O metodách rovinných konstrukcí

4. Řešeni užitím geometrických míst

In: Josef Holubář (author): O metodách rovinných konstrukcí. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1940. pp. 43–72.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402965

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

4.

ŘEŠENÍ UŽITÍM GEOMETRICKÝCH MÍST.

Středy kružnic, vyhovující dvěma podmínkám ú. A., vyplňují, jak známo, obecně dvě kuželosečky. K obdobným g. m. středů kružnic dojdeme i tehdy, nahradíme-li podmínku dotyku jinými jednoduchými podmínkami, jaké jsme vytkli v kap. 2. Příslušná g. m. ve všech případech jsou, jak ukážeme, opět buď kuželosečky, nebo kružnice anebo přímky.

Pořadí g. m., jež odvodíme pro spojení vždy dvou podmínek, zvolíme takovéto:

1. kk	4. $k^o k^d$	7. kr
2. $k^o k^o$	5. kk^o	8. $k^o r$
3. $k^d k^d$	6. kk^d	9. $k^d r$.

Třebaže půjde potom při řešení úloh užitím těchto g. m. obecně o určení průsečíků dvou kuželoseček, ukáže se, že jsou to jen dva platné průsečíky použité dvojice kuželoseček, které hledáme; a ty možno nalézti „kvadraticky", t. j. užitím kružnic a přímek.

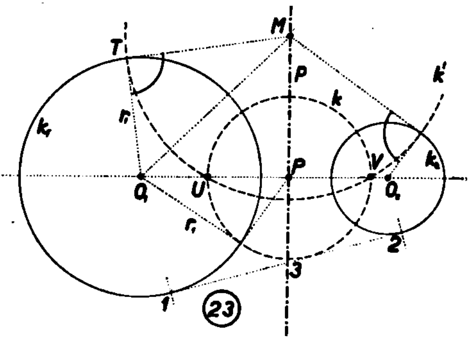
A. Geometrická místa. a) Případ g. m. pro (kk) je znám podrobně ze školních výkladů,[11]) takže jen pro úplnost je uvedeme:

G. m. středů kružnic, které se dvou daných kružnic dotýkají, jsou dvě kuželosečky konfokální, jež mají ohniska ve středech daných kružnic a jejichž hlavní osy mají délku rovnu rozdílu, resp. součtu poloměrů daných kružnic. K tomu poznamenáme, že ke každé kuželosečce zvlášť by se došlo při určité orientaci daných kružnic v cykly; rozdíl poloměrů, který pak udává délku hlavních os

[11]) Klíma-Ingriš: Rýsování III. a IV., str. 81 a n. JČMF.

v obou případech, přejde v součet abs. hodnot, jsou-li cykly opačných znamének, t. j. při nesouhlasném dotyku kružnic s kružnicemi danými.

b) Pro známý případ ($k^o k^o$): G. m. středů kružnic, které protínají dvě dané kružnice orthogonálně, jest chordála obou kružnic. Její konstrukce i vlastnosti jsou známy, připojíme jen ještě větu:



23

Všecky kružnice protínající dané dvě kružnice orthogonálně tvoří svazek se základními body na středné obou kružnic, která je jejich společnou chordálou.

Důkaz: Kružnice k (obr. 23), opsaná ze středu P, který je průsečíkem chordály p daných kružnic $k_1(O_1, r_1)$ a $k_2(O_2, r_2)$ s jejich střednou, a orthogonálně protínající dané kružnice (leží mimo sebe), protíná střednou v bodech U a V; pak ovšem $\overline{PU} = \overline{PV}$ jest poloměr kružnice k a platí:

$$\overline{PU}^2 = \overline{O_1P}^2 - r_1^2.$$

Pro jinou kružnici k', protínající orthogonálně k_1 i k_2, o středu M na p můžeme psáti:

$$\overline{MO_1}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{O_1P}^2 = \overline{MT}^2 + r_1^2,$$

kdež T je dotykový bod na k_1 tečny vedené z M. Platí tedy:

$$\overline{MT}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{O_1P}^2 - r_1^2.$$

Protíná-li k' střednou v bodě U', jest ovšem $\overline{MU'} = \overline{MT}$. Proto

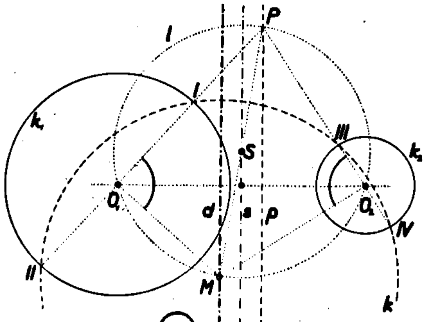
$$\overline{PU'}^2 = \overline{MU'}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{MT}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{O_1P}^2 - r_1^2 = \overline{PU}^2,$$

což znamená, že $U' \equiv U$.

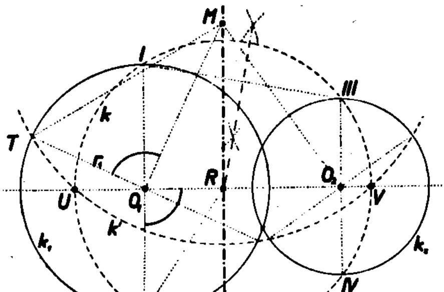
Body U, V mohou být také imaginární, a to když $\overline{PU}^2 < 0$, čili když $\overline{O_1P} < r_1$, což nastane, když se naopak dané kružnice protínají reálně. Z bodů na společné tětivě nelze pak opsati reálné kružnice k protínající dané kružnice orthogonálně, neboť mocnost M takových bodů ke kružnicím daným je záporná a poloměr kružnice k je $\sqrt{\mathsf{M}}$, a tedy imaginární; lze však z týchž bodů opsat vždy kružnici o poloměru $\sqrt{|\mathsf{M}|}$, reálném, která je pak proťata danými kružnicemi diametrálně. —

Máme zde celkem dva svazky kružnic, a to: svazek kružnic, protínajících kružnice dané orthogonálně se základními body U, V a svazek kružnic určený kružnicemi danými. Má-li prvý svazek základní body reálné, má druhý svazek základní body imaginární a naopak. Kružnice jednoho svazku protínají orthogonálně kružnice svazku druhého.

c) V případě $(k^d k^d)$ hledáme g. m. středů kružnic, které dané dvě kružnice $k_1(O_1)$ a $k_2(O_2)$ protínají diametrálně. K obecné takové kružnici $k(M)$ dospějeme takto (obr. 24): Zvolíme na chordále p daných kružnic bod P a spojíme jej s O_1 a O_2. Krajními body průměrů I, II na k_1 a III, IV na k_2 a na těchto spojnicích, je určena kružnice k, neboť: $\overline{PI} \,.\, \overline{PII} = \overline{PIII} \,.\, \overline{PIV}$. Její střed M tedy dostaneme na kolmicích v O_1, resp. v O_2 k oněm průměrům vztyčených. Můžeme nyní sestrojiti kružnici l, opsanou tětivovému čtyrúhelníku O_1MO_2P ze středu S nad jejím průměrem MP: Všecky takové kružnice l procházejí danými body O_1 a O_2, tvoří tedy svazek a středy S vyplňují střednou s, osu souměrnosti úsečky O_1O_2. Ježto body P jsou stále na chordále p, body S na přímce s s p rovnoběžné, jest g. m. bodů M **přímka** d, souměrně sdružená s p dle přímky s a tedy také souměrně sdružená s p podle středu úsečky O_1O_2.



24



25

Všecky kružnice k **protínající dané dvě kružnice diametrálně tvoří svazek** o základních bodech U, V na středné daných kružnic; body U, V jsou vždycky reálné.

