7.

DODATEK: ÚLOHY PRO CVIČENÍ.

A. POUŽITÍ RŮZNÝCH METOD.

1. Podle příkladu v textu na str. 6 řešte čtyřmi způsoby úlohu: Sestrojiti trojúhelník, jsou-li dány jeho dvě strany a, b a délka těžnice t_c. — [a) Doplněním na rovnoběžník; b) použitím geometrických míst pro vrchol A, sestrojí-li se nejdříve t_c; c) homothetií, použijeme-li napřed jen poměru $a : b : t_c$; d) na základě výpočtu strany c; $c^2 = 2(a^2 + b^2) - 4t_c^2$.]

2. Sestrojte trojúhelník, je-li dán poloměr kružnice jemu opsané r, poloměr kružnice vepsané ϱ a úhel α. — [a) Určíme $\triangle ABS$ (S je střed kružnice vepsané); b) vypočteme a pak sestrojíme střednou OS; $\overline{OS}^2 = r(r - 2\varrho)$; O je střed kružnice opsané.]

3. Podobně sestrojte trojúhelník pravoúhlý, je-li dána jeho přepona c a ϱ; ($c = 2r$). — [Užijte též vztahu $a + b = 2(r + \varrho$!]

4. Sestrojte trojúhelník, je-li znám jeho obvod $2s$ a úhly. — [a) Známým způsobem, užitím pomocného trojúhelníka se základnou $2s$; b) použitím vztahu, že délka tečny vedené z C ke kružnici vně vepsané jest rovna s.]

5. Podobně dvěma způsoby sestrojte trojúhelník, známe-li $2s$, α, v_a.

6. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno c, $a + b$, γ. — [a) Určením pomocného trojúhelníka, která má stranu $a + b$; b) sestrojíte-li nejdříve c a pak užijete geometrických míst pro vrchol C. c) Jak lze podle toho sestrojiti průsečíky kružnice, která prochází ohnisky elipsy s touto elipsou? Ukažte také, že hledané průsečíky jsou dotykové body tečen, vedených k elipse z průsečíku dané kružnice s vedlejší osou elipsy.]

7. Podobně sestrojte trojúhelník, v němž je dáno: c, $a - b$, γ; odvoďte příslušné konstrukce pro hyperbolu.

8. Z konstrukce trojúhelníka, v němž známe c, $a \pm b$, α, ukažte, jak lze nalézti průsečíky přímky jdoucí ohniskem elipsy (hyperboly) s touto kuželosečkou. Která zvláštní úloha Apolloniova se zde vyskytuje? Řešte úlohu ještě jinak: a) kolineací s kružnicí opsanou z ohniska F; b) polárností; c) pro elipsu afinním vztahem se soustřednou kružnicí.

9. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno: c, γ, v_c. — [a) Užitím geometrických míst. b) Zvolte C a určete hyperbolu, která má střed C, jejíž asymptoty svírají úhel γ a jejíž výstřednost $e = cv_c : \sin \gamma$; společné tečny této hyperboly a kružnice $k(C, v_c)$ určují také trojúhelník hledaný. Proč?]

Ad 9. Všimněte si, že každé dvě společné tečny hyperboly nebo elipsy a soustředné kružnice $k(r)$, které jsou spolu rovnoběžné, protínají další soustřednou kružnici p, opsanou poloměrem rovným hlavní poloose hyperboly (elipsy), v patách P_1, P_2 kolmic, spuštěných na tečny s ohniska F, a že tětiva kružnice p, úsečka $P_1P_2 = 2r$. Z toho odvoďte konstrukci společných tečen.

10. Do daného čtverce (strana a) vepište čtverec, který má danou stranu b. — [a) Sestrojením pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona jest b a součet odvěsen jest a; b) otočením libovolného čtverce soustředného, který má stranu b, do příslušné polohy; c) na základě výpočtu úseku vzniklého na straně daného čtverce, $x = \dfrac{a + \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$].

