje za řešený až jsou zodpověděny všechny otázky týkající se reálnosti. V té příčině znamená tato metoda značný přínos nových poznatků. Jiným směrem jdou pokusy, zjednati imaginárním elementům rovnoprávnost na základě nových k reálným obrazcům se vztahujících definic a zjednati výsledkům projektivní geometrie (syntetické) takovou obecnost, jako mají výsledky analytické geometrie. V té příčině má fundamentální důležitost spis Staudtův, Geometrie der Lage, a zejména jeho Beiträge zur Geometrie der Lage (Nürenberg 1856—60). Staudt se snažil vybudovati čistou geometrii polohy či projektivní geometrii nezávisle na metrických pojmech (délce a úhlu) a skutečně se mu v principu podařilo nalézti geometrickou paralelu pro algebraické operace. U Staudta a jeho následovníků vidíme stále jasnou tendenci, odstraniti výjimky z pravidla a dosáhnouti jednoduchosti a obecnosti. V takovém vývoji jest spatřovati

---

*) Dobrý příklad této metody je učebnice Reye, Geometrie der Lage, kde se autorovi podařilo vybudovati tímto způsobem teorii kuželoseček a útvarů kvadratických. Jde-li se k vyšším útvarům algebraickým, má tato metoda značné nesnáze.

pokrok vědy. Staudtův spis však se čte velmi těžko a začátečníku je téměř nepřístupný.*)

V této knížce se omezíme většinou jen na pouhou geometrickou interpretaci imaginárních výsledků, ke kterým vedou především kvadratické úlohy a jež je postačitelná k tomu, aby začátečník nabyl přesvědčení, že imaginární elementy mají v úvahách geometrických stejné oprávnění jako reálné. Sledujeme myšlenky Staudtovy jen v nejjednodušších případech, užívajíce prostředků pokud možno elementárních.

Na konec přidáváme kapitolu o Gaussově rovině, kde jde o jinou interpretaci imaginárního bodu, o zobrazení imaginárních bodů přímky na reálné body roviny. To jest jen nepatrná ukázka z moderní teorie imaginárních veličin. Podobné úvahy pro body v rovině neb prostoru nebo jiné útvary vedou k útvarům značně složitým a není možno se v tomto spisku jimi zabývati.

1. Základní věty geometrie polohy v rovině.

Základní elementy v rovině jsou bod a přímka. Místo přímka říkává se paprsek.

Přímá řada bodová je souhrn bodů na přímce. Je-li vyloučeno nedorozumění, říkáme krátce jen řada bodová. Svazek přímkový nebo paprskový je souhrn přímek v rovině, které jdou pevným bodem, jejž zoveme vrchol nebo střed svazku. Říkáme také jenom svazek.

Na každé přímce v rovině si myslíme jeden bod nevlastní čili nekonečně vzdálený. Nevlastní body všech přímek roviny vyplňují opět přímku — nevlastní přímku roviny (nekonečně vzdálenou). Tento předpoklad se obyčejně nazývá perspektivní názor či Desargueův, ač úvahy,

*) Přístupnější ze starších prací jsou: Stolz, Zur geometr. Bedeutung der complexen Elemente, Math. Annallen, sv. 4; Lüroth, Das imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, Math. Annallen, sv. 8.