Důkaz: Sestrojme nejprve takovou kružnici k (obr. 25), která má střed R na středné O_1O_2. Půjde krajními body průměrů kružnic k_1 a k_2, kolmých k středné O_1O_2. Bod R tedy dostaneme v průsečíku středné O_1O_2 a osy souměrnosti úsečky na př. $\overline{I\,III}$. Kružnice k protíná střednou v bodech U a V; úsečky $\overline{RU} = \overline{RV}$ jsou poloměry kružnice k a platí:

$$\overline{RU}^2 = \overline{O_1R}^2 + r_1^2.$$

Jestliže jiná kružnice k', protínající obě dané diametrálně, má střed M a jeden průsečík s k_1 bod T, můžeme psáti:

$$\overline{MO_1}^2 = \overline{MT}^2 - r_1^2 = \overline{MR}^2 + \overline{O_1R}^2$$

nebo

$$\overline{MT}^2 - \overline{MR}^2 = \overline{O_1R}^2 + r_1^2.$$

Je-li jeden průsečík k' se střednou bod U', jest poloměr $\overline{MU'} = \overline{MT}$ a tedy

$$\overline{RU'}^2 = \overline{MU'}^2 - \overline{MR}^2 = \overline{MT}^2 - \overline{MR}^2 = \overline{RU}^2,$$

t. j. body U' a U jsou totožné. Ježto $\overline{RU}^2$ je vždy kladné, jest $\overline{RU}$ vždy reálné a také body U i V vždycky reálné.

d) Máme-li odvoditi g. m. středů kružnic pro případ $(k^o k^d)$, kdy daná kružnice $k_1(O_1)$ je proťata orthogonálně a jiná daná kružnice $k_2(O_2)$ diametrálně, počínejme si podobně jako při známém odvození chordály.[12]) Pro libovolný bod M tohoto g. m., jakožto střed kružnice k, která protíná k_1 orthogonálně (na př. v bodě T_1) a k_2 diametrálně (jeden průsečík je T_2), platí (obr. 26):

$$\overline{MO_1}^2 = \overline{MT_1}^2 + r_1^2,$$
$$\overline{MO_2}^2 = \overline{MT_2}^2 - r_2^2;$$

při tom $\overline{MT_1} = \overline{MT_2}$. Odečtením rovnic dostaneme:

$$\overline{MO_1}^2 - \overline{MO_2}^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Kolmice c spuštěná s M na střednou O_1O_2 protíná ji v bodě R. Platí pak:

---

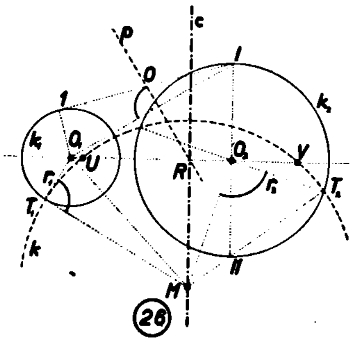
[12]) Viz J. Vojtěch: GV, 39.

$$\overline{RO_1}^2 = \overline{MO_1}^2 - \overline{RM}^2,$$
$$\overline{RO_2}^2 = \overline{MO_2}^2 - \overline{RM}^2.$$

Tedy podobně

$$\overline{RO_1}^2 - \overline{RO_2}^2 = \overline{MO_1}^2 - \overline{MO_2}^2 = r_1^2 + r_2^2,$$

což značí, že bod R náleží také hledanému g. m. a rovněž i libovolný jiný bod kolmice MR a mimo ni žádný jiný. Tedy: G. m. středů kružnic, které jednu kružnici protínají orthogonálně a druhou kružnici diametrálně, jest přímka kolmá na střednou daných kružnic.



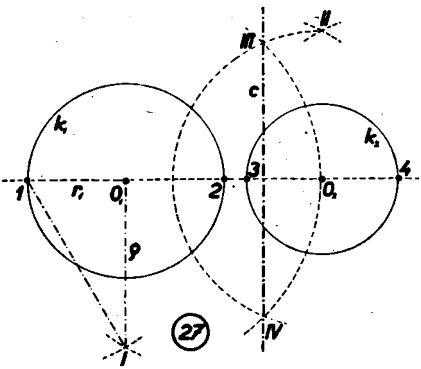
26

Tyto kružnice tvoří opět svazek se základními body U, V na středné O_1O_2; body U, V jsou i zde vždy reálné. Důkazu není zde již třeba, neboť je obsažen v důkaze sub c).

Konstrukci našeho g. m. možno provésti vhodně pomocí bodu R (obr. 26) na středné O_1O_2; příslušná kružnice musí totiž protnouti k_2 diametrálně v bodech I, II, krajních to bodech průměru jejího, kolmého na O_1O_2. Sestrojíme-li tedy g. m. středů kružnic, které procházejí bodem I a protínají k_1 orthogonálně, t. j. chordálu p bodu I a kružnice k_1, protne již p střednou O_1O_2 v bodě R, jímž jde g. m. hledané, t. j. přímka c kolmá k O_1O_2.

Nebo si myslíme libovolný poloměr ϱ pro obecnou kružnici k, jež má vyhovět žádaným podmínkám, a pak užitím

g. m. této kapitoly (odst. f, β a γ na str. 57) sestrojíme dva body přímky c, souměrně sdružené podle středné O_1O_2. To se může státi i pouhým kružítkem (konstrukce mascheroniovská) takto (obr. 27)[13]: Z krajních bodů *1, 2* průměru kružnice k_1, který leží na středné O_1O_2, opíšeme libovolným poloměrem oblouky, které se protnou v bodě *I*, z bodů *3, 4*, které leží na středné O_1O_2 a na kružnici k_2 pak oblouky poloměrem O_1I; ty se protnou v bodě *II*. Průsečíky pomocných



kružnic sestrojených jednak z O_1 poloměrem *1I*, jednak z O_2 poloměrem O_2II, jsou body *III, IV* hledané přímky c. Označíme-li totiž $\overline{O_1I} = \varrho$, pak *1I* určuje vzdálenost středů *III* a *IV* dvou kružnic k od O_1 — ta se totiž rovná $\sqrt{r_1^2+\varrho^2}$. Ježto dále bylo $\overline{3II} = \overline{4II} = \varrho$, je úsečka O_2II rovna vzdálenosti týchž středů *III* a *IV* od O_2.

e) G. m. středů kružnic k vyhovujících podmínkám (kk^o) nebo (kk^d), t. j. dotýkajících se jedné kružnice a protínajících druhou kružnici orthogonálně nebo diametrálně, jest kuželosečka, jejíž hlavní osa

[13]) Viz B. Vlk, Lit. č. IXb, str. 10.

leží na středné daných kružnic a jejíž ohnisko je ve středu kružnice, které se kružnice k dotýkají.

Pro **důkaz** uvedeme nejdříve jednu pomocnou větu.

α) Buďtež nejprve dány dvě kružnice $k_1(O_1)$ a $k_2(O_2)$ ležící mimo sebe (obr. 28). Myslíme-li si, že jsme je orientovali na př. obě souhlasně, a jsou-li T_1 a T_2 body dotyku libovolného cyklu $k(S)$ s cykly k_1, resp. k_2, pak podle věty (3Ad) na str. 23 je mocnost jejich středu podobnosti O ke všem kružnicím k stejná. I můžeme psáti:

$$\overline{OT_1} \, . \, \overline{OT_2} = \overline{OA_1} \, . \, \overline{OA_2} = \overline{OR}^2,$$

kdež R je dotykový bod tečny vedené z O ke k a OR poloměr kružnice $k_p(O)$, která protíná všecky kružnice k orthogonálně.

Ale i naopak: Pro každý cyklus k, který se daného cyklu k_1 dotýká v T_1 a který k_p protíná orthogonálně, jest mocnost bodu O ke k rovna $\overline{OR}^2$. Proto druhý bod T_2 paprsku OT_1 na k leží i na k_2; v něm se pak k cyklu k_2 nutně dotýká.

Pro kružnice k_1, k_2 orientované nesouhlasně sestrojíme podobně cyklus $k'(S')$, který se dotýká k_1 a k_2 v bodě T'_1, resp. T'_2. Mocnost středu podobnosti O' cyklů k_1 a k_2 ke kružnicím k' je zde záporná, neboť

$$\overline{O'T'_1} \, . \, \overline{O'T'_2} = \overline{O'A'_1} \, . \, \overline{O'A_2} = -\overline{O'R'}^2.$$

Při tom R' je průsečík cyklu k' s kružnicí k'_p, jež je opsána ze středu O' poloměrem

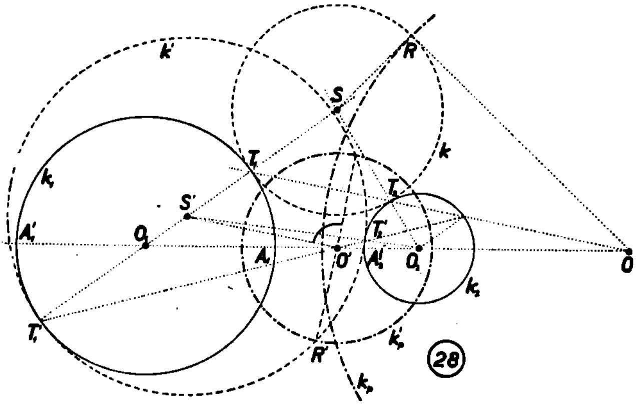
$$\overline{O'R'} = \sqrt{|\overline{O'A'_1} \, . \, \overline{O'A_2}|}$$

a která je proto proťata cykly k' diametrálně.