11. Ke dvěma známým konstrukcím společných tečen dvou daných kružnic (homothetií a dilatací) připojte tuto třetí konstrukci a dokažte ji: Dotykové body vnější tečny jsou na spojnicích AM, resp. BM, kdež body A, B jsou vnější krajní body průměrů obou daných kružnic na středné, bod M je na chordále a při tom spojnice AM a BM jsou k sobě kolmé. Obdobně i pro vnitřní společné tečny. [Př. 1911, 14.[1])]

12. Sestrojte elipsu, která je dána polohou os a tečnou t s dotykovým bodem T. — [a) Poloosa a jest poloměrem afinní kružnice a úhel ST_01 jest pravý (S je střed elipsy, T_0 bod afinně sdružený s T a 1 bod samodružný); b) $\overline{ST_1} \cdot \overline{S1} = a^2$ (T_1 je pravoúhlý průmět bodu T do hlavní osy); c) analyticky dokažte konstrukci: Kružnice opsaná ze středu úseku SN, který utíná normála na ose vedlejší, a procházející T, jde vrcholy hlavní osy; podobně pro vrcholy osy vedlejší.]

13. Sestrojte parabolu danou ohniskem F a dvěma body A, B. — [a) Průvodiče určují přímku řídicí; b) kružnice $k(F)$ jdoucí A je kolineárně sdružena s parabolou.]

14. Určete průsečíky dané přímky p s parabolou, danou ohniskem F a přímkou řídicí f. — [a) Řešením zvláštní úlohy

[1]) Některé úlohy jsou převzaty z „Přílohy k Časopisu čes. mat. a fys." a z „Rozhledů matem.-přírodovědeckých". Jsou označeny: Př., resp. R s udáním ročníku a čísla úlohy nebo stránky článku.

Apolloniovy; b) homothetií pro střed $O \equiv (p \times f)$, sestrojíme-li hledaný bod jako homothetický s libovolným bodem 1 na p při poměru homothetie $\overline{O2} : \overline{OF}$ (bod 2 najdeme na spojnici OF tak, aby úsečka $\overline{12}$ se rovnala vzdále osti bodu 1 od f; c) kolineací s kružnicí (střed v bodě F); d) polárností.]

15. Sestrojte úsečku $x = \frac{ab}{c}$. — Kromě způsobu obvyklého a způsobu uvedeného na str. 12 ještě užitím pohyblivého pravého úhlu (pravoúhlého pravítka): Zvolíme dvě osy x, y k sobě kolmé, na x naneseme $\overline{OA} = a$ a na druhou stranu $\overline{OB} = b$, na y pak $\overline{OC} = c$. Kterou kolmicí dostaneme na y úsečku x?

16. Připomeňte si podle toho konstrukci poloměrů křivosti pro vrcholy elipsy a sestrojte středy kružnic křivosti také pouhým kružítkem.

17. Sestrojte $x = \sqrt{ab}$. — [Mimo obvyklý způsob a způsob uvedený na str. 12 proveďte konstrukci tak, že nanesete na osu x úsečky $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ stejným směrem, sestrojíte kružnici k nad průměrem AB a pak ji protnete orthogonálně kružnicí, která má střed na ose y. Kde je úsečka x? Dokažte!]

18. Sestrojte střed úsečky a pouhým kružítkem podle vztahu $x = \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2a}$.

19. Sestrojte pouhým kružítkem délky stran pravidelných mnohoúhelníků do dané kružnice $k(S, r)$ vepsaných, a to a_3, a_4, a_5, a_6, a_{10}, a_{12}, a_{15}, a_{20} a j. — [Jsou-li vrcholy pravidelného šestiúhelníku A až F, pak učiníme $\overline{AG} = \overline{DG} = \overline{AC}$; $\overline{SG} = a_4$; potom $\overline{CH} = \overline{EH} = \overline{SG}$; $\overline{SH} = a_{10}$ atd.]

B. ÚLOHY O KRUŽNICI.

20. Použitím příslušných úloh Apolloniových sestrojte kuželosečku, je-li dáno její ohnisko F a ještě a) tři její body A_1, A_2, A_3; b) dva body a tečna t; c) jeden bod a dvě tečny; d) tři tečny. — [Určíme buď kružnici $q(F', 2a)$ nebo $p(S, a)$[2]): K tomu použijeme kružnic $k_i(A_i, \overline{A_iF})$, resp. kružnic sestrojených nad průměry FA_i; mimo to bodů Q_i, souměrně sdružených s F podle tečen t_i, resp. pat P_i kolmic spuštěných s F na t_i.]

---

[2]) F' je druhé ohnisko, S střed kuželosečky, a je hlavní poloosa.

21. Podobně sestrojte kuželosečku, známe-li F, směr osy a mimo to ještě a) dva body; b) dvě tečny; c) bod a tečnu.

22. Určete průsečíky dané přímky s elipsou (hyperbolou), známe-li F, F' a $2a$. — [Použijeme kružnice $q(F', 2a)$.]

23. Určete obdobně průsečíky dvou kuželoseček, které mají společné ohnisko. Jak jednoduše dostaneme společné tečny takových kuželoseček? — [Použitím bodů Q.]

24. Dokažte, že kružnice k opsaná z ohniska hyperboly poloměrem b (vedlejší poloosa) je protata kružnicí $p(S, a)$ orthogonálně. — Užitím tohoto výsledku sestrojte hyperbolu, dáno-li F, b a mimo to ještě a) dvě tečny; b) tečna a bod; c) dva její body.

25. Podobné úlohy řešte pro elipsu. — [Zde však jest obdobná kružnice k protata kružnicí p diametrálně.]

26. Sestrojte kružnici k, je-li dán pól P a jeho polára p vzhledem k hledané kružnici k a mimo to kružnice k_1, kterou k orthogonálně protíná. — [Nejdříve sestrojíme pomocnou kružnici k°, která prochází P a jež orthogonálně protíná k i k_1. (R. 14, 5).]

27. Sestrojte kružnici k, je-li dán pól P s polárou p a mimo to kružnice k_1, kterou k protíná diametrálně nebo které se k dotýká. — [Užijeme chordál trojice (P, k_1, k). (R. 14, str. 63).]

28. Sestrojte kružnici k, je-li dán pól P s polárou p a poloměr r. — [a) Lze sestrojiti společnou chordálu bodu P a všech kružnic k z P a p, které tvoří svazek; svazek kružnic k nim orthogonálních je určen základními body P, Q, kdež Q je pata kolmice spuštěné s P na p. b) Zcela jednoduchá konstrukce vyplývá z výpočtu vzdálenosti x středu kružnice k od p; označíme-li $\overline{PQ} = m$, pak $x = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + r^2}$.]

Jiné určující podmínky:

29. Sestrojte kružnici, která jde danými dvěma body A, B a dělí danou kružnici $k(O)$ v daném poměru $m : n$. — [Použijeme pomocné kružnice $k'(O)$, jejíž tečny protínají k tak, jak úloha vyžaduje, a další pomocné kružnice k'' jdoucí A, B a protínající k libovolně. (Př. 1912, 14).]

30. Sestrojte kružnici, která prochází dvěma danými body A, B a na dané přímce p vytíná tětivu dané délky u. — [Vypočteme a sestrojíme snadno vzdálenost x středu této tětivy od průsečíku P přímky p s AB; $x = \sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + t^2}$, kde $t^2 = \overline{PA} \,.\, \overline{PB}$.]

31. Odvoďte (analyticky) a sestrojte geometrické místo středů kružnic k, které protínají dané kružnice $k_1(O_1)$ a $k_2(O_2)$ tak, že chordály všech dvojic (k_1, k) a (k_2, k) procházejí danými body M_1, resp. M_2. — [Je to přímka kolmá na spojnici M_1M_2. (Důkaz synthetický — projektivními svazky — viz Př. 1912, str. 231.) — K jakému geometrickému místu dospějeme, když body M_1 a M_2 splynou s O_1, resp. O_2?]

32. Podobně: Geometrické místo středů kružnic k, které protínají $k_1(O_1)$ orthogonálně a k_2 tak, že chordály dvojic (k, k_2) jdou vždy bodem M, jest přímka kolmá na spojnici O_1M. (Důkaz synthetický viz opět jako v př. 31.)

33. Podle toho řešte úlohu: Sestrojiti kružnici k, která protíná dané kružnice k_i $(i = 1, 2, 3)$ tak, že chordály dvojic (k, k_i) procházejí danými body M_i. — [Můžeme postupovati také tak, že nejdříve sestrojíme pomocné kružnice a_i se středy A_i, které protínají k_i orthogonálně. Jak tedy protínají hledanou kružnici k? (Př. 1918, 11).]

Utvořte a řešte i jiné obdobné úlohy; také je-li poloměr některé dané kružnice nulový.