Kružnice k_p a k'_p se nazývají **potenční kružnice** kružnic k_1 a k_2, a to k_p vnější kružnice potenční a k'_p vnitřní kružnice potenční.

Jestliže se kružnice k_1 a k_2 neprotínají, ale jedna leží uvnitř druhé, je tomu naopak: Vnější potenční kružnice je proťata všemi cykly dotykovými diametrálně, kdežto vnitřní potenční kružnice protíná příslušné dotykové cykly orthogonálně. Obraz i důkaz jsou zcela podobné předcházejícím.

Jestliže se konečně kružnice k_1 a k_2 protínají, pak obě kružnice potenční protínají příslušné dotykové cykly orthogonálně a procházejí společnými body kružnic k_1 a k_2, které jsou zde nulovými kružnicemi dotykovými, což lze odvoditi podobně.

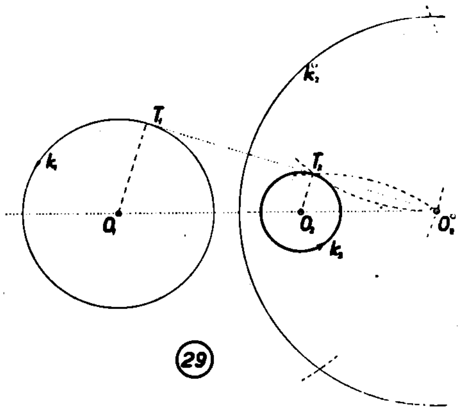


Celkem lze vysloviti tuto (pomocnou) větu: **Každá kružnice, která se dvou daných kružnic dotýká, protíná příslušnou kružnici potenční daných kružnic buď orthogonálně nebo diametrálně.**

β) Jde-li nyní o g. m. v případě (kk^o), můžeme danou kružnici $k_2{}^o$ považovati za potenční kružnici dané kružnice $k_1(O_1)$ a jisté kružnice k_2, kterou lze snadno sestrojiti ze vztahů, odvozených sub α). Kružnice k, které se mají dotýkati k_1 a protínati $k_2{}^o$ orthogonálně, budou se jako cykly dotýkati cyklů k_1 a k_2. Poněvadž pak g. m. středů cyklů, které se dotýkají cyklů k_1 a k_2 jest kuželosečka uvedená v odst. a) této kapitoly, je tato kuželosečka c_{12} i hledaným

g. m. pro podmínky (kk^o): ohnisko její je tedy skutečně v bodě O_1 a hlavní osa leží na středné daných kružnic k_1 a k_2^o.

V obr. 29, kde je dán střed O_2^o kružnice k_2^o vně k_1, jest sestrojen pomocný cyklus k_2 z dané kružnice k_1, libovolně orientované v cyklus, takto:



29

Označíme-li poloměr kružnice k_2^o písmenem r, délku tečny $\overline{O_2^oT_1} = t_1$ a délku tečny, vedené z O_2^o k hledanému cyklu k_2, $\overline{O_2^oT_2} = t_2$, platí:

$$t_1 \, . \, t_2 = r^2,$$

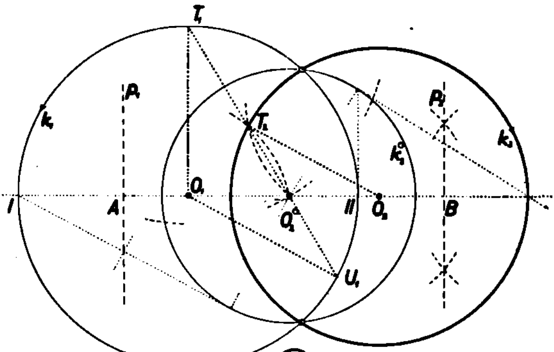
z toho

$$t_2 = \frac{r^2}{t_1}.$$

Možno tedy t_2 sestrojiti jako čtvrtou úměrnou úseček r, r, t_1 i její znaménko a jednoznačně určiti bod T_2 (výhodně konstrukcí odvozenou v (1Ca) na str. 12. Střed O_2 cyklu k_2, homothetického s k_1 podle středu O_2^o, určíme rovnoběžkou T_2O_2 s T_1O_1.

Pak lze již určiti kuželosečku c_{12}. V našem případě je to hyperbola s ohnisky v bodech O_1 a O_2; jejími asymptotami jsou osy souměrnosti úsečky T_1T_2 a obdobné úsečky na druhé společné tečně cyklů k_1 a k_2.

Bylo by možné hned také určiti vrcholy osy hlavní této kuželosečky bez sestrojování cyklu k_2. Tak je provedena konstrukce na obr. 30, kde střed $O_2{}^o$ kružnice $k_2{}^o$ je dán uvnitř dané kružnice k_1. Poněvadž nelze vésti z bodu $O_2{}^o$ tečny ke k_1, jest kuželosečka c_{12} elipsou. Vrcholy její A, B, ležící na středné $O_1O_2{}^o$ dostaneme jako středy kružnic, které



30

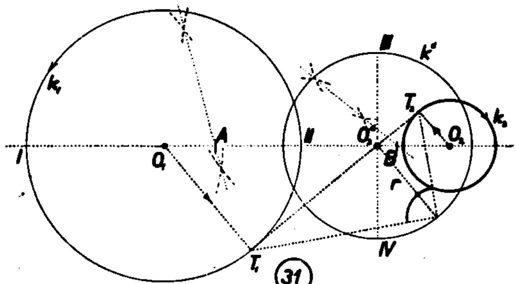
se dotýkají k_1 v bodě I, resp. II a protínají orthogonálně $k_2{}^o$. Použijeme chordály p_1 a p_2 bodu I a II a kružnice $k_2{}^o$. Tyto chordály jsou již vrcholové tečny elipsy c_{12} v bodech A, resp. B. Bod O_1 je ohniskem c_{12}, čímž elipsa je určena bez rýsování cyklu k_2. Ale k tomuto cyklu bylo by možno dospět zde tak, že bychom zvolili libovolný bod T_1 na k_1 (v obr. provedeno tečkovaně) a sestrojiti příslušný bod T_2 cyklu k_2 z rovnice:

$$\overline{O_2{}^oT_1} \,.\, \overline{O_2{}^oT_2} = r^2.$$

Bod T_2 by byl inversní k T_1 a cyklus k_2, podle smyslu homothetických poloměrů $O_1U_1 \parallel O_2T_2$, opačného znaménka než k_1.

Protínají-li se dané kružnice k_1 a $k_2{}^o$, jako v obrazci 30, pak kuželosečka c_{12} prochází i jejich průsečíky; kdyby se k_1 a k_2^o dotýkaly, byl by dotykový bod k_1 a k^o_2 jedním vrcholem kuželosečky c_{12}.

γ) Jde-li dále o g. m. v případě (kk^d), je důkaz obdobný: kružnice (cykly), které se dotýkají dané kružnice k_1, již jsme orientovali v cyklus, a protínají diametrálně druhou danou kružnici k_2^d, dotýkají se současně dalšího cyklu k_2, takže hledané g. m. je opět kuželosečka odst. a).



Určení této kuželosečky c_{12} provedeme takto (obr. 31): Vrcholy její A, B jsou středy kružnic, jež se dotýkají k_1 v bodě I, resp. II a diametrálně protínají k_2^d v bodě III a IV na průměru kružnice k_2^d kolmém na střednou $O_1O_2^d$; určí se na této středné osami souměrnosti bodů I, III, resp. II, III. Známe opět její ohnisko O_1, čímž je dostatečně určena. Mimo to, jsou-li tečny z bodu O_2^d ke kružnici k_1 reálné, jako v našem obrazci, jsou to také dvě kružnice, vyhovující podmínkám, o poloměrech nekonečně velikých, a proto asymptoty hyperboly c_{12} jsou k těmto tečnám kolmé. (V obr. arci je určen obdobně jako dříve sub β) i příslušný cyklus k_2.)

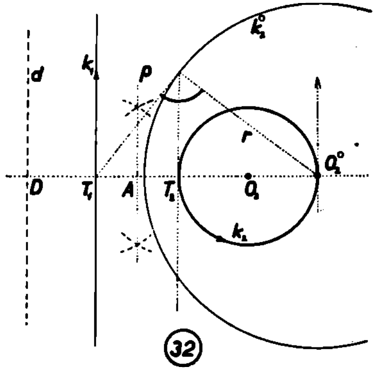
δ) Zvláštního výkladu zasluhuje případ, když kružnice k_1 je přímkou. Půjde o g. m. při podmínkách, které označíme (pk^o) a (pk^d). Důkaz provedený sub β) a γ) platí i zde, ovšem se zřetelem k parabolickému g. m. odst. a). Dostáváme v obou případech paraboly, jakožto kuželosečky c_{12}.

Určení parabol c_{12} provedeme takto:

V obr. 32 pro případ (pk^o) jest $O_2{}^o$ středem podobnosti přímky (orientované) k_1 a cyklu k_2, který tímto bodem proto prochází (viz 3C a β, str. 31). Druhý bod T_2, k bodu $O_2{}^o$ diametrálně protilehlý, na kolmici ke k_1 sestrojíme ze vztahu:

$$\overline{O_2{}^oT_2} \,.\, \overline{O_2{}^oT_1} = r^2,$$

kdež r je poloměr kružnice $k_2{}^o$ a bod T_1 pata oné kolmice

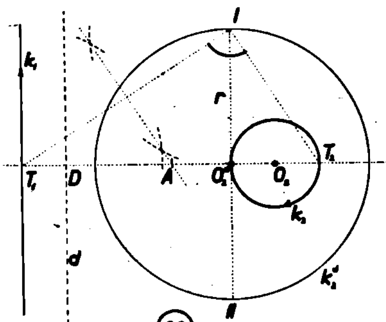


na k_1; třeba jako sdružený pól k T_1 vzhledem ke kružnici $k_2{}^o$ na poláře bodu T_1. Střed O_2 průměru $O_2{}^oT_2$ pomocného cyklu k_2 je ohniskem paraboly c_{12} a d jest její přímka řídicí (učinili jsme $T_1D = O_2T_2$); z toho vyplývá, že parametr paraboly se rovná vzdálenosti středu dané kružnice $k_2{}^d$ od dané přímky k_1, t. j. $\overline{O_2D} = \overline{O_2{}^oT_1}$. Určení paraboly c_{12} je pak toto: Sestrojíme její vrchol A jako střed kružnice, která se dotýká k_1 v bodě T_1 a protíná orthogonálně $k_2{}^o$, tedy na chordále p bodu T_1 a kružnice $k_2{}^o$ a ovšem na kolmici $O_2{}^oT_1$ ke k_1, jakožto ose paraboly c_{12}. Od bodu A naneseme pak na obě strany polovinu parametru, který je roven $O_2{}^oT_1$, čímž dostaneme ohnisko O_2 i bod D přímky řídicí d, zřejmě jednoznačně.

V případě (pk^d) je bod T_2 určen vztahem

$$\overline{O_2^d T_1} \,.\, \overline{O_2^d T_2} = -r^2,$$

kde opět r je poloměr dané kružnice k_2^d a bod T_1 pata kolmice vedené středem O_2^d kružnice k_2^d na danou přímku k_1 (v obr. 33 orientovanou). Střed O_2 úsečky $O_2^d T_2$ je ohniskem paraboly c_{12}, jakožto střed cyklu k_2, kterého se zase dotýkají všecky cykly, dotýkající se k_1 a protínající diametrálně k_2^d.



33

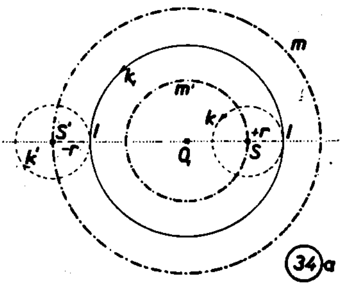
Střed A úsečky T_1T_2 je opět vrcholem paraboly; z obrazu pak vyplývá, že parametr její se zase rovná vzdálenosti O_2^d od k_1, t. j.

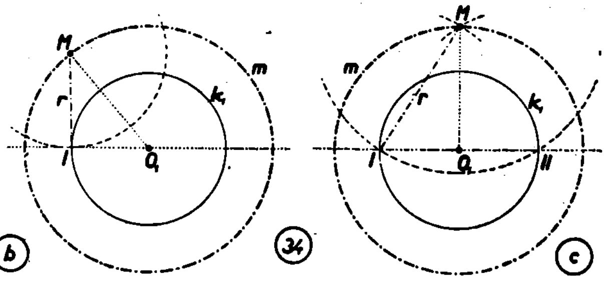
$$\overline{O_2D} = 2 \,.\, \overline{O_2A} = \overline{O_2^d T_1}.$$

Určení paraboly c_{12} je tedy toto: Sestrojíme nejprve její vrchol A jako střed kružnice, která se dotýká k_1 v bodě T_1 a seče diametrálně k_2^d v bodech I a II, tedy v průsečíku osy souměrnosti úsečky T_1I a osy paraboly ležící v přímce $O_2^d T_1$. Pak naneseme polovinu parametru délky $O_2^d T_1$ od A na osu na obě strany, čímž dostaneme ohnisko O_2 paraboly a bod D přímky řídicí d. Ať je poloha daných útvarů jakákoliv, není možná záměna bodů O_2 a D, představíme-li si jen, kde má podle rovnice na začátku použité ležeti bod T_2; to platí i v případě předchozím (pk^o).

f) Další g. m. pro podmínky (kr), ($k^o r$) a ($k^d r$) probereme krátce v jediném odstavci.

α) G. m. středů kružnic k, které se dotýkají kružnice $k_1(O_1, r_1)$ a mají poloměr r, je dvojice kružnic soustředných s kružnicí k_1 o poloměrech $r_1 - r$, kdež r je buď $+$ nebo $-$ podle toho, jakého znaménka jsou cykly k při zvolené orientaci dané kružnice k_1 (obr. 34a).





β) Je-li odvoditi g. m. středů kružnic, které protínají kružnici $k_1(O_1, r_1)$ orthogonálně a mají poloměr r, pak sestrojíme-li jeden takový bod M (obr. 34b), střed kružnice, jež protíná k_1 v libovolném bodě I, jest vzdálenost bodu M od O_1 konstantní, a tedy g. m. je kružnice soustředná s kružnicí k_1 o poloměru

$$\overline{O_1M} = \sqrt{r_1^2 + r^2}.$$

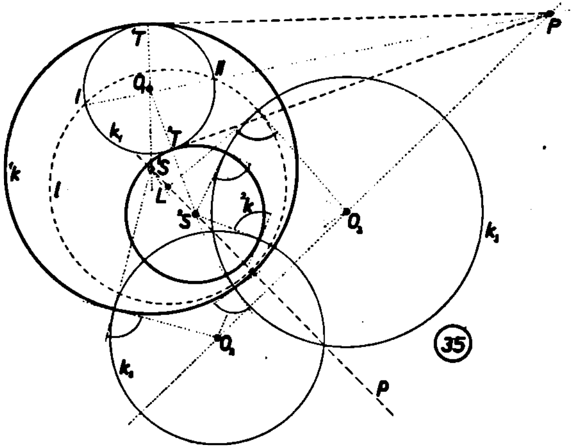
γ) Abychom dostali libovolný bod g. m. pro podmínky ($k^d r$), sestrojíme rovnoramenný trojúhelník $I\,II\,M$ (obr. 34c), jehož základnou jest průměr dané kružnice $k_1(O_1, r_1)$, protaté diametrálně, a jehož ramena mají délku r, poloměru daného. Výška jeho $\overline{O_1M} = \sqrt{r^2 - r_1^2}$ jest konstantní a udává vzdálenost všech bodů g. m. od O_1. Hledaným g. m. je tedy opět kružnice soustředná s kružnicí danou o poloměru O_1M. Aby výsledek byl reálný, je třeba, aby $r > r_1$.