34. Odvoďte (analyticky) a sestrojte geometrické místo středů kružnic, které procházejí daným bodem M a jež jsou proťaty danou kružnicí $k(O)$ diametrálně. — [Je to kružnice, jejíž střed půlí úsečku $\overline{OM}$.]

35. Řešte nyní úlohu: Sestrojiti kružnici, která prochází dvěma danými body a jež jest danou kružnicí půlena.

36. Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem a jež jest dvěma danými kružnicemi půlena. (R. 18, 11).

37. Sestrojte kružnici, která jde M, jež jest půlena danou kružnicí k_1 a která protíná danou kružnici k_2 orthogonálně nebo diametrálně.

38. Sestrojte kružnici, která prochází dvěma danými body A, B a kterou z daného bodu P jest viděti v daném úhlu α. — [Použijeme geometrického místa středů S kružnic, které jdou A a k nimž tečny z P vedené tvoří úhel α. Je to Apolloniova kružnice, neboť $\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \sin \frac{\alpha}{2}$. (R. 1, 4).]

39. Podobně sestrojte kružnici, která prochází daným bodem A a jež z daných bodů P, Q jest viděti v úhlu α, resp. β.

40. Pak i kružnici, kterou vidíme z daných tří bodů v daných úhlech α, resp. β, resp. γ.

41. Sestrojte kružnici, která se dotýká dvou daných přímek a již jest viděti z daného bodu v daném úhlu α. — [Homothetií; středem homothetie jest průsečík daných tečen. (R. 14, 24).]

42. Sestrojte dvě kružnice ${}^1k$ a ${}^2k$, aby ${}^1k$ procházela danými body A, B, aby ${}^2k$ se dotýkala dané kružnice k v daném bodě T a aby obě měly svou chordálu v dané přímce p. — [Je-li P průsečík p a tečny t, sestrojené v T ke kružnici k, pak platí $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PC}$, čímž se dospěje k třetímu bodu C kružnice ${}^1k$. (R. 9, 8.)]

43. Obdobně sestrojte dvě kružnice ${}^1k$ a ${}^2k$, aby ${}^1k$ se dotýkala dané přímky ${}^1t$ v bodě ${}^1T$, ${}^2k$ dané přímky ${}^2t$ v bodě ${}^2T$ a aby obě měly svou chordálu v dané přímce p. (R. 10, 8.)

44. Sestrojte kružnici, která prochází dvěma sdruženými body imaginárními (jsou dány kružnicí $k(O)$ a přímkou p, jež k neprotíná, jakožto základní body svazku kružnic k se společnou chordálou p) a mimo to daným bodem A. — [a) Použijeme chordál tří kružnic: hledané, dané k a pomocné, kterou sestrojíme bodem A. b) Sestrojíme kružnici l, která má střed na p a jež protíná k kolmo, ta protne kolmici spuštěnou s O na p v základních bodech U, V svazku kružnic, protínajících kolmo kružnice k; sestrojíme-li nyní na p střed P kružnice určené body U, V, A, jest PA tečnou hledané kružnice.]

45. Sestrojte kružnici, která prochází dvěma imaginárními body (jsou opět dány k, p) a jež se dotýká dané přímky t. — [Délky tečen, vedených z průsečíku P přímek p a t ke kružnici k i ke kružnici hledané, jsou stejné.]

46. Sestrojte kružnici danou dvěma imaginárními body (k, p) a délkou poloměru. — [Postupem sub b) v př. 44.]

47. Podobně sestrojte kružnici danou dvěma imaginárními body tak, aby danou kružnici k_1 protťala orthogonálně nebo diametrálně.

48. Sestrojte kružnici danou dvěma imaginárními body tak, aby na dané přímce vyťala tětivu dané délky (viz př. 30).

49. Dvě sdružené imaginární tečny jsou dány kružnicí k a bodem O, který je uvnitř k a jenž je středem podobnosti řady kružnic homothetických s k podle středu O; dané tečny jsou společné všem kružnicím řady. — [Utvořte a řešte úlohy obdobné úlohám v př. 44—47, ale s dvěma imaginárními tečnami.] —

Do těchto příkladů nebyly ovšem pojaty úlohy vyplývající z přehledu podaného v kap. 2; řešíme-li je metodami, které jsou v knize vyloženy, dospějeme k speciálním konstrukcím též velmi rozmanitým a zajímavým. —