B. Řešení úloh. Přistoupíme nyní k řešení úloh uvedených v kap. 2 sub B ve skupinách α) až δ) na str. 16.

a) Při řešení úloh sub α) jsou použitá g. m. vesměs přímky; provedení je snadné a ponecháme je čtenáři. Úlohy jsou jednoznačné, ale poloměr výsledné kružnice může být v úloze ($k^o k^o k^o$) také imaginární.

b) Při úloze sub β), označené ($kk^o k^o$), jest jedním g. m. středů kružnic, a to těch, které protínají dané kružnice $k_2(O_2)$ a $k_3(O_3)$ orthogonálně, jejich chordála. Jestliže se kružnice k_2 a k_3 neprotínají, pak (dle Ab na str. 44) základní body U, V svazku kružnic protínajících k_2 a k_3 orthogonálně na středné O_2O_3 jsou reálné; jimi půjdou i hledané kružnice, které se mají mimo to dotýkati dané kružnice k_1. Úloha je tím převedena na známou zvláštní ú. A. (kBB). Protínají-li se dané kružnice k_2, k_3 (obr. 35), pak (dle Ab) nedostáváme reálných bodů U, V pro hledané kružnice, ale lze postupovati v konstrukci obdobně jako při řešení úlohy (kBB). Sestrojíme libovolnou kružnici pomocnou l protínající orthogonálně k_2 a k_3, která má střed L na chordále p kružnic k_2, k_3 a jejíž poloměr je roven délce tečny, vedené z L ke k_2 nebo k_3, aby protínala kružnici k_1 v bodech I, II. Sestrojíme-li potenční střed P kružnic k_1, l a hledané kružnice k na O_2O_3, jakožto chordále kružnic l a k, a na spojnici $I\,II$, chordále kružnic l a k_1, pak tečny vedené z bodu P ke kružnici k_1 určí na ní již dotykové body ^1T a ^2T dvou kružnic výsledných ^1k a ^2k. Spojnice $O_1{}^1T$, resp. $O_1{}^2T$ protínají p ve středech ^1S a ^2S těchto kružnic; úloha je dvojznačná.

Takovým způsobem řeší se i další úlohy skupiny β), při nichž dokonce vždy základní body U, V příslušného svazku kružnic jsou reálné (podle Ac, d).



35

c) Pro řešení úlohy sub γ), označené (kkk^o), vystačíme také s přímkou jako použitým g. m., když napřed úlohu tu převedeme na některou úlohu ze skupiny β), a to takto:

K dvojici daných kružnic k_1 a k_2, kterých se mají výsledné kružnice dotýkati, když je předem orientujeme v cykly, sestrojíme kružnici potenční k_p, která pak jest cykly, jež se k_1 a k_2 dotýkají, protata orthogonálně nebo diametrálně. Tím dospějeme k úloze nové, buď ($kk^ok_p{}^o$) nebo ($kk^ok_p{}^d$), jež nahrazuje úlohu původní. To jest však úloha skupiny β). Vzhledem k další možné orientaci kružnic k_1 a k_2, odlišné od orientace prvé, má úloha (kkk^o) obecně čtyři výsledky.

Zcela týmž postupem možno řešiti i druhou úlohu sub γ), t. j. (kkk^d).

Také obecnou ú. A. (kkk) lze řešiti použitím potenčních kružnic a pak postupem provedeným při úlohách sub β):

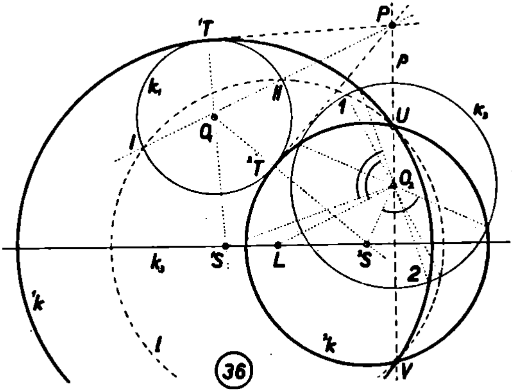
Dané tři kružnice k_i, $i = 1, 2, 3$, orientujeme v cykly. Sestrojíme potenční kružnici ^1k_p některé dvojice cyklů, na př. k_2, k_3, a pak potenční kružnici ^2k_p další dvojice k_1, k_3. Výsledné kružnice, řešící ú. A., budou tyto potenční kružnice protínati orthogonálně nebo diametrálně. Připojíme-li pak ke kružnicím ^1k_p, ^2k_p kteroukoli kružnici danou s podmínkou dotyku, dospějeme již k úloze ze skupiny β). Různé skupiny znamének cyklů k_i, povedou opět obecně k osmi výsledkům ú. A., která je zde převedena na speciální případ (kBB). Užité body U, V leží zřejmě vždy na příslušné ose podobnosti cyklů k_i. (Srovn. s řešením v 3D na str. 37.)

d) Úlohy uvedené sub δ), a to (kk^or), (kk^dr) a (kkr), řešíme vesměs g. m., uvedenými v (Af) této kapitoly na str. 57, jakožto nejjednoduššími; při řešení dalších tří úloh: (k^ok^or), (k^ok^dr), (k^dk^dr), užijeme též přímek jako g. m. odvozených v (Ab, c, d). Jejich konstruktivní provedení je pak zcela jednoduché.

e) Také úlohy uvedené v kapit. 2 sub C a D na str. 16 a n. možno řešiti použitím g. m., která se vyskytla při řešení úloh v předešlých odstavcích, postupem náležitě přizpůsobeným nebo pozměněným, někdy zcela jednoduše.

Provedeme jako příklad jen úlohu (kk^dp^o), t. j. sestrojiti kružnici, která se dotýká dané kružnice $k_1(O_1)$, protíná danou kružnici $k_2(O_2)$ diametrálně a má střed na dané přímce k_3 (protíná ji orthogonálně) — obr. 36.

Sestrojíme-li z libovolného bodu L přímky k_3 pomocnou kružnici l, která diametrálně seče k_2^*, vhodně tak, aby protínala k_1 v bodech I a II, pak hledaná kružnice k náleží s kružnicí l svazku kružnic, které protínají diametrálně k_2 majíce středy na k_3. Kolmice p vedená z O_2 ke k_3 jest společnou chordálou kružnice l a k. Určíme pak potenční střed P trojice kružnic k_1, l, k, t. j. průsečík p a $I\,II$; tečny vedené z P ke k_1 stanoví již na k_1 body dotyku ${}^1T$ a ${}^2T$ dvou hledaných kružnic ${}^1k({}^1S)$ a ${}^2k({}^2S)$.



C. Užití kolineace. K řešení ú. A. i úloh příbuzných lze použíti výhodně též kuželoseček, jakožto g. m. odvozených v odst. A této kapit., a dospěti ke konstrukcím, které přímo navazují na konstruktivní obraty známé ze střední školy.

Jak už na začátku této kapit. bylo řečeno, poskytnou dvojice kuželoseček, užitých k řešení našich kvadratických úloh, jen ve svých dvou průsečících hledané body; půjde tedy o to, nalézti potřebné průsečíky, aniž ony kuželosečky narýsujeme. Tomu je věnována tato stať.

Řešení zde podané bude přechodem od řešení metodou g. m. k řešením, provedeným metodou transformační v kapitole 5.

a) Konfokální kuželosečky, jakožto g. m. středů kružnic, které se dotýkají kružnice $k_1(O_1)$ a $k_2(O_2)$, jedné to dvojice, zvolené z daných tří kružnic ú. A. (kkk), označme c_{12} a c'_{12} a pro další dvojici kružnic k_1, k_3 podobně c_{13} a c'_{13}, a to tak, že c_{12} a c_{13} jsou kuželosečky, které dostaneme při souhlasně orientovaných kružnicích k_1, k_2, resp. k_1, k_3, kuželosečky c'_{12}

a c'_{13} naopak při nesouhlasně orientovaných kružnicích dvojic k_1, k_2, resp. k_1, k_3.

Kružnice k_1 je s kuželosečkou c_{12} a též s c_{13} ve vztahu středové kolineace pro společný střed kolineace v bodě O_1, který je společným ohniskem kuželoseček c_{12} a c_{13}.[14]) Tyto kolineární vztahy označíme $O_1(k_1, c_{12})$, resp. $O_1(k_1, c_{13})$. Pak i kuželosečky c_{12} a c_{13} jsou středově kolineárně sdruženy při témž středu kolineace O_1. Tento vztah označíme $O_1(c_{12}, c_{13})$. Osy těchto kolineací, (a to pro každý případ dvě[15])), buďtež o_{12} a p_{12} při dvou kolineacích $O_1(k_1, c_{12})$, o_{13} a p_{13} pak pro dvě kolineace $O_1(k_1, c_{13})$; podobně dvě osy kolineací $O_1(k_1, c'_{12})$ buďtež o'_{12} a p'_{12}, pro kolineace $O_1(k_1, c'_{13})$ pak o'_{13} a p'_{13}. Konečně pro kolineace: $O_1(c_{12}, c_{13})$, $O_1(c'_{12}, c'_{13})$, $O_1(c_{12}, c'_{13})$ a $O_1(c'_{12}, c_{13})$ buďtež příslušné osy označeny s a indexy, které připojíme účelně později. Přímky s budou obsahovati společné průsečíky dvojic kuželoseček c_{12}, c_{13} atd. a budou tedy spojovati také středy hledaných kružnic ú. A. Sestrojíme-li tyto středné s, budeme moci, jak uvidíme, dospěti k středům výsledných kružnic opět některým vhodně voleným vztahem kolineárním.

b) Než přikročíme k skutečnému provedení úlohy, poznamenejme, že přímky s, jakožto osy kolineací na př. $O_1(c_{12}, c_{13})$, musí procházeti průsečíky os kolineací $O_1(k_1, c_{12})$ a $O_1(k_1, c_{13})$, jakožto samodružnými body obou těchto kolineárních vztahů zároveň, tvoříce úhlopříčky rovnoběžníku, určeného čtyřmi stranami na o_{12}, p_{12} a na o_{13}, p_{13}.

α) Hledejme nejprve osy kolineací $O_1(k_1, c_{12})$ a $O_1(k_1, c'_{12})$, a to pro různé druhy kuželoseček c_{12}, resp. c'_{12}!

V obr. 37 buďtež kružnice k_1 a k_2 voleny tak, aby tyto kuželosečky byly hyperboly ($\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$).

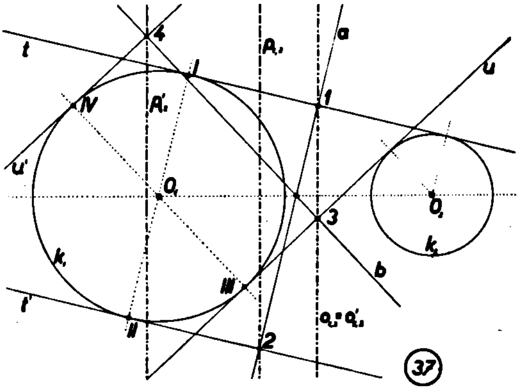
Sestrojíme-li vnější společnou tečnu t kružnic k_1 a k_2, pak paprsek kolineace, vedený kolmo k t, určí na k_1 body I a II,

---

[14]) Odůvodnění tohoto vztahu viz na př. v autorově článku „Sestrojení kuželoseček z ohniska a dalších prvků" v Rozhledech, **16** (1936—37), str. 135.

[15]) Viz Lit. č. III, svazek 1, odst. 52.

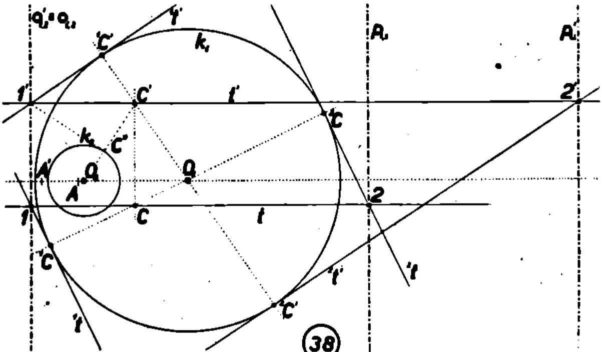
oba kolineárně sdružené k úběžnému bodu hyperboly c_{12} při dvou kolineacích $O_1(k_1, c_{12})$. Asymptota a této hyperboly jde totiž středem úsečky O_1O_2 kolmo k tečně t. Průsečík přímek a, t je tedy samodružný bod *1* na prvé ose kolineace o_{12} a průsečík a s tečnou t' kružnice k_1 v bodě *II*, t. j. bod *2*, je samodružný na druhé ose kolineace p_{12}. Tyto osy jsou ovšem kolmé k O_1O_2 a o_{12} jest chordálou kružnic k_1, k_2.



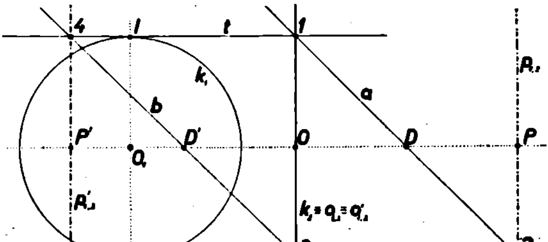
37

Jestliže sestrojíme vnitřní společnou tečnu u kružnic k_1, k_2 a podobně paprsek kolineace kolmý k u s body *III*, *IV* na k_1, pak asymptota b hyperboly c'_{12}, kolmá k u, určí na u, resp. na u' (tečně kružnice k_1 v bodě *IV*) samodružné body *3*, resp. *4* obou os kolineací $O_1(k_1, c'_{12})$, t. j. os $o'_{12} \equiv o_{12}$ a p'_{12}.

β) Na obr. 38 buďtež c_{12} a c'_{12} elipsy ($\overline{O_1O_2} < r_1 - r_2$). Známým způsobem sestrojíme vrchol hlavní osy A', třebas napřed elipsy c'_{12}, a vrchol její osy vedlejší C': paprsek kolineace O_1C' určí na k_1 body ${}^1C'$ a ${}^2C'$, kolineárně sdružené s bodem C' při dvou kolineacích $O_1(k_1, c'_{12})$. Tečna t' elipsy v bodě C' protne tečnu ${}^1t'$ kružnice k_1, sestrojenou v bodě ${}^1C'$, v samodružném bodě *1'*, tečnu ${}^2t'$ podobně v samodružném bodě *2'* — dvou os kolineace, t. j. o'_{12}, resp. p'_{12}, kolmých k O_1O_2. Osa o'_{12} jest opět chordálou daných kružnic, což by se také snadno dokázalo z vlastnosti deltoidu $1'{}^1C'C'C''$. Podobně pro druhou elipsu c_{12} sestrojíme osy kolineací $O_1(k_1, c_{12})$, t. j. p_{12} mimo sestrojenou již chordálu $o_{12} \equiv o'_{12}$.



38



39

γ) Ještě jednodušeji dostaneme osy kolineace v tom případě, když kuželosečky c_{12}, c'_{12} jsou **paraboly**, t. j. když jedna kružnice, na př. k_2 se stane přímkou (obr. 39). Společnou osou $o_{12} \equiv o'_{12}$ obou kolineací $O_1(k_1, c_{12})$ a $O_1(k_1, c'_{12})$ jest zde ovšem daná přímka k_2. Paprsek kolineace, rovnoběžný s k_2, určí na k_1 body I, resp. II, kolineárně sdružené s bodem paraboly, v němž její tečna a svírá s osou paraboly úhel 45°; tečna a jde průsečíkem osy paraboly s její přímkou řídicí, t. j. bodem D. ($\overline{OD} = r_1$). Tečny t a t' kružnice k_1, sestrojené v bodech I, resp. II, protínají a v bodech samodružných 1 (na k_2) a 2. Druhá osa kolineace p_{12} jde bodem 2 rovnoběžně s k_2 a jest vzdálena od k_2 o délku $OP = 2r_1$. Podobně je sestrojena v obrazci druhá osa kolineací $O_1(k_1, c'_{12})$, t. j. přímka p'_{12}; opět platí: $-\overline{OP'} = \overline{OP} = 2r_1$.

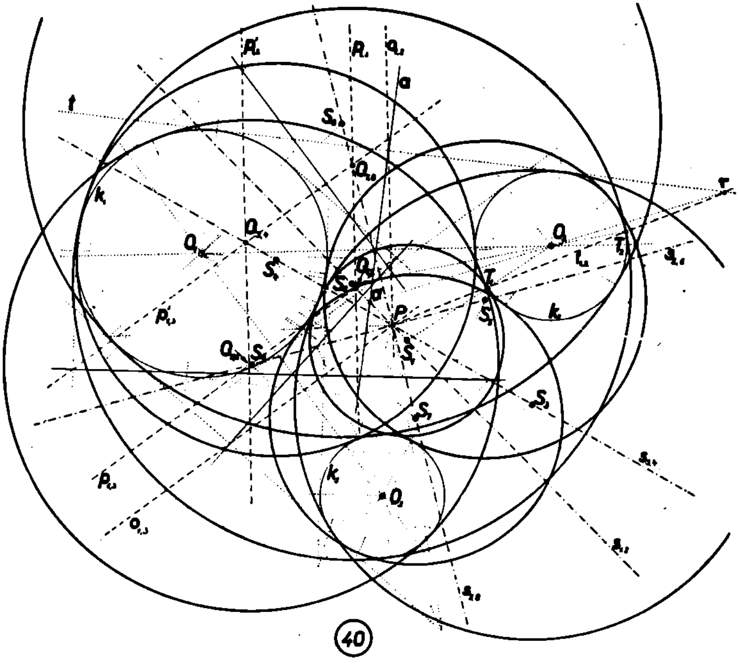
c) Na obr. 40 jest provedena úplně ú. A. pro případ, že dané kružnice k_i, $i = 1, 2, 3$, jsou vesměs mimo sebe, takže všecky kuželosečky c_{12} atd. jsou hyperboly. Podle obr. 37 jsou zde sestrojeny osy kolineací $O_1(k_1, c_{12})$ a $O_1(k_1, c_{13})$, t. j. přímky $o_{12} \parallel p_{12}$ a $o_{13} \parallel p_{13}$. Ty tvoří rovnoběžník, jehož vrchol P, ležící na chordálách o_{12} a o_{13}, je potenčním středem daných kružnic. Úhlopříčky tohoto rovnoběžníku jsou osy kolineací $O_1(c_{12}, c_{13})$. Obsahují po dvou čtyři průsečíky kuželoseček c_{12} a c_{13}. Z nich však jen dva jsou středy kružnic ú. A. Ježto víme, že středná takto určených dvojic výsledných kružnic musí jíti vždy potenčním středem daných kružnic, jest touto střednou ta úhlopříčka onoho rovnoběžníku, která spojuje P s bodem Q_{12}, průsečíkem to přímek p_{12} a p_{13}, t. j. $s_{12} \equiv PQ_{12}$.

Dvojicí kuželoseček c'_{12} a c'_{13} dostaneme podobně střednou $s_{34} \equiv PQ_{34}$ další dvojice hledaných kružnic; a ostatními možnými dvojicemi kuželoseček, t. j. c_{12}, c'_{13} a c'_{12}, c_{13}, dostaneme středné s_{56} a s_{78}, které obsahují vždy středy dvou dalších hledaných kružnic celé skupiny osmi zde reálných výsledků.

Je-li sestrojena středná s_{12}, můžeme dospěti k hledaným středům S_1 a S_2, průsečíkům to s_{12} s kuželosečkou c_{12} nebo c_{13}, opět středovým vztahem kolineárním.

Můžeme totiž použíti kterékoliv dané kružnice (v obr. 40 použito k_2) a stanoviti v jedné kolineaci $O_2(k_2, c_{12})$ k přímce s_{12} přímku kolineárně sdruženou t_{12}, která bude obsahovati body T_1 a T_2, ležící na k_2, sdružené s body S_1 a S_2. Přímka t_{12}

jde samodružným bodem P na ose kolineace o_{12} a určíme ji ještě dalším bodem, třebas τ, sdruženým s bodem σ, který je průsečíkem s_{12} s asymptotou a hyperboly c_{12}; τ je na t a na paprsku kolineace $O_2\sigma$.

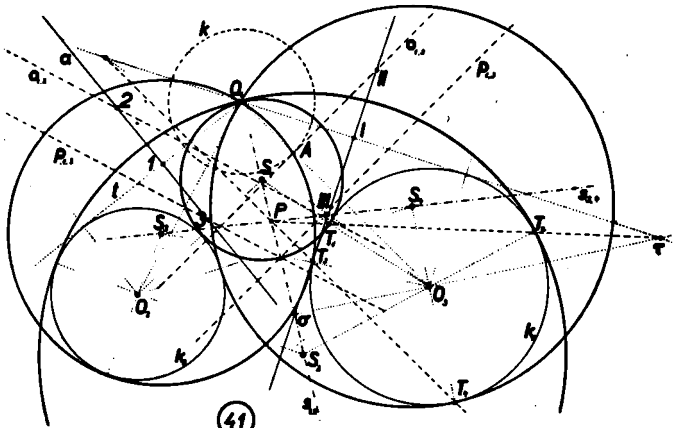


40

Jest patrno, že jsme výhodně dospěli v bodech T_1 a T_2 k dotykovým bodům dvou hledaných kružnic s kružnicí k_2 : t_{12} je spojnice dotykových bodů, jdoucí potenčním středem, známá z klasického Gergonnova řešení naší úlohy.

V našem obrazci jsou sestrojeny také ostatní výsledné středy $S_3 \ldots S_8$ rovněž uvedenými vztahy kolineárními, ale příslušné konstrukce jsou jen vyrýsovány bez popisu.

d) Ještě provedeme ú. A. ve zvláštním případě (*kkB*), t. j. když na př. k_1 se stane bodem O_1. V tomto případě je možno vyrýsovati obě středné dvou se vyskytujících dvojic výsledných kružnic najednou. Každá kuželosečka c_{12} a c_{13} zastupuje zde vždy dvě kuželosečky splývající, a proto



41

všecky čtyři jejich průsečíky jsou středy hledaných kružnic, čili obě osy kolineací $O_1(c_{12}, c_{13})$ povedou k výsledku.

Na obr. 41 jsou obě kuželosečky c_{12} a c_{13} hyperboly. Zvolíme-li pomocnou kružnici $k(O_1, r)$, (v obrazci je na př. $r = \overline{O_1A}$, kdež A je vrchol hyperboly c_{13}), pak k osám kolineací $O_1(k, c_{12})$ a $O_1(k, c_{13})$ dospějeme jednoduše takto: Bodem O_1 vedeme tečnu t ke kružnici k_2, středem její délky, bodem *1*, sestrojíme asymptotu a hyperboly c_{12}, kolmou k t, a od bodu *1* naneseme na a stejnou délku r na obě strany do bodů *2* a *3*; těmito body jdou již osy kolineace o_{12}, resp. p_{12} kolmo k O_1O_2. Důvod je zřejmý z toho, že tečny k, kolineárně sdružené s a při kolineacích $O_1(k, c_{12})$, vytínají na a body samodružné *2*, resp. *3* skutečně tak, že $\overline{12} = \overline{13} = r$. Je patrno také, že kružnici k není potřeba ani rýsovati, a dále, že pro poloměr $r = 0$ obě osy o_{12} a p_{12} by se ztotožnily s chordálou dvojice O_1, k_2. Pro hyperbolu c_{13} při použitém r jedna osa kolineací $O_1(k, c_{13})$, a to o_{13}, jde hned bodem A; druhá osa p_{13} jde bodem *III* na příslušné asymptotě sestrojeným ($\overline{I\,III} = r$) opět kolmo k O_1O_3. Úhlopříčky rovnoběžníku, určeného přímkami o_{12}, p_{12} a o_{13}, p_{13}, jsou již osy kolineací $O_1(c_{12}, c_{13})$, t. j. s_{12} a s_{34}. Protínají se v potenčním středu P daných kružnic k_2, k_3 a bodu O_1, neboť zmíněná volba kružnice k pro $r = 0$ by dala právě průsečík P na s_{12} i s_{34}.

Dotykové body T_1, T_2 a T_3, T_4 hledaných kružnic s kružnicí na př. k_3 i středy $S_1 \ldots S_4$ výsledných kružnic sestrojeny byly na obr. 41 opět kolineací $O_3(k_3, c_{13})$, a to postupem, vyloženým na konci odst. c).

e) Těmito kolineacemi mohli bychom také řešiti úlohy uvedené na str. 16 sub B, v kapitole 2, ze skupiny β) a γ), kdybychom hledali průsečíky kuželoseček, jako g. m. odvozených z podmínek (kk^o) a (kk^d), s kuželosečkami o společném ohnisku anebo s přímkami, dalšími to g. m., které by se v příslušných úlohách při zvoleném postupu vyskytly.

D. Užití polárnosti. Potřebné průsečíky těchto kuželoseček můžeme vyhledati také nepřímo způsobem, na který rovněž stačí středoškolské znalosti.[16])

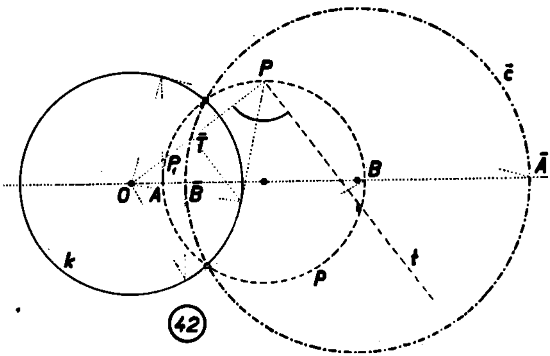
Způsob ten se zakládá na větě, jež pochází od J. Steinera: K ř i v k a s k u ž e l o s e č k o u p o l á r n ě s d r u ž e n á v z h l e d e m k ř í d i c í k r u ž n i c i, j e j í ž s t ř e d l e ž í v o h n i s k u o n é k u ž e l o s e č k y, j e s t k r u ž n i c e.

Dříve než ji dokážeme, připomeneme, že polárnou křivku[17]) $\bar{c}$ k dané křivce c vzhledem k určité řídicí kružnici k dostaneme, když k bodům a tečnám křivky c sestrojíme po-

[16]) Uveřejnil B. Vlk: viz Lit. č. IX a).
[17]) O útvarech polárných viz J. Vojtěch: GV, 63.

láry, resp. póly, vzhledem ke kružnici k; tím získáme tečny a body polárné křivky $\bar{c}$. Z vlastnosti sdružených polár plyne, že bodu dotyku T na tečně t křivky c odpovídá polárně tečna $\bar{t}$ s dotykovým bodem $\bar{T}$ křivky $\bar{c}$.

a) Pro důkaz věty shora uvedené zvolme v obr. 42 řídicí kružnici $k(O, r)$, jejíž střed O je v ohnisku kuželosečky c, dané mimo to oběma vrcholy A, B hlavní osy. K tečnám vrcholovým (v obr. nejsou vyrýsovány) sestrojíme póly $\bar{A}$,



42

resp. $\bar{B}$ vzhledem ke kružnici k; jsou to sdružené póly k A, resp. B vzhledem ke kružnici k na AB. Obecnou tečnu t kuželosečky c určíme jako kolmici ke spojnici ohniska O s libovolným bodem P, zvoleným na kružnici p, jež byla sestrojena nad AB jako průměrem. Pól $\bar{T}$ tečny t určíme jako sdružený pól k bodu P na OP vzhlédem ke kružnici k. Pro body P a $\bar{T}$ platí známý vztah:[18])

$$\overline{OP} \, . \, \overline{O\bar{T}} = r^2.$$

Nechť druhý průsečík spojnice OP s kružnicí p jest P_1; pak

[18]) Viz J. Vojtěch: GV, 60.

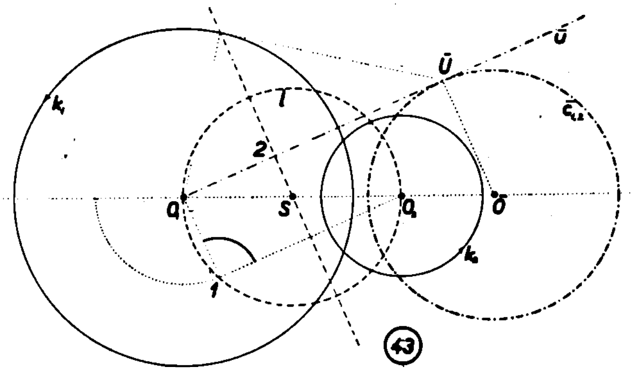
platí o mocnosti **M** bodu O vzhledem ke kružnici p:

$$\overline{OP} \,.\, \overline{OP_1} = \mathbf{M}.$$

Dělením obou rovnic dostáváme

$$\frac{\overline{OP_1}}{\overline{O\overline{T}}} = \frac{\mathbf{M}}{r^2} = \text{konst.}$$

Protože g. m. bodů P pro všecky tečny t kuželosečky c jest



kružnice p, kterou také vyplňují body P_1, jest g. m. bodu $\overline{T}$ skutečně kružnice $\bar{c}$, homothetická s kružnicí p pro střed homothetie v O a poměr homothetie rovný $\frac{\mathbf{M}}{r^2}$.

b) Konstrukce polárně sdružené kružnice $\bar{c}$ s kuželosečkou c je zvlášť jednoduchá pro hyperbolu.[19]) Buďtež dány v obr. 43 kružnice $k_1(O_1, r_1)$ a $k_2(O_2, r_2)$ tak, že délka středné $O_1O_2 > r_1 - r_2$. Orientujeme-li obě dané kružnice souhlasně, pak g. m. středů cyklů dotýkajících se k_1 a k_2 jest hyperbola c_{12} (viz Aa na str. 43). Za řídicí kružnici polárného vztahu

[19]) B. Vlk: Lit. č. IX a), str. 17.

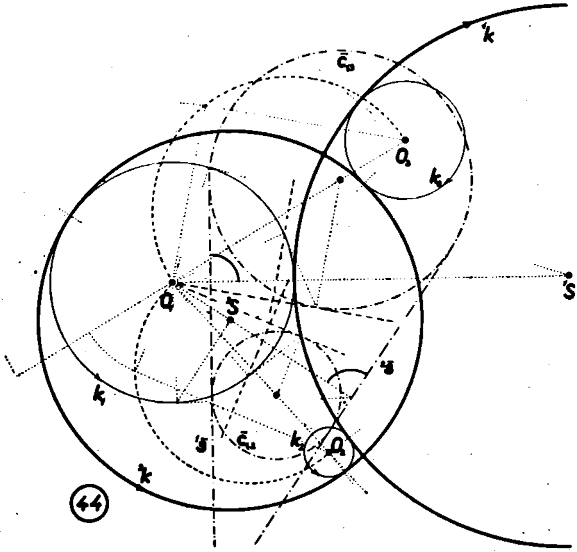
zvolme zde danou kružnici k_1, ježto $r_1 > r_2$. Víme, že asymptoty hyperboly c_{12} jsou kolmé na společné tečny cyklů k_1, k_2; opíšeme-li tedy nad O_1O_2 jako průměrem pomocnou kružnici l a přetneme-li ji z O_1 obloukem o poloměru $r_1 - \bar{r}_2$ v bodě 1, jest $O_1 1$ směr jedné asymptoty. Proto průměr $\bar{u}$ kružnice k_1 rovnoběžný s $O_2 1$ je polárou úběžného bodu U hyperboly c_{12} vzhledem ke kružnici řídicí a tedy tečnou kružnice $\bar{c}_{12}$. Sestrojíme dále pól asymptoty $S2$ vzhledem ke k_1. (S je střed úsečky O_1O_2, tedy střed hyperboly, bod 2 průsečík asymptoty s tečnou $\bar{u}$.) Polára bodu 2 vzhledem ke k_1 protíná $\bar{u}$ v pólu $\bar{U}$ oné asymptoty, t. j. v dotykovém bodě kružnice $\bar{c}_{12}$; střednou O_1O_2 pak protíná ve středu $\bar{O}$ této kružnice.

Je-li kuželosečka c_{12} elipsa, pak určíme póly $\bar{A}$, $\bar{B}$ k jejím vrcholovým tečnám, jako sdružené póly k vrcholům A, B na ose hlavní, a tím průměr kružnice $\bar{c}_{12}$ tak jako v obr. 42.

Pro parabolu pak jest bod $\bar{A}$ hned v bodě O_1, jakožto pól přímky úběžné, které se parabola dotýká, a bod $\bar{B}$ jest opět pólem její tečny vrcholové.

c) Při řešení obecné ú. A. postupujeme metodou polárných kružnic $\bar{c}_{12}$ a $\bar{c}_{13}$ tak, že je určíme jako polárně sdružené útvary vzhledem k dané kružnici k_1, jakožto kružnici řídicí, s nevyrýsovanými kuželosečkami c_{12} a c_{13}, kdež c_{12} je g. m. dotykových cyklů pro dvojici cyklů (k_1, k_2) a c_{13} pro dvojici cyklů (k_1, k_3). Pak sestrojíme dvě společné tečny $^1\bar{s}$ a $^2\bar{s}$ kružnic $\bar{c}_{12}, \bar{c}_{13}$, jež svými póly ^1S a ^2S poskytují středy výsledných cyklů ^1k a ^2k. Tak jsou určeny tyto cykly v obr. 44, kdež jsme orientovali dané kružnice k_i $(i = 1, 2, 3)$ ve skupinu cyklů $(++-)$. Opět čtyři podstatně různé skupiny znamének cyklů k_i poskytnou obecně osm výsledků. Které dvě společné tečny kružnic $\bar{c}_{12}, \bar{c}_{13}$ atd. vedou k výsledkům, rozhodlo by se přesně takto: Víme, že středy vždy dvou výsledných cyklů jsou na přímce jdoucí potenčním středem P

daných kružnic; myslíme-li si tedy poláru p bodu P vzhledem k řídicí kružnici, obsahuje tato přímka průsečík společných tečen polárných kružnic, právě těch, které vedou k výsledku. Že prakticky přímku p není třeba rýsovati, leč snad pro kontrolu přesnosti, je zřejmé. Na ní pak leží celkem čtyři středy podobnosti dvojic polárných kružnic; tyto



středy podobnosti poskytují obecně celkem osm tečen a pak osm výsledků ú. A.

d) Kružnic, polárně sdružených s kuželosečkami, lze užíti opět i k řešení úloh ze skupiny β) a γ) sub B kapit. 2, máme-li dospěti k průsečíkům g. m. odvozených též z podmínek (kk^o) a (kk^d) s kuželosečkami o společném ohnisku anebo s přímkami, které se v oněch úlohách vyskytnou jako příslušná g. m. —